

單元 8 三角函數的應用

主題一 和差角公式與二倍角公式

1. 兩角和差公式：

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{cases}$$

例：試求 $\sin 75^\circ$ 之值。

解： $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$



老師講解

試求 $\cos(79^\circ - \theta) \cos(4^\circ - \theta) + \sin(79^\circ - \theta) \sin(4^\circ - \theta)$ 之值。



學生練習

試求 $\sin 20^\circ \cos 25^\circ + \cos 20^\circ \sin 25^\circ$ 之值。

【代碼】t21a02m2



老師講解

已知 A 在第 III 象限， B 在第 IV 象限，且 $\cos A = -\frac{3}{5}$ ， $\sin B = -\frac{12}{13}$ ，試求 $\sin(A+B)$ 之值。



學生練習

設 α 、 β 均為銳角，且 $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ ， $\sin \beta = \frac{3}{5}$ ，求 $\cos(\alpha + \beta) = ?$

【代碼】t21a02m4



老師講解

設 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$,
 $\cos \beta = \frac{-1}{\sqrt{10}}$, 試求 $\alpha + \beta$ 之值。



學生練習

設 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$,
 $\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$, 試求 $\alpha + \beta$ 之值。

【代碼】t21b01m2

兩角和差公式：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

例：試求 $\frac{\tan 85^\circ + \tan 50^\circ}{1 - \tan 85^\circ \tan 50^\circ}$ 之值。

解： $\frac{\tan 85^\circ + \tan 50^\circ}{1 - \tan 85^\circ \tan 50^\circ} = \tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$



老師講解

求 $\tan 50^\circ + \tan 10^\circ + \sqrt{3} \tan 50^\circ \tan 10^\circ = ?$



學生練習

試求 $\tan 25^\circ \tan 20^\circ + \tan 20^\circ + \tan 25^\circ$ 之值。

【代碼】t21a03m3



老師講解

設 $\tan \alpha$, $\tan \beta$ 為 $x^2 + 4x - 2 = 0$ 之二根，
求下列各式之值：

(1) $\tan(\alpha + \beta)$ (2) $\cos^2(\alpha + \beta)$



學生練習

設 $\tan \alpha$ 、 $\tan \beta$ 為 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 之二根，
試求 $\cos^2(\alpha + \beta)$ 之值。

【代碼】t21b02m2

2. 二倍角公式：

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$



老師講解

設 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$, $\sin \theta < 0$, 試求下列各式
之值：(1) $\sin 2\theta$ (2) $\cos 2\theta$ (3) $\tan 2\theta$ 。



學生練習

$\cos \theta = \frac{-15}{17}$, $\tan \theta > 0$, 試求 $\frac{1 + \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$
之值。

【代碼】t22a01m2



老師講解

已知 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ ，試求 $\sin 2\theta$ 之值。



學生練習

已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ ，試求 $\sin 2\theta$ 之值。

【代碼】t22a02m2



老師講解

若 $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$ ，求 $\sin^6 \theta + \cos^6 \theta$ 之值。



學生練習

若 $\cos 2\theta = \frac{4}{5}$ ，求 $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ 之值。

【代碼】t22a02m3



老師講解

試求 $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ 之值。



學生練習

試求 $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$ 之值。

【代碼】t22b03m2

3. 正餘弦疊合求極值：

- (1) 設 a 、 b 均不為 0，利用和差角公式可將 $f(x) = a \sin x + b \cos x$ 化簡成一個振幅為 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 的正弦或餘弦函數。

$$f(x) = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right)$$

$$[\text{令 } \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{、} \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}]$$

$$\text{故 } f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin x \cos \theta + \cos x \sin \theta) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta)$$

- (2) 設 a 、 b 均不為 0， x 為任意角度，則 $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$



老師講解

設 $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x = r \sin(x + \theta)$ ，
其中 $r > 0$ ， $0 < \theta < 2\pi$ ，求 $r = ?$ $\theta = ?$



學生練習

設 $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x = r \cos(x - \theta)$ ，
其中 $r > 0$ ， $0 < \theta < 2\pi$ ，求 $r = ?$ $\theta = ?$

【代碼】t21251m1



老師講解

試求下列各式之最大值與最小值：

(1) $f(x) = 4 \sin x + 3 \cos x$

(2) $f(\theta) = -5 \sin \theta + 12 \cos \theta + 3$ 。



學生練習

求 $f(\theta) = -8 \sin \theta + 15 \cos \theta + 2$ 之最大值與最小值。

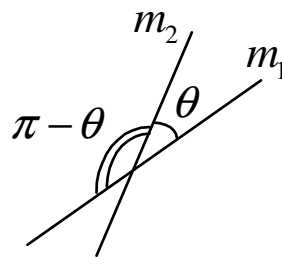
【代碼】t21a04m2



4. 直線之交角：

直線 L_1 、 L_2 斜率分別為 m_1 、 m_2 ；夾角為 θ (銳角)，

$$\text{則 } \tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \quad [\text{另一夾角(鈍角)為 } 180^\circ - \theta]$$



老師講解

求二直線 $2x + 6y - 5 = 0$ 與 $x - 2y + 3 = 0$ 之夾角為何？



學生練習

求二直線 $2x + y - 7 = 0$ 與 $3x - y + 1 = 0$ 之銳角夾角為何？

【代碼】g14a02m2



老師講解

求過 $(-1, 3)$ 且與直線 $2x - y = 3$ 的夾角為 45° 之直線方程式為何？



學生練習

設直線 L 過點 $(1, 2)$ ，且與另一直線 $L': 3x + y - 5 = 0$ 之交角為 45° ，試求直線 L 之方程式。

【代碼】g14b04m2

【學生練習答案】

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$	2. $\frac{-16}{65}$	3. 45°	4. 1
5. $\frac{1}{10}$	6. $\frac{15}{8}$	7. $-\frac{8}{9}$	8. $\frac{41}{50}$
9. $-\frac{1}{8}$	10. $r = 2, \theta = \frac{\pi}{3}$	11. 19, -15	12. 45°
13. $x + 2y - 5 = 0, 2x - y = 0$			

回家功課

- () 1. 求 $\sin 76^\circ \sin 46^\circ + \sin 14^\circ \sin 44^\circ = ?$
 (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。 代碼：t21087y1
- () 2. $\triangle ABC$ 中， $\tan A = \frac{1}{2}$ ， $\tan B = \frac{1}{3}$ ，試求 $\angle C$ 之度數。
 (A) 135° (B) 45° (C) 30° (D) 150° 。 代碼：t21217m1
- () 3. 求 $\tan 55^\circ \tan 80^\circ - \tan 55^\circ - \tan 80^\circ$ 之值為
 (A) -1 (B) 1 (C) $\sqrt{3}$ (D) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 。 代碼：t21210m1
- () 4. 設 $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ 為 $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ 的兩根，則 $\sin 2\theta = ?$
 (A) -1 (B) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) 1 (D) 2 。 代碼：t22099w1
- () 5. 已知 $\csc \theta = 3$ 且 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ ，則 $\cos 2\theta = ?$
 (A) $-\frac{11}{9}$ (B) $-\frac{7}{9}$ (C) $\frac{7}{9}$ (D) $\frac{11}{9}$ 代碼：t22100p1
- () 6. $\sin 2\theta \cdot (\tan \theta + \cot \theta) =$ (A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1 。 代碼：t22088s1
- () 7. 試求 $\sin 37.5^\circ \cos 37.5^\circ \cos 75^\circ =$ (A) $\frac{1}{8}$ (B) $-\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{16}$ (D) $-\frac{1}{16}$ 。 代碼：t22251m1
- () 8. 試求 $\tan 22.5^\circ + \cot 22.5^\circ = ?$ (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$ 。 代碼：t22b01m1
- () 9. 設 $a > 0$ ，若 $L_1: 2x - y + 7 = 0$ 與 $L_2: ax + y - 13 = 0$ 之夾角為 $\frac{\pi}{4}$ ，
 則 $a =$ (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 。 代碼：g15206m1
- () 10. 若 $x = 3$ 與 $3x + 4y + 2 = 0$ 之夾角為 θ ，求 $\sin \theta =$
 (A) $\frac{3}{5}$ (B) $-\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $-\frac{4}{5}$ 代碼：g14b05m1

答案：AABCC AACBC

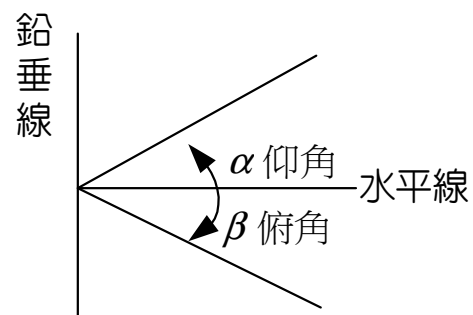


主題二 三角測量

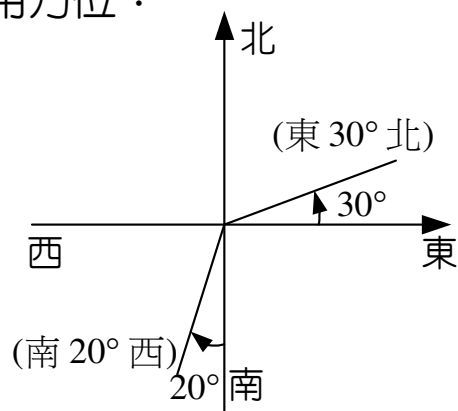
三角測量：

(1) 常用名詞：

- ① 鉛垂線：垂直地面之直線（過地球球心之線）。
- ② 水平線：垂直鉛垂線之直線。
- ③ 仰角：視線與水平線往上之夾角。
- ④ 俯角：視線與水平線往下之夾角。



(2) 常用方位：



老師講解

某人於地面處測得一山頂的仰角為 30° ，往山的方向前進100公尺後，測得山頂的仰角為 60° ，試求此山高。



學生練習

一塔高30公尺，位於一山頂上，某人測得塔底與塔頂的仰角分別為 30° 與 45° ，則求此山高？

【代碼】 t33a01m3



老師講解

氣象局測出，颱風中心位置由恆春東 60° 南，距離 200 公里處，以每小時 20 公里的速度朝正西方直線前進，若行進的速度方向不變。試求在 5 小時後，颱風中心位置距離恆春多少公里？



學生練習

A 、 B 兩地隔一湖泊，在湖泊遠處 C 點，測得 $\overline{AB} = 200$ 公尺，且 $\angle BAC = 75^\circ$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，試求 $\overline{AC}$ 的距離。

【代碼】t33a02m2



老師講解

大陸知名旅遊景區九寨溝，其中有一湖泊叫鏡海，在早上 9 點前，湖泊清澈如鏡，將對岸的湖光山色倒映在湖中，今彥臻站在比湖面高 9 公尺的觀景台上測出對岸山頂的仰角為 45° ，湖中山頂倒影的俯角為 60° ，則對岸山頂的高度為_____公尺。



學生練習

瑋年坐直升機參加“我愛台北 See Taipei”的活動，忽然間他看見直升機正飛越台北小巨蛋，又過一會兒，他發現他再看小巨蛋時，俯角為 60° ，又過 2 分鐘後，他再觀測時俯角已變為 30° ，若直升機一直保持等速直線飛行，高度固定且此直升機時速為 36 公里，則此機高度為_____公尺。

【代碼】t33232m1



老師講解

在一高樓之正東方 A 點及正南方 B 點，
測得此高樓仰角分別為 60° 及 45° ，
已知 $\overline{AB} = 200$ 公尺，試求此高樓之高。

【代碼】t33b01m1



學生練習

設在塔之正西方 A 點及塔之正南方 B 點，
測得塔頂之仰角各為 45° 及 30° ，
且 $\overline{AB} = 400$ 公尺，試求塔高。

【代碼】t33b01m2

【學生練習答案】

1. $15(\sqrt{3} + 1)$	2. $100\sqrt{6}$	3. $600\sqrt{3}$	4. 200
-----------------------	------------------	------------------	--------

回家功課

- () 1. 一塔高 30 公尺，位於一山頂上，某人測得塔底與塔頂的仰角分別為 30° 與 45° ，則求此山高 = ?
 (A) $10(\sqrt{5}+1)$ (B) $15(\sqrt{3}+1)$ (C) $20(\sqrt{2}+1)$ (D) $15(3+\sqrt{3})$ 。 代碼：t33a01m3
- () 2. 海邊二瞭望臺 A 、 B 相距 80 公尺，今由 A 、 B 二處瞭望海面上一船 C ，測得 $\angle BAC = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 75^\circ$ ，已知 $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ， $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ，求 $\overline{BC}$ 的長多少公尺？
 (A) $80(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ (B) $\frac{160\sqrt{2}}{3}$ (C) $\frac{160\sqrt{6}}{3}$ (D) $40\sqrt{6}$ 。 代碼：t33090k1
- () 3. A 、 B 兩地隔一湖泊，在湖泊遠處 C 點，測得 $\overline{CA} = 3$ 公里， $\overline{CB} = 5$ 公里且 $\angle ACB = 120^\circ$ ，試求 $\overline{AB}$ 的距離 =
 (A) 6 (B) 7 (C) $\sqrt{51}$ (D) $\sqrt{57}$ 。 代碼：t33a02m3
- () 4. 有 A 、 B 兩消防站， B 在 A 的正東方 12 公里，今 C 地發生火災，已知 C 地在 A 消防站的北 15° 東，在 B 消防站的西北方，試求從 A 或 B 消防站出發到達 C 地之最短距離為
 (A) 4 (B) $4\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{6}$ (D) 6 。 代碼：t33231m1
- () 5. 一汽艇在湖上沿直線前進，有人用儀器在岸上先測得汽艇在正前方偏左 50° ，距離 200 公尺，一分鐘後，於原地再測，知汽艇駛到正前方偏右 70° ，距離為 300 公尺，那麼此汽艇在這一分鐘行駛了多少公尺。
 (A) $100\sqrt{19}$ (B) $100\sqrt{17}$ (C) $100\sqrt{15}$ (D) $100\sqrt{11}$ 。 代碼：s15084c1
- () 6. 在某海防觀測站的東方 12 海浬處有 A 、 B 兩艘船相會之後， A 船以每小時 12 海浬的速度往南航行， B 船以每小時 3 海浬的速度向北航行。問幾小時後，觀測站及 A 、 B 兩船恰成一直角三角形。
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 。 代碼：s15089c1

答案：BDBCA A



主題三 極坐標與複數之極式

1. 極坐標：

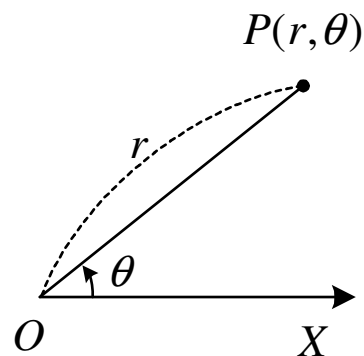
在一平面上任取一點 O ，過 O 向右作 $\overline{OX}$ ，且在平面上

任取 $\overline{OP} = r$ 。以 $\overline{OX}$ 為始邊， $\overline{OX}$ 與 $\overline{OP}$ 之夾角 θ 。

則以 (r, θ) 來表示 P 的位置，此種表示法示稱為極坐標。

其中 r 稱為 P 點的向徑。 θ 稱為 P 點的幅角。

當 $r > 0$ ， $0 \leq \theta < 2\pi$ ，則 θ 稱為 P 點的主幅角。

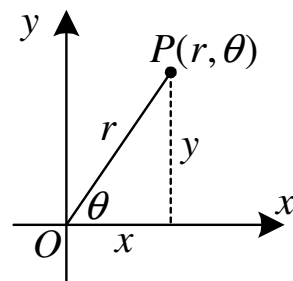


2. 直角坐標 (x, y) 與極坐標 (r, θ) ：

(1) 若 P 點的極坐標為 (r, θ) ，則直角坐標為 $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

(2) 若 P 點不為原點且直角坐標為 (x, y) ，則極坐標為 (r, θ) ，

$$(\text{其中 } r = \sqrt{x^2 + y^2}), \cos \theta = \frac{x}{r}, \sin \theta = \frac{y}{r}$$



註：極坐標的表示不唯一， $(2, \frac{\pi}{3})$ 與 $(-2, \frac{4\pi}{3})$ 皆表示同一個點坐標 $(1, \sqrt{3})$



老師講解

將下列各直角坐標化為極坐標，
並取向徑 $r > 0$ ，幅角 $0 \leq \theta < 2\pi$ 。

- (1) $(\sqrt{3}, 1)$ (2) $(-2, -2)$



學生練習

將直角坐標 $(-\sqrt{3}, 1)$ 化為極坐標，
並取向徑 $r > 0$ ，幅角 $0 \leq \theta < 2\pi$ 。

【代碼】a82a01m2



老師講解

將下列極坐標化為直角坐標：

- (1) $(3, \frac{2\pi}{3})$ (2) $(6, \frac{4\pi}{3})$



學生練習

將極坐標 $(2, \frac{11\pi}{6})$ 化為直角坐標：

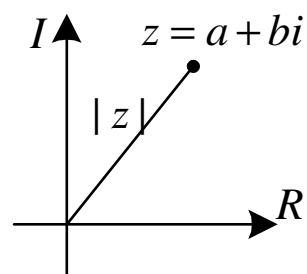
【代碼】a82a01m3

3. 複數平面：(高斯平面)

設直角坐標平面的 x 軸作為實軸， y 軸作為虛軸，

則由實軸與虛軸所構成的平面稱為複數平面或高斯平面。

設 $a, b \in R$ 則複數 $a + bi$ 和點 (a, b) 形成一對一的對應關係。



4. 複數的絕對值：

- (1) 複數 $z = a + bi$ 的絕對值表示複數平面上，點 $P(a, b)$ 與原點的距離，即 $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 。

例：設 $z = 3 - 4i$ ，求 $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

- (2) 設 z_1 、 z_2 為複數，則

① $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

② $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

③ $a, b \in R$ ， $z = a + bi \Rightarrow z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

④ $|z^n| = |z|^n$



老師講解

求下列各式之值：

- (1) 設 $z = 3 - 4i$ ，求 $|z| = ?$
 (2) 設 $z = (5 + 12i)(4 + 3i)$ ，求 $|z| = ?$
 (3) 設 $z = (7 + 24i)(3 - 4i)^2$ ，求 $|z| = ?$



學生練習

求下列各式之值：

- (1) 設 $z = (2 + i)(1 + 3i)$ ，求 $|z| = ?$
 (2) 設 $z = \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)^3}$ ，求 $|z| = ?$

【代碼】a82a02m2



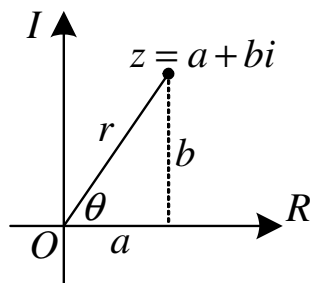
5. 複數之極式：

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad z = \underbrace{a + bi}_{\text{標準式}} = r \cos \theta + i r \sin \theta = \underbrace{r(\cos \theta + i \sin \theta)}_{\text{極式}}$$

$$(1) \text{ 如右圖, } \cos \theta = \frac{a}{r}, \sin \theta = \frac{b}{r} \Rightarrow \begin{cases} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases}$$

$$(2) \quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0, \text{ 稱為向徑。}$$

若 $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, 則 θ 稱為 z 的主幅角, 記作 $\arg(z) = \theta$ 。



老師講解

化下列各式為極式：

$$(1) \quad -\sqrt{3} + i$$

$$(2) \quad 2 - 2i$$



學生練習

將複數 $z = -1 - \sqrt{3}i$ 化為極式。

【代碼】a82a03m2

6. 極式之性質：

設 $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$, 則：

$$(1) \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$(2) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$(3) \quad \text{設 } z = r(\cos \theta \pm i \sin \theta), \text{ 則 } z^n = r^n(\cos n\theta \pm i \sin n\theta)$$



老師講解

若 $Z_1 = 8(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$,
 $Z_2 = (\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$,
 $Z_3 = 4(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$, 求 $\frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3}$ 之值。



學生練習

化簡 $\frac{6(\cos 220^\circ + i \sin 220^\circ)}{3(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)}$ 之值。

【代碼】a83a01m2



老師講解

求 $(1 - \sqrt{3}i)^8 = ?$



學生練習

設 $i = \sqrt{-1}$, 求 $(-\sqrt{3} + i)^6 = ?$

【代碼】a83a02m2



老師講解

設 $\theta = 15^\circ$, 則
 $\frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^4 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)}{(\cos 3\theta - i \sin 3\theta)^2} = ?$



學生練習

化簡 $\frac{(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)^4 (\cos 9^\circ + i \sin 9^\circ)^8}{(\cos 4^\circ + i \sin 4^\circ)^3 (\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)^2}$

【代碼】a83b01m2



【加強題】

1. $\sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 3\cos^2 x$ 之最大值與最小值之和為_____。
2. 俊威自某大樓頂樓向正東方眺望，觀測到一家便利商店，此時測得俯角為 45° ；
俊威再向東 30° 南處眺望，觀測到一家速食店，此時測得俯角為 30° ，已知兩家店相距 25 公尺，試求此大樓的高度為_____公尺。
3. 設 $z = -2(\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ)$ ，則 z 的主幅角=_____。
4. 求 $(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i})^6 =$ _____。

【學生練習答案】

1. $(2, \frac{5}{6}\pi)$	2. $(\sqrt{3}, -1)$	3. (1) $5\sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	
4. $2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)$		5. $-\sqrt{3} + i$	6. -64
7. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$			

回家功課

- () 1. 極坐標平面上兩點 $(4, 60^\circ)$ 與 $(4, 120^\circ)$ 的距離為
(A) $\sqrt{12}$ (B) 2 (C) $\sqrt{26}$ (D) 4 。
- 代碼：a82211m1
- () 2. 設二複數 Z_1, Z_2 分別為 $2+i, 1+3i$ ，則 $|Z_1| \cdot |Z_2| =$
(A) $5\sqrt{2}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{6}$ 。
- 代碼：a82201m1
- () 3. 設 $i = \sqrt{-1}$ ，則求複數 $\frac{(\sqrt{3}+i)(2i)^2}{(1-i)^2}$ 的絕對值為
(A) 2 (B) $\sqrt{2}$ (C) 1 (D) 4 。
- 代碼：a82208m1
- () 4. 將複數 $z = 1 - \sqrt{3}i$ 化為極式
(A) $2(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)$ (B) $2(\sin \frac{5\pi}{3} + i \cos \frac{5\pi}{3})$
(C) $2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$ (D) $(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi)$ 。
- 代碼：a82206m1
- () 5. 設 $z = \frac{(\cos 8^\circ + i \sin 8^\circ)^6 (\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)^4}{(\sin 86^\circ + i \cos 86^\circ)^7}$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 z 之值為
(A) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (B) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (C) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (D) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 。
- 代碼：a83202m1
- () 6. 已知 $i = \sqrt{-1}$ ，化簡 $(\cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7})(\cos \frac{10\pi}{21} + i \sin \frac{10\pi}{21}) = ?$
(A) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ (B) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (C) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (D) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 。
- 代碼：a83098k1
- () 7. 已知 $i = \sqrt{-1}$ ，則 $(\sqrt{3} + i)^{10} = ?$
(A) $2^9(1 + \sqrt{3}i)$ (B) $2^9(1 - \sqrt{3}i)$ (C) $2^9(\sqrt{3} + i)$ (D) $2^9(\sqrt{3} - i)$ 。
- 代碼：a83091k1
- () 8. 設 $i = \sqrt{-1}$ ，則 $(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i})^9$ 等於 (A) $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ (B) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ (C) -1 (D) 1 。
- 代碼：a83206m1
- () 9. 設 $i = \sqrt{-1}$ 且複數 z 的主幅角記作 $\arg z$ ， $0 \leq \arg z < 2\pi$ ，
試求 $\arg(-\sqrt{3} + i) = ?$ (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{7\pi}{6}$ (D) $\frac{11\pi}{6}$ 。
- 代碼：a82096k1

答案：DADCD BBCB

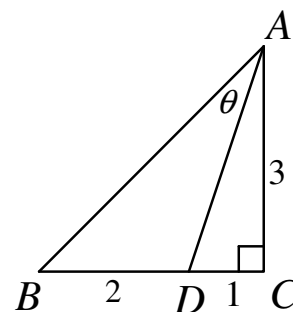


歷屆試題

- () 1. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， D 在 $\overline{BC}$ 線段上，且 $\overline{AC} = 50$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $\angle ADC = 45^\circ$ ，如圖(一)所示，則 $\overline{BD} = ?$
(A) 50 (B) $50(\sqrt{3}-1)$ (C) $50\sqrt{3}$ (D) 100。

代碼：t33100s1
(100 年統測 B)

- () 2. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， D 在 $\overline{BC}$ 線段上，且線段長 $\overline{BD} = 2$ ， $\overline{DC} = 1$ ， $\overline{AC} = 3$ ，如圖(二)所示。令 $\angle BAD = \theta$ ，求 $\cos \theta = ?$
(A) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 。



代碼：t31100k1
(100 年統測 C)

- () 3. 判斷下列各數值中，何者小於 0？($\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$)
(A) $\cos 100^\circ - \sin 2011^\circ$ (B) $\cos^2 100^\circ - \sin^2 100^\circ$
(C) $\cos^2 2011^\circ - \sin^2 2011^\circ$ (D) $\cos 100^\circ \cos 2011^\circ - \sin 100^\circ \sin 2011^\circ$ 。

代碼：t22100k1
(100 年統測 C)

- () 4. 已知 $i = \sqrt{-1}$ 。若 $z = \cos 78^\circ + i \sin 78^\circ$ ，則 $z^{15} = ?$
(A) $-i$ (B) -1 (C) i (D) 1 。

代碼：a83100k1
(100 年統測 C)

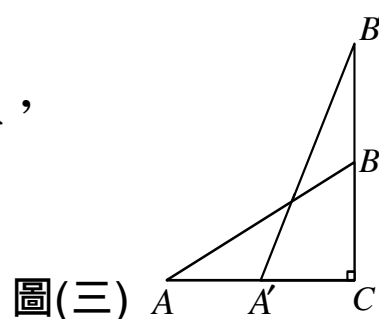
- () 5. 已知 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ， $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ ，則下列大小關係何者正確？
(A) $\cos \theta < \sin 2\theta < \cos 2\theta < \sin \theta$ (B) $\sin 2\theta < \cos 2\theta < \cos \theta < \theta < \sin \theta$
(C) $\sin 2\theta < \cos \theta < \cos 2\theta < \sin \theta$ (D) $\cos \theta < \cos 2\theta < \sin 2\theta < \sin \theta$ 。

代碼：t22101k1
(101 年統測 C)

- () 6. 已知平面上兩點 $A(\cos \frac{3\pi}{4}, \sin \frac{3\pi}{4})$ 、 $B(\cos \frac{\pi}{12}, \sin \frac{\pi}{12})$ ，求線段 $\overline{AB}$ 之長
(A) 1 (B) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$ 。

代碼：t21102s1
(102 年統測 B)

- () 7. 已知 $\overline{AC}$ 垂直 $\overline{B'C}$ ，點 A' 、 B 分別在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{B'C}$ 上， $\overline{AB} = \overline{A'B'} = 13$ ，如圖(三)。若 $\angle B'A'C = 2\angle BAC$ ，且 $\triangle ABC$ 的面積為 39，則 $\triangle A'B'C$ 的面積為何？
(A) 48 (B) 42 (C) 36 (D) 30。

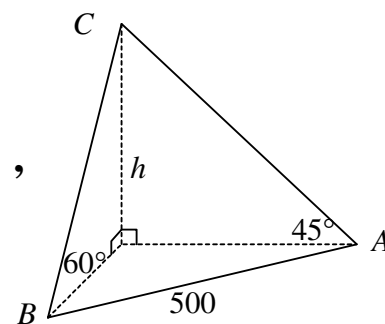


代碼：t22102s1
(102 年統測 B)

- () 8. 若 $2 + 3\cos 2\theta = 0$ ，則 $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = ?$
 (A) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 。
 代碼：t22102k1
 (102 年統測 C)
- () 9. 已知 a 、 b 為實數， $i = \sqrt{-1}$ 。若 $(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8 = a + bi$ ，則 $a^2 + b^2 = ?$
 (A) 16 (B) 64 (C) 256 (D) 1024。
 代碼：a83102k1
 (102 年統測 C)
- () 10. 已知某銳角 θ 滿足 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ ，求 $\tan 2\theta =$
 (A) $\frac{13}{12}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{12}{5}$ (D) $\frac{24}{7}$ 。
 代碼：t22103s1
 (103 年統測 B)
- () 11. 已知一矩形的長為 $2\cos 1^\circ \cos 2^\circ$ ，寬為 $2\sin 1^\circ \csc 4^\circ$ ，則此矩形面積為何？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。
 代碼：t22103s2
 (103 年統測 B)
- () 12. 設 $\sin(-45^\circ) \cdot \sin 15^\circ = k - \cos 45^\circ \cos(-15^\circ)$ ，則 k 之值為何？
 (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。
 代碼：t21103k1
 (103 年統測 C)
- () 13. 設 $z = \frac{(5-12i)(3+4i)}{(4-3i)(12-5i)}$ ， $i = \sqrt{-1}$ ，則 $|z|$ 之值為何？
 (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) 13。
 代碼：a82103k1
 (103 年統測 C)
- () 14. 設 $z_1 = (\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})^4$ ， $z_2 = (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})^2$ ，則 $\frac{z_1}{z_2}$ 之值為何？
 (A) -1 (B) i (C) 0 (D) 1。
 代碼：a83103k1
 (103 年統測 C)
- () 15. 一位遊客在平地上測得某大樓頂端的仰角為 30° ，他朝該大樓的方向直走了 d 公尺後，再測一次，得到仰角為 45° 。若該大樓高度為 300 公尺，則 $d = ?$
 (A) $300(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ (B) $300(\sqrt{2} - 1)$ (C) $\frac{300\sqrt{2}}{2}$ (D) $300(\sqrt{3} - 1)$ 。
 代碼：t33104s1
 (104 年統測 B)
- () 16. 若 $\sin \theta = \frac{1}{3}$ ，則 $\sqrt{2 - 2\cos 2\theta} = ?$
 (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。
 代碼：t22104k1
 (104 年統測 C)



- () 17. 今有人欲測一山的高度，當此人在此山的正東方一點 A ，測得山頂 C 的仰角為 45° ，又當他在山的南 60° 西方向一點 B ，測得山頂 C 的仰角為 60° ，如圖(四)所示。若 A 、 B 兩點相距 500 公尺，則此山高 h 為多少公尺？



(A) $\frac{500}{3}\sqrt{3}$ (B) $\frac{500}{7}\sqrt{21}$ (C) $\frac{500}{3}\sqrt{21}$ (D) $500\sqrt{3}$ 。圖(四)

代碼：t33104k1
(104 年統測 C)

- () 18. 已知 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ， $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ ，且 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ， $\cos \beta = \frac{12}{13}$ ，則 $\sin(\alpha + \beta)$ 之值為何？ (A) $-\frac{63}{65}$ (B) $-\frac{33}{65}$ (C) $\frac{33}{65}$ (D) $\frac{63}{65}$ 。

代碼：t21105s1
(105 年統測 B)

- () 19. 設 $a = \cos 40^\circ \cos 80^\circ \cos 160^\circ$ ， $b = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$ ，則 $a + b$ 之值為何？ (A) $-\frac{1}{4}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$ 。

代碼：t22105k1
(105 年統測 C)

- () 20. 已知 $z_1 = \sqrt{3} + i$ ， $z_2 = 1 + i$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 $z_1^2 z_2^4$ 可表示為下列哪一個？ (A) $16(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$ (B) $16(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$ (C) $16(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ (D) $16(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ 。

代碼：a83105k1
(105 年統測 C)

- () 21. 已知 $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = a \cdot \sin(\theta + b)$ ， $a > 0$ ， $0 \leq b \leq 2\pi$ ，則下列何者正確？ (A) $a = 4$ ， $b = \frac{\pi}{6}$ (B) $a = 2$ ， $b = \frac{\pi}{3}$ (C) $a = 2$ ， $b = \frac{4\pi}{3}$ (D) $a = 4$ ， $b = \frac{\pi}{3}$ 。

代碼：t21106s1
(106 年統測 B)

- () 22. 若 $\sin \theta = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，則 $\tan 2\theta = ?$ (A) $2 - \sqrt{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$ 。

代碼：t22106k1
(106 年統測 C)

- () 23. 一輛遙控小車在平坦無坡度的操場行駛，正前方遠處有一座直立水塔，測得塔頂的仰角 30° 。若小車往水塔方向移動 10 公尺後，測得塔頂的仰角 45° ，則水塔的高度為多少公尺？ (A) $5\sqrt{3}$ (B) $5(\sqrt{2} + 1)$ (C) $4(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ (D) $5(\sqrt{3} + 1)$ 。

代碼：t33107s1
(107 年統測 B)

- () 24. 設 $f(x) = 4\sin x + \cos(2x) + 7$ 的最小值為 m ，最大值為 M ，則 $m + M = ?$ (A) -7 (B) 1 (C) 12 (D) 21。

代碼：t22107k1
(107 年統測 C)

- () 25. 若 $\tan 19^\circ = a$ ，則 $\sin 2018^\circ = ?$
 (A) $\frac{-2}{1+a^2}$ (B) $\frac{-2a}{1+a^2}$ (C) $\frac{a}{1+a^2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ 。
 代碼：t13107k2
 (107 年統測 C)
- () 26. 小明在平地上測得某一直立高樓的頂端之仰角為 45° 。他面向該高樓向前直行 30 公尺之後，測得高樓頂端之仰角為 60° 。試問小明第二次測仰角時，距離高樓的底部約多少公尺？
 (A) 30 (B) $15(\sqrt{3}-1)$ (C) $15(\sqrt{3}+1)$ (D) 45。
 代碼：t33108s1
 (108 年統測 B)
- () 27. 有一梯子斜靠於牆上，且梯子、地面及牆面構成一個 30° 、 60° 、 90° 的直角三角形。若梯子沿牆面下滑 $\frac{1}{2}$ 公尺時，則梯子、地面及牆面構成一個 45° 、 45° 、 90° 的直角三角形。試問梯長為多少公尺？
 (A) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ 。
 代碼：t33108k1
 (108 年統測 C)
- () 28. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\frac{\cos B + i \sin B}{(\cos A + i \sin A)(\cos C + i \sin C)}$ 為實數其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 $\triangle ABC$ 必為何種三角形？
 (A) 等腰三角形 (B) 銳角三角形 (C) 直角三角形 (D) 鈍角三角形。
 代碼：a83108k1
 (108 年統測 C)
- () 29. 已知 $O(0,0)$ 、 $P(-3,4)$ 與 $Q(x,y)$ 為坐標平面上三點。若以 O 為圓心， $\overline{OP}$ 為半徑，逆時針方向轉動 30° 後， P 點與 Q 點重疊，則下列何者正確？
 (A) $x = \frac{-3\sqrt{3}-4}{2}$ (B) $x = \frac{-3\sqrt{3}+4}{2}$ (C) $y = \frac{4\sqrt{3}-3}{10}$ (D) $y = \frac{4\sqrt{3}+3}{2}$ 。
 代碼：a82108k1
 (108 年統測 C)
- () 30. 若 $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ ，則 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = ?$
 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$ 。
 代碼：t22109s1
 (109 年統測 B)
- () 31. 某甲沿著馬路向正前方一棟大樓直線前進，抬頭看大樓頂端的仰角為 30° ，走了 100 公尺後，第二次抬頭看大樓頂端，此時的仰角為 45° ，則第二次抬頭看大樓時距離大樓還有多遠？
 (A) $25(\sqrt{3}-1)$ (B) $50(\sqrt{3}+1)$ (C) $100(\sqrt{3}-1)$ (D) $100(\sqrt{3}+1)$ 。
 代碼：t33109s1
 (109 年統測 B)
- () 32. 若 $\sin 80^\circ = a$ ， $\cos 59^\circ = b$ ，則 $\cos 21^\circ = ?$
 (A) $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}$ (B) $a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2}$
 (C) $ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ (D) $ab + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ 。
 代碼：t21109k1
 (109 年統測 C)



- () 33. 設 $(\sqrt{3}+i)z = -2\sqrt{3}+2i$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ ，則 z 之主幅角為何？
 (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{7\pi}{6}$ 。

代碼：a82109k1
 (109 年統測 C)

- () 34. 已知 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，且 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ 。若 $\sin 4\theta = a$ ，則下列何者正確？
 (A) $0 < a < \frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{4} < a < 1$ 。

代碼：110tcb16
 (110 年統測 B)

- () 35. 孫悟空師徒四人取經途中經過一廣闊平原，看到前方有一尊高大佛像，其頂部仰角為 37° ，四人往佛像前行 31 公尺後，佛像頂部仰角變為 53° 。求佛像高度約為多少公尺？
 (參考資料： $\sin 37^\circ \approx \frac{3}{5}$ 、 $\cos 37^\circ \approx \frac{4}{5}$ 、 $\tan 37^\circ \approx \frac{3}{4}$)
 (A) 57 (B) 53 (C) 37 (D) 31。

代碼：110tcb25
 (110 年統測 B)

- () 36. 已知 $i = \sqrt{-1}$ ， $(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i})^2 + (\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i})^2 = a+bi$ ，則 $a+b = ?$
 (A) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ (B) -1 (C) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ (D) 1 。

代碼：110tcc19
 (110 年統測 C)

- () 37. 某人由 A 處測量高塔塔頂 E 的仰角為 30° ，朝高塔方向前進 a 公尺至 B 處時測量塔頂 E 的仰角為 45° ，繼續朝高塔方向前進 b 公尺至 C 處時測量塔頂 E 的仰角為 60° ，如圖 (二) 所示，則 $\frac{a}{b} = ?$

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 。

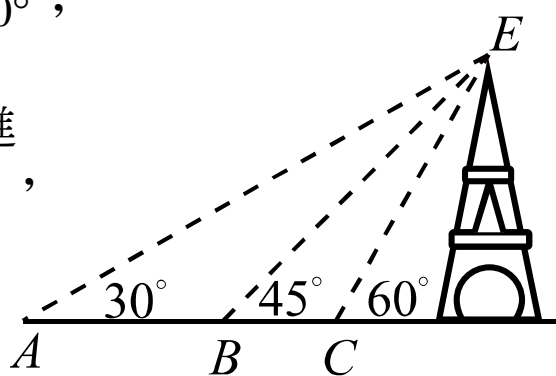
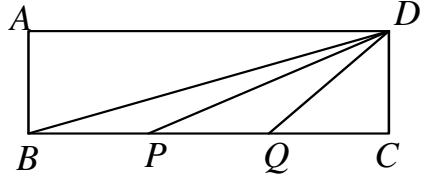


圖 (二)

代碼：111tcc12
 (111 年統測 C)

答案：BDBCC DDCCD ABADD CBDBA BCDCB CCCAD BABCB BA

綜合練習

- () 1. $\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = -\frac{7}{25}$, 求 $\sin C = ?$
 (A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{3}{11}$ (D) $\frac{4}{7}$ 。 代碼: t21218m1
- () 2. 設 $A(\cos 130^\circ, \sin 130^\circ)$ 、 $B(\cos 10^\circ, \sin 10^\circ)$, 求 $\overline{AB} = ?$
 (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2 。 代碼: t21252m1
- () 3. 設 $ABCD$ 為一矩形, 且 $\overline{BC} = 3\overline{AB}$ 。令 P 點與 Q 點為 $\overline{BC}$ 上之點, 且 $\overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$, 如右圖。若 $\angle DBC = \alpha$, 且 $\angle DPC = \beta$, 則 $\tan(\alpha + \beta) = ?$
 (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $2 - \sqrt{3}$ (C) 1 (D) $2 + \sqrt{3}$ 。  代碼: t21098k1
- () 4. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, 若 $\tan \theta = \frac{3}{4}$, 試求 $\cos 2\theta = ?$ (A) $\frac{7}{25}$ (B) $\frac{7}{16}$ (C) $\frac{9}{16}$ (D) $\frac{24}{25}$ 。 代碼: t22091k1
- () 5. $(1 - \tan 35^\circ)(1 - \tan 100^\circ) =$ (A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) -1 。 代碼: t23201m1
- () 6. 設 $\cos 10^\circ = a$, 則 $\sin 200^\circ = ?$
 (A) $-2\sqrt{1-a^2}$ (B) $-2a\sqrt{1-a^2}$ (C) $2\sqrt{1-a^2}$ (D) $2a\sqrt{1-a^2}$ 。 代碼: t22093k1
- () 7. 試求 $f(x) = 6\cos^2 x + 4\sin 2x$ 的最大值 (A) 2 (B) -2 (C) 8 (D) -8 。 代碼: t22226m1
- () 8. 求函數 $f(x) = (\cos x + 3\sin x)(\cos x - \sin x)$ 之最小值為何?
 (A) $-2\sqrt{5}$ (B) -4 (C) $-\frac{7}{2}$ (D) $-\sqrt{5} - 1$ 。 代碼: t23099k1
- () 9. 設 $L_1: 2x - 3y - 4 = 0$ 與 $L_2: 3x + y - 6 = 0$ 二直線的夾角為 θ , 則 $\sin \theta = ?$
 (A) $-\frac{11}{\sqrt{130}}$ (B) $\frac{11}{\sqrt{130}}$ (C) $-\frac{11}{3}$ (D) $\frac{11}{3}$ 。 代碼: g15204m1



- () 10. 某甲在平地上看一直立旗桿桿頂的仰角為 30° ，今某甲朝旗桿的方向前進 30 公尺後，再看同一旗桿桿頂的仰角為 60° ，則此時某甲離旗桿有多少公尺？ (A)12 (B)15 (C)18 (D) $15\sqrt{3}$ 。 代碼：t33093s1
- () 11. 一飛機在高度為 $600\sqrt{3}$ 公尺的水平面上等速東飛，地面上開始觀測飛機時仰角為 60° ，六秒後再觀測仰角只有 30° ，則飛機的速度為？ (A)100 (B) $200\sqrt{3}$ (C)200 (D) $100\sqrt{2}$ 公尺/秒。 代碼：t33208m1
- () 12. 有一測量員發現：當他從 A 點測量時，山是在他的東邊偏北 60° 且山的仰角為 45° ；若由 A 點向東行 200 公尺到 B 點測量時，則山在他的西邊偏北 60° 。試求山高是多少公尺？(若由低處觀測點仰望高處的目標時，則目標和觀測點的連線與水平線的夾角稱為仰角) (A)100 (B) $100\sqrt{2}$ (C) $100\sqrt{3}$ (D)200。 代碼：t33095k1
- () 13. 廣場上插了一支紅旗與一支白旗，小明站在兩支旗子之間。利用手邊的儀器，小明測出他與正東方紅旗間的距離為他與正西方白旗間距離的 6 倍；小明往正北方走了 10 公尺之後再測量一次，發現他與紅旗的距離變成他與白旗距離的 4 倍。試問紅白兩旗之間的距離最接近下列哪個選項？ (A)60 公尺 (B)65 公尺 (C)70 公尺 (D)75 公尺。 代碼：s15097c1
- () 14. 有 A、B 兩棟大樓，站在 A 棟樓頂觀測，測得 B 棟樓底俯角為 60° ，在 A 棟樓底觀測，測得 B 棟樓頂仰角為 75° ，已知 A 棟大樓的高度 60 公尺，試求 B 棟的高度。($\tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$) (A) $30(3 + \sqrt{3})$ (B) $20\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$ (C) $60(3 + \sqrt{3})$ (D) $60(1 + \sqrt{3})$ 。 代碼：s15205m1
- () 15. 設 i 為虛數單位，則 $\sin 73^\circ + i \cos 253^\circ$ 之極式為 (A) $\cos 17^\circ + i \sin 17^\circ$ (B) $\cos 73^\circ + i \sin 73^\circ$ (C) $\cos 253^\circ + i \sin 253^\circ$ (D) $\cos 343^\circ + i \sin 343^\circ$ 。 代碼：a83087x1
- () 16. 已知 $i = \sqrt{-1}$ ，求 $(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i})^{12} = ?$ (A) $-\frac{1}{64}$ (B) $\frac{1}{32}$ (C) $-\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{4}$ 。 代碼：a83090k1

答案：ACCAB BCDBB CDABD A

單元 9 指數與對數

主題一 指數的運算與指數函數



基礎數學 充電站

次方與指數：代碼 b04k01m1

以下題目的國中基礎運算，溫習一下吧～

1. 指數的定義及其運算：

(1) 定義：

① 正整數指數：設 $a \in R$ ， $n \in N$ ，則 $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 個}} = a^n$ ， a 稱為底數， n 稱為指數

② 零指數：設 $a \in R$ ， $a \neq 0$ ，則 $a^0 = 1$

(2) 指數律： $a > 0$ 、 $b > 0$ ， m 、 $n \in R$

$$\textcircled{1} \begin{cases} a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \end{cases} \quad \textcircled{2} (a^m)^n = a^{mn} \quad \textcircled{3} \begin{cases} (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \end{cases}$$

(3) 負指數：

設 $a \in R$ ， $a \neq 0$ ， $n \in N$ ，則 $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

例： $\frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$ 、 $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ 、 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ 、 $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27}$

(4) 分數指數：

設 $a \in R$ ， $a > 0$ ， $m, n \in N$ ，則 $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

例： $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ 、 $\sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$ 、 $\frac{1}{\sqrt[4]{27}} = 3^{-\frac{3}{4}}$ 、 $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{25}$ 、 $6^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$



老師講解

試化簡下列各式：

(1) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$ (2) $(0.25)^{-0.25}$



學生練習

試化簡下列各式：

(1) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$ (2) $\left(\frac{16}{81}\right)^{0.25}$ (3) $(0.064)^{-\frac{2}{3}}$

【代碼】 a41a03m2



老師講解

試化簡下列各式：

$$(1) \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot (\sqrt[4]{2})^8 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)^{-6}$$

$$(2) 27^{\frac{4}{3}} \times \sqrt{243 \div \sqrt[3]{81}}$$



學生練習

試化簡下列各式：

$$(1) (0.5)^2 \times (0.25)^{-3} \times (8)^{-\frac{1}{3}}$$

$$(2) 27^{\frac{2}{3}} \times \sqrt{729 \div \sqrt[3]{9}}$$

【代碼】 a41a03m3



老師講解

試化簡下列各式：

$$(1) \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \quad (2) \sqrt[4]{x^3 \sqrt{x} \div x^2}$$



學生練習

試化簡下列各式：

$$(1) \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} \quad (2) (\sqrt{a})^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{a^2}$$

$$(3) \left(\frac{\sqrt[4]{a^2 b^6} \cdot \sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a^2 b}} \right)^6$$

【代碼】 a41a03m4



老師講解

設 $67^x = 27$ ， $603^y = 81$ ，求 $\frac{3}{x} - \frac{4}{y}$ 之值。



學生練習

設 $\begin{cases} 171^x = 243 \\ 19^y = 9 \end{cases}$ ，求 $\frac{5}{x} - \frac{2}{y}$ 之值。

【代碼】a41b02m2



老師講解

設 $a > 0$ ，且 $a^{2x} = 3$ ，求 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 之值。



學生練習

設 $a^{2x} = 2$ ，求 $\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 之值。

【代碼】a41b04m2



老師講解

設 $a^x + a^{-x} = 3$ ，求 $a^{3x} + a^{-3x}$ 之值。



學生練習

設 $a^x + a^{-x} = 2$ ，求 $a^{3x} + a^{-3x}$ 之值。

【代碼】a41b05m2



2.指數函數：

(1) 定義：

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，對任意實數 x ，函數 $y = f(x) = a^x$ ，稱為以 a 為底的指數函數。

(2) 圖形：

項目	(1) $a > 1$	(2) $0 < a < 1$
圖型		
特徵	① 恆過(0,1) ② 圖形均在 x 軸之上方 ③ $a > 1$ 時， $y = a^x$ 為遞增函數 $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ ④ 以 x 軸之左側為漸近線	① 恆過(0,1) ② 圖形均在 x 軸之上方 ③ $0 < a < 1$ 時， $y = a^x$ 為遞減函數 $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ ④ 以 x 軸之右側為漸近線
(3) $y = a^x$ 與 $y = (\frac{1}{a})^x$ 之圖形對稱於 y 軸(如右圖)		



老師講解

比較下列各式之大小：

- (1) $a = \sqrt{5}$ ， $b = \sqrt{5\sqrt[3]{5}}$ ， $c = \sqrt[6]{25}$
- (2) $a = \sqrt{3}$ ， $b = \sqrt[3]{5}$ ， $c = \sqrt[4]{7}$
- (3) $a = (0.2)^{\frac{1}{3}}$ ， $b = (0.04)^{\frac{1}{5}}$ ， $c = (0.008)^{\frac{1}{7}}$



學生練習

試求出下列各式何者最小：

- (1) (A) $\sqrt[4]{125}$ (B) $\sqrt[5]{(125)^2}$ (C) $\sqrt[3]{25}$
- (2) (A) $\sqrt[4]{2}$ (B) $\sqrt[6]{3}$ (C) $\sqrt[8]{5}$ (D) $\sqrt[12]{12}$

【代碼】 a42a02m3

(3) 指數方程式：若 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，則 $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$



老師講解

求解出下列各式之 x 值：

$$(1) 3^{x+2} = \left(\frac{1}{81}\right)^3 \quad (2) \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+3}$$



8

學生練習

求方程式 $(2^{4-x})^x = 8$ 的所有解總和。

【代碼】a42b01m2



老師講解

已知 $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$ ，求出 x 之值。



9

學生練習

求方程式 $3^{2x} - 3^{x+1} - 54 = 0$ 之解。

【代碼】a42b02m2



老師講解

已知 $15^x - 2 \cdot 3^x + 3 \cdot 5^x - 6 = 0$ ，
求出 5^{x+2} 之值。



10

學生練習

解方程式 $6^x - 4 \cdot 3^x + 2^x - 4 = 0$ 。

【代碼】a42b03m2



(4) 指數不等式：

若 $a > 0$ ， $a \neq 1$ ，則 $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

- ① $a > 1$ 時 $\Rightarrow f(x) > g(x)$
- ② $0 < a < 1$ 時 $\Rightarrow f(x) < g(x)$



老師講解

設 $2^{x^2-x} < 8^{x+4}$ ，求 x 的範圍。



學生練習

設 $3^{-x} < 9^{3-x^2}$ ，求滿足 x 的最大整數之值。

【代碼】 a42a03m3



老師講解

解指數不等式 $(0.3)^{x^2-3x-2} > 0.09$ 。



學生練習

解指數不等式 $(0.2)^{-2x} > (0.04)^{3x+1}$ 。

【代碼】 a42a03m4

【學生練習答案】

1. (1) $\frac{4}{9}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{25}{4}$	2 (1) 8 (2) $3^{\frac{14}{3}}$	3 (1) a (2) a (3) b^7	4 2
5. $\frac{3}{2}$	6. 2	7. (1)(C) (2)(A)	8. 4
9. 2	10. 2	11. 1	12. $x > -\frac{1}{4}$

回家功課

- () 1. 試求 $(0.0625)^{-1.5} = ?$
(A) 4 (B) 16 (C) 64 (D) 128 。 代碼：a41094h1
- () 2. 設 $\sqrt[3]{81^4 \sqrt{729 \div \sqrt[3]{81}}} = 3^x$ ，則 x 等於
(A) $\frac{31}{36}$ (B) $\frac{25}{36}$ (C) $\frac{25}{18}$ (D) $\frac{31}{18}$ 。 代碼：a41203m1
- () 3. 若 x, y, z 為有理數，且 $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z = 6^{\frac{1}{3}} \cdot 15^{\frac{1}{4}} \cdot 20^{-\frac{1}{2}}$ ，則 $x \cdot y \cdot z =$
(A) $-\frac{1}{24}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{7}{36}$ (D) $\frac{7}{72}$ 。 代碼：a41088f1
- () 4. 已知 $f(x) = 3^x$ ，若 $f(a) = 2$ 且 $f(b) = 4$ ，則 $f(a+b) = ?$
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 。 代碼：a41093h1
- () 5. 設 $3^\alpha, 3^\beta$ 為方程式 $x^2 - x + \frac{1}{81} = 0$ 的兩根，則 $\alpha + \beta = ?$
(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4 。 代碼：a41098k1
- () 6. 已知 $a > 0$ 且 $a^{2x} = 3$ ，試求 $a^{3x} + a^{-3x} =$
(A) $3\sqrt{3}$ (B) $\frac{28\sqrt{3}}{9}$ (C) $\frac{26\sqrt{3}}{9}$ (D) $4\sqrt{3}$ 。 代碼：a41b03m1
- () 7. 設 $x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 5$ ，則 $x + \frac{1}{x} = ?$
(A) 21 (B) 23 (C) 25 (D) 27 。 代碼：a41092w1
- () 8. 已知 $y = 2^{\sin^2 \theta}$ ，則 y 的最小值為
(A) $\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) 1 (D) 2 。 代碼：a41206m1
- () 9. 方程式 $2^{x^2} \cdot 4^x \cdot 16 = 8^x \cdot 64$ 的所有解總和為何？
(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) -2 。 代碼：a42090h1
- () 10. 若方程式 $2^{2x} - 2^{x+1} - 8 = 0$ ，則 $x = ?$
(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2 。 代碼：a42096w1
- () 11. 解方程式 $16^x - 4^x - 2 = 0$ ，則 $x = ?$
(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 。 代碼：a42099s1

答案：CDDDA BDCAD C



主題二 對數的運算與對數函數

1. 對數的定義及其運算：

(1) 定義：

若 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ ，且 $b > 0$ ，當 $a^x = b$ 時，我們以 $\log_a b$ 來表示 x (即 $\log_a b = x$)，其中 a 稱為『底數』， b 稱為『真數』， $\log_a b$ 稱為『以 a 為底時 b 的對數』。

(2) 觀念整理：

① 指數與對數的轉換： $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$

② $\log_a b$ 有意義 $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{底數: } a > 0, a \neq 1 \\ \text{真數: } b > 0 \end{cases}$

③ 當底數 $a = 10$ 時可以省略不寫，稱為常用對數。(例： $\log_{10} 2 = \log 2$)

(3) 對數的運算性質：

若 a 、 b 、 c 皆為異於 1 的正實數，且 m 、 n 為正實數：

$$\textcircled{1} \begin{cases} \log_a a = 1 \\ \log_a 1 = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \log_a m + \log_a n = \log_a mn \\ \log_a m - \log_a n = \log_a \frac{m}{n} \\ \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b \end{cases}$$



老師講解

試求 $\log_8 (32)^2 + \log_{10} \sqrt[3]{100} + \log_{\sqrt{6}} 36$ 之值。



學生練習

試求 $\log_2 \sqrt{2} + \log_5 \sqrt[3]{25} + \log_8 \frac{1}{2}$ 之值。

【代碼】a43a02m3



老師講解

試求 $2\log_2 6 + \log_2 12 - 3\log_2 3$ 之值。



學生練習

試求 $\log_2 6 + \log_2 12 - 2\log_2 3$ 之值。

【代碼】a43a02m5



老師講解

試求 $\frac{1}{3}\log_3\left(\frac{2}{9}\right)^9 - \frac{1}{2}\log_3\left(\frac{10}{3}\right)^4 + \log_3\left(\frac{25}{6}\right)$ 之值。



學生練習

試求 $\frac{1 + \frac{1}{4}\log_{10} 81 - \frac{1}{2}\log_{10} 25}{\frac{1}{4}\log_{10} 16 + \frac{1}{4}\log_{10} 81}$ 之值。

【代碼】a43b02m2

$$\textcircled{3} \text{換底公式: } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \Rightarrow \text{應用} \begin{cases} \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \\ \frac{1}{\log_a b} = \log_b a \\ a^{\log_a b} = b \end{cases}$$



老師講解

試求 $\log_9 7 \cdot \log_{49} 8 \cdot \log_4 27$ 之值。



學生練習

試求 $(\log_{\frac{1}{9}} 8) \cdot (\log_{16} 27)$ 之值。

【代碼】a43a03m2



老師講解

試求 $5^{3\log_5 2} + 2^{\frac{\log 5}{\log 2}} + 3^{\frac{1}{\log_2 3}}$ 之值。



學生練習

試求 $2^{2\log_2 5} - 3^{\frac{\log 25}{\log 3}} + 11^{\frac{1}{\log_2 11}}$ 之值。

【代碼】a43a03m4



老師講解

設 $\log 2 = p$ ， $\log 3 = q$ ，試求 10^{p+2q+1} 之值。



學生練習

設 $x = \log 3$ ， $y = \log 5$ ，試求 10^{2x+y} 之值。

【代碼】a43b03m2



老師講解

試求 $\log_3(\log_2 7) + \log_3(\log_7 8)$ 之值。



學生練習

試求 $\log_4(\log_7 25) + \log_4(\log_5 7)$ 之值。

【代碼】a43b04m2



老師講解

試求 $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$ 之值。



學生練習

試求 $(\log_7 4 + \log_7 8)(\log_4 7 + \log_8 7)$ 之值。

【代碼】a43b05m2



老師講解

試求 $(\log 2)^3 + (\log 5)^3 + 3\log 2 \log 5$ 之值。



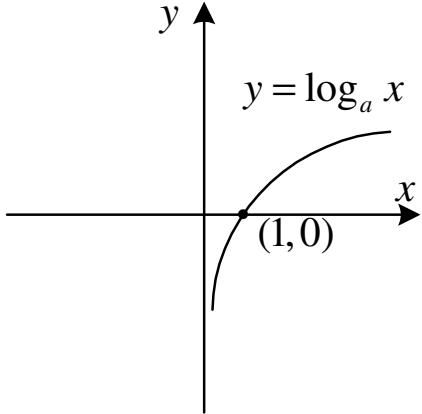
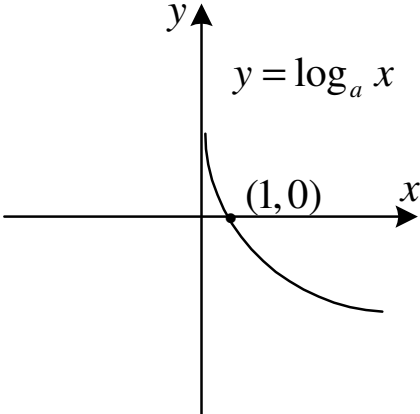
學生練習

$(\log 2)^2 + (\log 5)^2 + 2\log 2 \log 5 = ?$

【代碼】a43b06m2

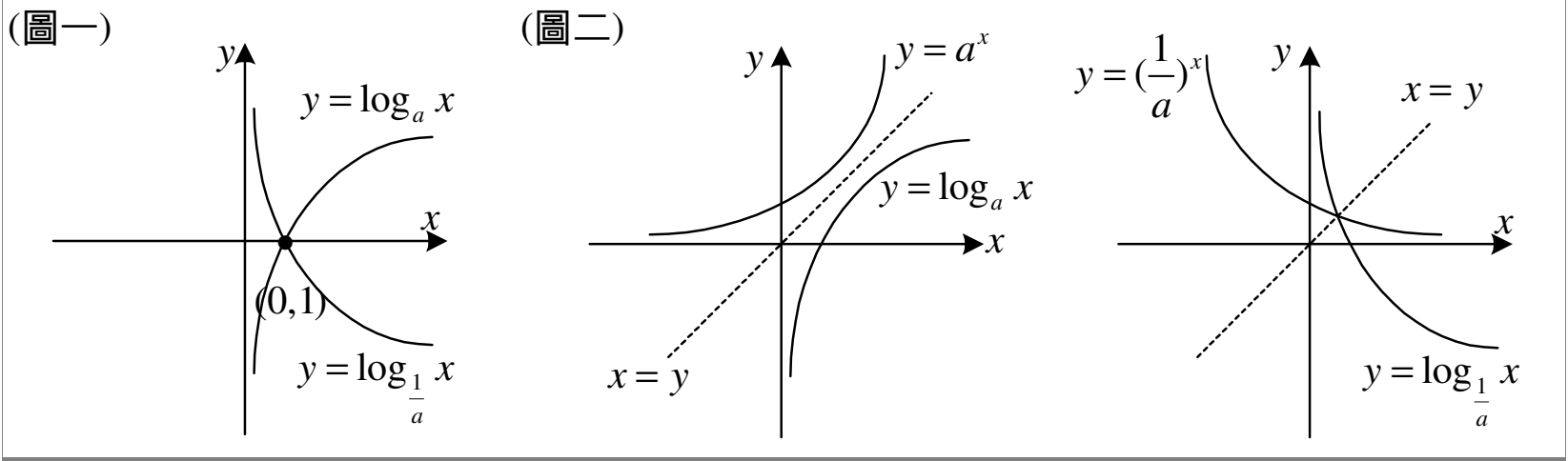
2.對數函數：

- (1) 定義：
- 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，對任意正實數 x ，函數 $y = f(x) = \log_a x$ ，稱為以 a 為底的對數函數。
- (2) 圖形：

項目	(1) $a > 1$	(2) $0 < a < 1$
圖型		
特徵	① 恆過 (1, 0) ② 圖形均在 y 軸之右方 ③ $a > 1$ ， $y = \log_a x$ 遞增函數， $x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$ ④ 以 y 軸為漸近線	① 恆過 (1, 0) ② 圖形均在 y 軸之右方 ③ $0 < a < 1$ ， $y = \log_a x$ 為遞減函數， $x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$ ④ 以 y 軸為漸近線

(3) $y = \log_a x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 之圖形對稱於 x 軸(如圖一)

(4) $y = \log_a x$ 與 $y = a^x$ 互為反函數，圖形對稱於 $x = y$ (如圖二)





老師講解

試比較下列各式之大小：

(1) $a = 1.5$ 、 $b = 2\log_3 2$ 、 $c = \log_9 8$

(2) $a = 3$ 、 $b = \log_5 50$ 、 $c = \log_2 10$



學生練習

試比較 a, b, c 之大小：

$a = \frac{3}{2}$ 、 $b = \frac{4}{3}\log_{25} 27$ 、 $c = \log_5 10$

【代碼】a44a02m3

$$(3) \text{ 對數方程式： } \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}, (a > 0, a \neq 1)$$



老師講解

求下列各式中之 x 值： (1) $\log_{\frac{1}{27}} x = -\frac{1}{3}$

(2) $\log_x \sqrt[4]{8} = \frac{3}{4}$ (3) $\log_x 27 = -\frac{3}{2}$



學生練習

求下列各式中之 x 值： (1) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$

(2) $\log_x \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3}$ (3) $\log_x 25 = \frac{4}{3}$

【代碼】a44a03m2



老師講解

解方程式 $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3$ 。



學生練習

解方程式 $\log_2(x+2) + \log_2(x-1) = 2$ 。

【代碼】 a44a03m4



老師講解

解方程式 $(\log_2 x)^2 + \log_2 x^2 - 3 = 0$ 。



學生練習

解方程式 $(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0$ 。

【代碼】 a44b02m2



老師講解

解方程式 $x^{\log_3 x} = 9x$ 。



學生練習

設 $x^{\log_2 x} = \frac{x^5}{64}$ 有二根，試求二根之和。

【代碼】 a44b03m2



(4) 對數不等式：

log_a f(x) > log_a g(x) (f(x) > 0 , g(x) > 0)

① a > 1 => f(x) > g(x)

② 0 < a < 1 => f(x) < g(x)



老師講解

求 log_2 (x^2 - 4x) < 5 的所有整數解總和。



學生練習

解不等式 log x + log(x - 3) < 1。

【代碼】 a44a04m2



老師講解

解不等式 log_{1/2} (x - 1) > log_{1/2} (3 - x)。



學生練習

解不等式 log_{1/3} (2x - 3) > log_{1/3} (6 - x)。

【代碼】 a44a04m3

【學生練習答案】

Table with 4 columns and 4 rows of answers to exercises.

回家功課

() 1. 求 $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{125}} \frac{1}{5} + \log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{3} =$ 。

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

代碼：a43b01m1

() 2. 設 a, b, c 均為異於 1 的正數，且滿足 $abc = 1$ ，則 $\log_a b + \log_a c + \log_b c + \log_b a + \log_c b + \log_c a$ 之值為何？

(A) 3 (B) 1 (C) -3 (D) -6 。

代碼：a43098s1

() 3. 設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，若 $a^x = 3$ ， $a^y = 7$ ，則 $\log_a 21$ 之值為：

(A) $x \cdot y$ (B) $x + y$ (C) $\frac{y}{x}$ (D) $x - y$ (E) x^y 。

代碼：a43089g1

() 4. $\frac{\log_8 3 + \log_8 9}{\log_2 3 + \log_4 9} =$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$ 。

代碼：a43090h1

() 5. 試求 $(\log_3 4)(\log_2 3 + \log_8 27) = ?$

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 。

代碼：a43094w1

() 6. 設 m, n 為大於 1 的實數，若 $\frac{\log_2 m}{\log_2 n} = 3$ ，則 $\log_m n = ?$

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 3 。

代碼：a43095s1

() 7. 設 $\log_{10} x = \frac{1}{3}$ ，則 $\log_{10}(10x) = ?$

(A) $\frac{1}{30}$ (B) 1 (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{10}{3}$ 。

代碼：a43093h1

() 8. 已知 $a = 2^{\log_2 4}$ ， $b = 8^{\frac{1}{2}}$ ， $c = \log_2 10$ ，則此三數的大小關係為何？

(A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $c > a > b$ (D) $c > b > a$ 。

代碼：a44096h2

() 9. $\log_x 8\sqrt{2} = \frac{7}{2}$ ，則 $x = ?$

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) 7 (D) 8 。

代碼：a44090s1

() 10. 若 $2\log \sqrt{3x} = 4\log 2 + 2\log \sqrt{2}$ ，則 $x = ?$

(A) 3 (B) 4 (C) $\frac{16}{3}$ (D) $\frac{32}{3}$ 。

代碼：a44097w2



- () 11. 設方程式 $\log_2(x^2 - 5x + 12) = 1 + \log_2 x$ 的根為 a 、 b ，則 $a + b = ?$
(A) -5 (B) 5 (C) -7 (D) 7。

代碼：a44096s1

- () 12. 解方程式 $\log_4 x^2 + 2\log_{\frac{1}{2}} x = 3$ ，則 $x =$ (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{4}$ 。

代碼：a44b01m1

- () 13. $x \in R$ ，求滿足不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{4}}(2x+1)$ 之 x 的範圍
(A) $1 < x < 4$ (B) $0 < x < 4$ (C) $-\frac{1}{2} < x < 3$ (D) $x > 4$ 。

代碼：a44088y1

- () 14. 若 $\log_2 x + \log_2 y = 1$ 且 $x^2 + y^2 = 117$ ，則 $x + y = ?$
(A) 11 (B) 12 (C) 121 (D) 144。

代碼：a44095w2

- () 15. 設 α 、 β 為方程式 $\log_2 x = \log_x 2$ 的兩根，則 $\alpha^3 + \alpha\beta + \beta^3 = ?$
(A) $\frac{55}{8}$ (B) $\frac{57}{8}$ (C) $\frac{71}{8}$ (D) $\frac{73}{8}$ 。

代碼：a44091s1

答案：ACBAB BCBBD DBAAD

主題三 常用對數與其應用

1. 對數值：

$$\log 2 = 0.3010$$

$$\log 3 = 0.4771$$

$$\log 4 = 2\log 2$$

$$\log 5 = 1 - \log 2$$

$$\log 6 = \log 2 + \log 3$$

$$\log 7 = 0.8451$$

$$\log 8 = 3\log 2$$

$$\log 9 = 2\log 3$$



老師講解

已知 $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$ ，
求 $\log_2 60$ 最接近的整數為何？



學生練習

已知 $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$ ，
求 $\log_3 240$ 最接近的整數為何？

【代碼】a45a01m2



老師講解

設 $\log 2 = a$ 、 $\log 3 = b$ ，試以 a 、 b 表示：
(1) $\log_5 24$ (2) $\log_2 1080$



學生練習

設 $\log_c 2 = a$ ， $\log_c 3 = b$ ，
試以 a 、 b 表示 $\log_c 72$ 。

【代碼】a45a01m3



2. 位數：

若 $\log x = n + a$ ， n 為整數， a 為正的純小數，則 n 稱為 $\log x$ 的首數， a 稱為尾數

(1) $x > 1$ 時 $\Rightarrow x$ 為 $n+1$ 位數

(2) $0 < x < 1$ 時 $\Rightarrow x$ 在小數點後第 $|n|$ 位始不為 0



老師講解

若 $\log 1.2 = 0.0791$ ，試求下列各式之值：

(1) $\log 1200$ (2) $\log 0.00012$



學生練習

若 $\log 5.566 = 0.7456$ ，試求下列各式之值：

(1) $\log 55660$ (2) $\log 0.005566$

【代碼】 a45a02m2



老師講解

若 $\log 2 = 0.3010$ ，求 2^{45} 展開後是幾位數？



學生練習

若 $\log 3 = 0.4771$ ，求 3^{100} 展開後是幾位數？

【代碼】 a45a03m2



老師講解

已知 $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$ ，
 $\frac{1}{6^{20}}$ 乘開後小數點下第幾位不為零？



學生練習

已知 $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$ ，
 將 $(\frac{2}{3})^{40}$ 化成小數，則從小數點以下
 第幾位起，開始出現異於 0 的數字？

【代碼】a45a03m3



老師講解

已知 $\log 2 = 0.3010$ ，且 $(0.4)^n < 0.01$ ，
 求 n 的最小正整數解。



學生練習

已知 $\log_{10} 3 = 0.4771$ ， $(\frac{1}{3})^n < 10^{-4}$ ，
 求最小整數 n 之值。

【代碼】a45b04m2



【加強題】

1. 設 $x, y, z > 1$, $a > 0$, 已知 $\log_x a = 20$, $\log_y a = 30$, $\log_{xyz} a = 4$, 則 $\log_z a =$ _____ 。
2. 設 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 均為實數 , 若 $3^{x_1} = 4$, $4^{x_2} = 5$, $5^{x_3} = 6$, $6^{x_4} = 7$, $7^{x_5} = 8$, $8^{x_6} = 9$, 則此六數 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 乘積之值為 _____ 。
3. 若 $(\log x)^2 - 2\log x - \sqrt{12} = 0$ 之二根為 α, β , 求 $\alpha\beta =$ _____ 。
4. 若 $\log_9 x + \log_3 y = 1$, 則 $3x + 2y$ 最小值為 _____ 。
5. 若 $\log \log_{\frac{1}{3}} \log_2 x$ 有意義 , 則 x 的範圍為 _____ 。

【學生練習答案】

1. 5	2. $3a + 2b$	3. (1) 4.7456 (2) -2.2546	4. 48
5. 8	6. 9		

回家功課

- () 1. 設 $a = \log_{10} 2$ ， $b = \log_{10} 3$ ，若以 a 、 b 表示 $\log_{10} 15$ ，則 $\log_{10} 15 = ?$
 (A) $a - b - 1$ (B) $a + b - 1$ (C) $-a + b + 1$ (D) $a + b + 1$ 。
- 代碼：a45092h1
- () 2. 設 $\log_{10} 2 = a$ ，則 $\log_2 5 = ?$
 (A) $2a$ (B) $\frac{1}{a}$ (C) $\frac{a}{1-a}$ (D) $\frac{1-a}{a}$ 。
- 代碼：a45098w1
- () 3. 令 $\log_{10} 25 = a$ ，則 $\log_{10} 2$ 之值為
 (A) $1 + \frac{a}{2}$ (B) $1 - \frac{a}{2}$ (C) $1 + a$ (D) $1 - a$ 。
- 代碼：a45211m1
- () 4. $\log_{10} 0.0436$ 之首數為何？
 (A) -3 (B) -2 (C) -1 (D) 0 。
- 代碼：a45092w1
- () 5. 已知 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ， 2^{45} 為幾位數？
 (A) 14 (B) 18 (C) 20 (D) 19 位數。
- 代碼：a45206m1
- () 6. 已知 $\log 2 = 0.3010$ ， $(\frac{1}{2})^{40}$ 的值，從小數點後第 n 位開始出現不為 0 的數，則 n 的值為何？
 (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 。
- 代碼：a45207m1
- () 7. 已知 $2^n > 10^7$ ，求 n 的最小正整數解為
 (A) 22 (B) 23 (C) 24 (D) 25 。
- 代碼：a45218m1
- () 8. 設某種細菌，每 10 秒鐘自我分裂一次，得 2 倍的細菌數。若有 25 個細菌，欲使其繁殖的總數超過 200 萬個，問從分裂開始，至少要多少時間後才可達到此數目？(已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$)
 (A) 140 (B) 150 (C) 160 (D) 170 秒。
- 代碼：a45088x1

答案：CDBBA ACD



歷屆試題

- () 1. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ，則 $\log(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6)$ 的值與下列何者最接近？ (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。
代碼：a45100s1
(100 年統測 B)
- () 2. 若 $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[5]{64} = 4^a$ ，則 $a = ?$ (A) $\frac{19}{20}$ (B) $\frac{29}{30}$ (C) $\frac{19}{10}$ (D) $\frac{29}{15}$ 。
代碼：a41100k1
(100 年統測 C)
- () 3. 求 $\log_{\sqrt{2}} \frac{3}{2} - \log_2 \frac{27}{160\sqrt{2}} + \log_4 \frac{36}{25} = ?$ (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{9}{2}$ (D) $\frac{11}{2}$ 。
代碼：a43100k1
(100 年統測 C)
- () 4. 求 $\log_{0.1} \sqrt{1000} - \log_9 \sqrt{27}$ 之值？ (A) $\frac{9}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{9}{4}$ 。
代碼：a43101s1
(101 年統測 B)
- () 5. 已知 $3^x = 2$ ，則 27^{-x} 之值為何？ (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{16}$ 。
代碼：a41101s1
(101 年統測 B)
- () 6. 下列何者與 $\log 1 + \log 2 + \log 3 + \log 4 + \log 5 - \log 6$ 的值最為接近？
(已知 $\log 2$ 的值約為 0.301，而 $\log 3$ 的值約為 0.4771)
(A) 0.1 (B) 1.5 (C) 5.3 (D) 6.2。
代碼：a45101k1
(101 年統測 C)
- () 7. 已知 $a = \frac{2}{\sqrt[4]{8}}$ 、 $b = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}$ ，則下列敘述何者為真？
(A) $a \cdot b < 2$ (B) $a + b < 2$ (C) $a < b$ (D) $b^3 < a^2$ 。
代碼：a41102s1
(102 年統測 B)
- () 8. 若 $\log_{10} 2 = x$ 、 $\log_{10} 3 = y$ ，則 $\log_{12} 15$ 等於下列哪一式？
(A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{x+y-1}{x+2y}$ (C) $\frac{x-y+1}{2x+y}$ (D) $\frac{y+1-x}{2x+y}$ 。
代碼：a45102s1
(102 年統測 B)
- () 9. 若 $3^{x+2} = 3^x + 24\sqrt{3}$ ，則 $x = ?$ (A) $-\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2。
代碼：a42102k1
(102 年統測 C)
- () 10. 已知 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $a \neq 1$ 。若 $a^5 = b^3$ ，則 $\log_a b = ?$
(A) $-\frac{5}{3}$ (B) $-\frac{3}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{5}{3}$ 。
代碼：a43102k1
(102 年統測 C)

() 11. 設 $49^x + 5 \cdot 7^x - 24 = 0$ ，則 $7^{x+1} = ?$ (A) 10 (B) 14 (C) 21 (D) 28。

代碼：a42103s1
(103 年統測 B)

() 12. 求 $\frac{\log_5 \sqrt{2} \cdot \log_7 9}{\log_5 (\frac{1}{3}) \cdot \log_7 \sqrt[3]{4}} = ?$ (A) $\frac{-5}{2}$ (B) $\frac{-3}{2}$ (C) $\frac{-2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$ 。

代碼：a43103s1
(103 年統測 B)

() 13. 化簡 $\frac{2 + \log_{10} 4 - \frac{1}{3} \log_{10} 216 + \frac{1}{4} \log_{10} 625 + \frac{1}{5} \log_{10} 243}{1 + \log_2 \frac{5}{3} + \log_2 \frac{6}{5} + \log_2 \frac{7}{6} + 3 \log_8 \frac{8}{7} + 2 \log_4 \frac{9}{8} - \log_4 9}$
(A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) 3。

代碼：a43103k2
(103 年統測 C)

() 14. 設 $(\frac{1}{2})^a = \frac{1}{70}$ ， $(\frac{1}{4})^b = \frac{1}{2500}$ ， $(\frac{1}{8})^c = \frac{1}{216000}$ ，則 a 、 b 、 c 三個數的大小關係為何？
(A) $b < c < a$ (B) $c < b < a$ (C) $c < a < b$ (D) $a < b < c$ 。

代碼：a43103k1
(103 年統測 C)

() 15. 下列何者可為不等式 $\log_2 x^2 < \log_2 (4x - 3)$ 的解？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。

代碼：a44104s1
(104 年統測 B)

() 16. 已知 m 、 n 為整數，若 $m \log_{500} 5 + n \log_{500} \sqrt{2} = 1$ ，則 $m + n = ?$
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10。

代碼：a44104k1
(104 年統測 C)

() 17. 已知 a, b 為實數，且 $3^a = 5$ ， $5^b = 9$ ，則 $ab = ?$
(A) $\log_{15} 45$ (B) $\log_3 5$ (C) 2 (D) 3。

代碼：a41104k1
(104 年統測 C)

() 18. $\log 2 = a$ ， $\log 7 = b$ ，則 $\log 35$ 等於下列何者？
(A) $1 + a + b$ (B) $1 + a - b$ (C) $1 - a - b$ (D) $1 - a + b$ 。

代碼：a45105s1
(105 年統測 B)

() 19. 已知 $A = (\frac{729}{1000})^{\frac{2}{3}} - (\frac{27}{343})^{\frac{1}{3}} + (5\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}}$ ，則 A 之值為何？
(A) $\frac{79}{100}$ (B) $\frac{80}{100}$ (C) $\frac{81}{100}$ (D) $\frac{82}{100}$ 。

代碼：a41105s1
(105 年統測 B)

() 20. 已知 $\log_{10} 2 = p$ ， $\log_{10} 3 = q$ ，求 $\log_{\sqrt[6]{6}} 36 - \log_{\frac{1}{6}} 6 + \log_6 \sqrt{12}$ 之值
(A) $5 + \frac{2p+q}{2p+2q}$ (B) $3 + \frac{2p+q}{2p+2q}$ (C) $3 + \frac{2p+q}{2p-2q}$ (D) $5 + \frac{2p+q}{2p-2q}$ 。

代碼：a43105k1
(105 年統測 C)



- () 21. 設 $a = (0.1)^{\frac{1}{4}}$, $b = (0.2)^{\frac{1}{4}}$, $c = (0.2)^{\frac{1}{5}}$, 則下列何者正確?
(A) $a < b < c$ (B) $c < a < b$ (C) $b < a < c$ (D) $b < c < a$ 。
代碼：a42105k1
(105 年統測 C)
- () 22. 求 $(0.027)^{\frac{2}{3}} + (\frac{243}{32})^{\frac{1}{5}}$ 的值 (A) $\frac{3}{32}$ (B) $\frac{159}{100}$ (C) $\frac{12}{5}$ (D) $\frac{81}{32}$ 。
代碼：a41106s1
(106 年統測 B)
- () 23. 求 $(\log 2)^2 + \log 2 \cdot \log 5 + \log 5$ 的數值 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 。
代碼：a45106s1
(106 年統測 B)
- () 24. 設 $a = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$, $b = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$, $c = (\frac{1}{6})^{\frac{1}{6}}$, 則 a 、 b 、 c 大小順序為何?
(A) $a > c > b$ (B) $a > b > c$ (C) $c > a > b$ (D) $b > c > a$ 。
代碼：a42106k1
(106 年統測 C)
- () 25. 已知 $\log_{10} 3 = 0.4771$ 且 $x = (\frac{1}{3})^{20}$, 其中 $\log_{10} x$ 的首數為 m ,
而尾數的小數點後第一位數字為 n , 則 $m + n = ?$
(A) -9 (B) -7 (C) -6 (D) -5 。
代碼：a45106k1
(106 年統測 C)
- () 26. 若 $2^4 \times 4^{3x} \times 8^2 = 16^x \times 32$, 則 $x = ?$
(A) -3 (B) -2.5 (C) 2.5 (D) 3 。
代碼：a42107s1
(107 年統測 B)
- () 27. 已知 $\log 2$ 之近似值為 0.3010 。若 $2^x = 10$, 則 x 之值最接近下列何者?
(A) 3.16 (B) 3.23 (C) 3.32 (D) 3.52 。
代碼：a45107s1
(107 年統測 B)
- () 28. 若 $x = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 9}$, 則 $81^x = ?$ (A) 3 (B) 7 (C) 25 (D) 49 。
代碼：a43107k1
(107 年統測 C)
- () 29. 設 $a = \log_{0.3} 0.5$ 、 $b = \log_3 5$ 、 $c = \log_{30} 50$, 則 a 、 b 、 c 大小順序為何?
(A) $c > b > a$ (B) $b > a > c$ (C) $b > c > a$ (D) $a > b > c$ 。
代碼：a44107k1
(107 年統測 C)
- () 30. 下列何值與 $\log_2 5$ 相等?
(A) $\log 5 - \log 2$ (B) $\log(\frac{5}{2})$ (C) $\frac{\log 50}{\log 20}$ (D) $\frac{\log 25}{\log 4}$ 。
代碼：p43108s1
(108 年統測 B)
- () 31. 設 $(3^m)^3 = 729$ 且 $4^{n-m} = \frac{1}{256}$, 則 $m + n = ?$
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 。
代碼：a42108s1
(108 年統測 B)

() 32. 若 $3 < \log_{0.5}(2x+1) < 4$ ，則 x 的範圍為何？

- (A) $-\frac{3}{8} < x < -\frac{1}{4}$ (B) $-\frac{7}{16} < x < -\frac{3}{8}$
(C) $-\frac{15}{32} < x < -\frac{7}{16}$ (D) $-\frac{31}{64} < x < -\frac{15}{32}$ 。

代碼：a44108k1

(108 年統測 C)

() 33. 已知 $\log_4(4^x - 2^x + 52) = x + 1$ ，試問 $\log(x^2 \cdot 5^x) = ?$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。

代碼：a44108k2

(108 年統測 C)

() 34. 2^{1000} 大約等於下列何者？

- (A) 10^{100} (B) 10^{200} (C) 10^{300} (D) 10^{400} 。

代碼：a45109s1

(109 年統測 B)

() 35. 若 $a + a^{-1} = 2$ ，則 $a^3 + a^{-3} = ?$

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8。

代碼：a41109s1

(109 年統測 B)

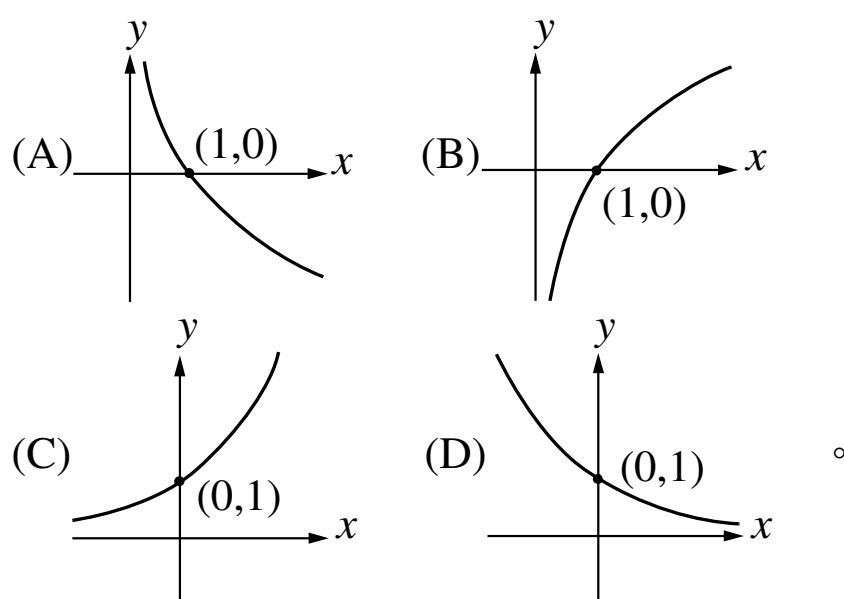
() 36. 滿足 $\log_{10-x^2}(x^2 + 3x + 2)$ 有意義的整數 x 共有多少個？

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7。

代碼：a44109k1

(109 年統測 C)

() 37. 若 $f(x) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ ，則下列何者為 $f(x)$ 之圖形？



代碼：110tcb01

(110 年統測 B)

() 38. 若 $a = \log 2$ ， $b = \log 3$ ，則 $10^{2a+b} = ?$

- (A) 2 (B) 3 (C) 12 (D) 24。

代碼：110tcb06

(110 年統測 B)

() 39. 設 $I(t)$ 為 A 城市某種傳染病在時間 t 的感染率，

且 $I(t) = \frac{1}{1 + 49(7^{\frac{-t}{3}})}$ ， $t \geq 0$ 。若 a 、 b 、 c 分別表示 $t=0$ 、 $t=3$ 、 $t=6$ 時

的感染率，則下列何者正確？

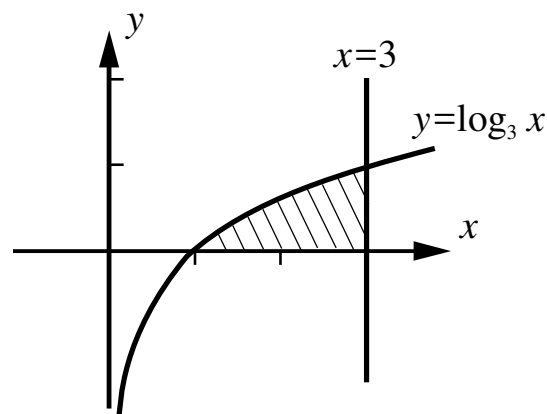
- (A) $b = 6a$ (B) $c = 20a$ (C) $c = 4b$ (D) $b = 7a$ 。

代碼：110tcc07

(110 年統測 C)



- () 40. 假設 A 表函數 $y = \log_3 x$ 圖形與直線 $y=0$ 、 $x=3$ 所圍區域面積，如圖(一)。若以幾何圖形的觀念來判斷 A 的大小範圍，則下列何者正確？



- (A) $0 \leq A < \frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2} \leq A < 1$
(C) $1 \leq A < 2$ (D) $A \geq 2$ 。

圖(一)

代碼：110tcc25
(110 年統測 C)

- () 41. 設 $f(x) = \log_3 x$ 。若 $f(a) = 6$ 、 $f(b) = 2$ 且 $f(c) = 5$ ，則 $f(\frac{\sqrt[3]{a} \times b^2}{c}) = ?$
(A) 6 (B) 5 (C) 2 (D) 1。

代碼：111tcb10
(111 年統測 B)

- () 42. 某日課堂上，老師對學生勉勵：「若每天增加百分之一的功力，則一年後至少會增加三十六倍的可觀效應；反之，每天減少百分之一的功力，則一年後至少流失現今功力的九成七」，這段勉勵運用了指數函數成長及衰退的概念，其數學上的表達最貼切下列哪一個選項？
(A) $1.01^{365} \geq 37$ 且 $0.99^{365} \leq 0.03$
(B) $365^{1.01} \leq 37$ 且 $365^{0.99} \geq 0.03$
(C) $1.01^{365} \geq 63$ 且 $0.99^{365} \leq 0.97$
(D) $365^{1.01} \leq 63$ 且 $365^{0.99} \geq 0.97$ 。

代碼：111tcb18
(111 年統測 B)

- () 43. 若 $x = \log_3 7$ ，則下列何者正確？
(A) $7^x = 3$ (B) $3^x = 7$ (C) $x^7 = 3$ (D) $x^3 = 7$ 。

代碼：111tcc01
(111 年統測 C)

- () 44. 爲了響應節能減碳政策，某公司基於成本考量決定在六年後將公司該年二氧化碳排放量降爲目前排放量的 50%。公司希望每年依固定的比率 r (當年和前一年排放量的比) 逐年降低二氧化碳的排放量。若要達到這項目標，則下列敘述何者正確？
(參考數值： $\log 0.5 \approx -0.301$ 、 $\log 8.91 \approx 0.950$)
(A) $0.91 < r < 0.93$ (B) $0.88 < r < 0.91$ (C) $0.85 < r < 0.88$
(D) $0.82 < r < 0.85$ 。

代碼：111tcc21
(111 年統測 C)

答案： BACDC BADCD CBDAB ACDCA ABDCC BCD CD BCACA ADCCC
DABB

綜合練習

- () 1. 已知 x, y 為整數且滿足 $8^x(\sqrt{6})^y = 2^9 3^3$ ，則 $x - y = ?$
(A) -6 (B) -5 (C) -4 (D) -3。
- 代碼：a41104p1
- () 2. 若 a 是 $x^2 + 2 = 2\sqrt{2}x$ 之解，則 $(a^{-5})^4 \cdot (a^2)^{11}$ 之值為何？
(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{2}$ 。
- 代碼：a41090w1
- () 3. 設 n 為自然數，且 $x = 3^n + 3^n + 3^n$ ，則下列何者等於 x^2 ？
(A) 9^{3n} (B) 3^{2n+2} (C) 27^{2n} (D) 3^{3n+3} 。
- 代碼：a41100w1
- () 4. 設 $C(x)$ 與 $S(x)$ 均為定義於實數的函數，若 $C(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$ 及 $S(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$ ，則 $C(2x) = ?$ (A) $2S^2(x) + 1$ (B) $2S^2(x) - 1$ (C) $S^2(x) + 1$ (D) $S^2(x) - 1$ 。
- 代碼：a41094w2
- () 5. 設 r 為有理數，且 $5^r = 4(\sqrt[3]{40} + \frac{\sqrt[3]{5}}{2})^2$ ，則 $r = ?$
(A) $\frac{8}{3}$ (B) $\frac{10}{3}$ (C) 8 (D) 10。
- 代碼：a41099k1
- () 6. 設 $a = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ ， $b = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$ ， $c = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{4}}$ ，下列選項何者為真？
(A) $a > b > c$ (B) $a < b < c$ (C) $a = c > b$ (D) $a = c < b$ 。
- 代碼：f32090c1
- () 7. 設「 $\cdot$ 」表示四則運算中的乘號，若 $2^{2x+1} + 2^{3x} = 5 \cdot 2^{x+4}$ ，試求 $x = ?$
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。
- 代碼：a42094h1
- () 8. 指數函數 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$ ，若 $f(a) = \frac{1}{4}$ ， $f(b) = \frac{1}{3}$ ，求 $f(a+b) = ?$
(A) $\frac{7}{13}$ (B) $\frac{11}{5}$ (C) $\frac{9}{11}$ (D) $\frac{5}{7}$ 。
- 代碼：f32255m1
- () 9. $\log_2(\log_{10}\sqrt{\sqrt{10}})$ 可化為下列何者？ (A) -2 (B) -3 (C) -4 (D) -5。
- 代碼：a43101w1



- () 10. 求 $\log_2\left(\frac{\cos 30^\circ - \tan 45^\circ}{\tan 60^\circ - 2 \cot 45^\circ}\right) = ?$ (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 。 代碼：a43102w1
- () 11. 化簡 $\frac{1}{2}\log_3\left(\frac{2}{9}\right)^6 - \frac{1}{4}\log_3\left(\frac{10}{3}\right)^8 + \log_3\left(\frac{25}{6}\right) =$ (A) -5 (B) 0 (C) 1 (D) 5 。 代碼：a43093s1
- () 12. 化簡 $\frac{1 + \frac{1}{4}\log_{10} 81 - \frac{1}{3}\log_{10} 125}{\frac{1}{4}\log_{10} 16 + \frac{1}{3}\log_{10} 27} = ?$ (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) 2 。 代碼：a43092s1
- () 13. 化簡 $(\log_4 3)(\log_3 25)(\log_5 16) = ?$ (A) 1 (B) 4 (C) 8 (D) 16 。 代碼：a43093w1
- () 14. 下列哪個 $f(x)$ 具有「對於任意兩正實數 a 及 b ， $f(ab) = f(a) + f(b)$ 均成立」的性質？ (A) $f(x) = 3x + 4$ (B) $f(x) = 5^x$
(C) $f(x) = \cos(\pi x)$ (D) $f(x) = \log x$ 。 代碼：a43094s1
- () 15. 設 $y = \log_{x-5}(8 + 7x - x^2)$ ，且 x 為整數，若 y 有意義時，則 $x + y$ 之值為 (A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 10 。 代碼：a46087s1
- () 16. 若 $\log_8(\log_5 x) = \frac{1}{3}$ ，則 $x = ?$ (A) 5 (B) 8 (C) 25 (D) 125 。 代碼：a44093w1
- () 17. 已知二次方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的二根為 $\log a$ ， $\log b$ ，求 $\log_a b + \log_b a$ 之值 (A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 10 。 代碼：f34284m1
- () 18. 設 x 、 y 為正實數，若 $2\log(x - 2y) = \log x + \log y$ ，則 $\frac{x}{y}$ 之值為何？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：a44098k1
- () 19. 設 p 與 q 為方程式 $\log_9(10x^2 - 6x + 5) - \log_3 x - 1 = 0$ 的兩根，則 $\frac{1}{p+q} = ?$ (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{7}$ 。 代碼：a44099k1
- () 20. 下列何者為不等式 $\log_{\frac{2}{3}}(2x - 8) > 1 + \log_{\frac{2}{3}}(x + 6)$ 的解？ (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12 。 代碼：a44102w1

- () 21. 關於對數，下列何者不正確？
(A) $\log_{10} 4 > 0$ (B) $\log_{0.5} 4 < 0$ (C) $\log_3 2 < 1$ (D) $\log_{0.3} 0.2 < 1$ 。 代碼：a44215m1
- () 22. 在坐標平面上，直線 $x + y = 5$ 與 $y = 2^x$ 與 $y = \log_2 x$ 的圖形分別交於 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 兩點，求 $x_1 + x_2 =$ (A) 10 (B) $\frac{5}{2}$ (C) 1 (D) 5 。 代碼：f34288m1
- () 23. 設 $x = \frac{\log 30}{\log 2}$ ，則 x 落在哪兩個整數之間？
(A) $3 < x < 4$ (B) $4 < x < 5$ (C) $5 < x < 6$ (D) $6 < x < 7$ 。 代碼：a45201m1
- () 24. 設 $\log_{10} x = -2.51$ ，則 (A) x 不存在 (B) $-3 < x < -2$ (C) $0.1 < x < 0.3$ (D) $0.001 < x < 0.01$ 。 代碼：a45215m1
- () 25. 已知 39^{100} 是 160 位數，則 39^{40} 是幾位數？
(A) 61 (B) 62 (C) 63 (D) 64 。 代碼：a45216m1
- () 26. $\log x$ 的首數與 $\log 39527$ 相同，尾數與 $\log 317$ 相同，求 $x =$?
(A) 395.27 (B) 31700 (C) 39500 (D) 3170 。 代碼：a45217m1
- () 27. 有一疾病，其感染人數每年加倍，若於 1980 年 10 月發現有 10 人感染該疾病，則在下列那一年 10 月，感染人數會首次超過四百萬人？
(已知 $\log 2 = 0.3010$) (A) 1999 (B) 2001 (C) 2003 (D) 2005 年。 代碼：a45091w1

答案：CABAA CDABA AABDD CCDAB DDBDD BA



筆記欄



單元 10 空間向量

主題一 空間概念

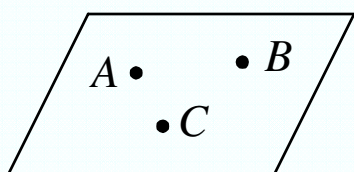
1. 空間中直線與平面的關係：

(1) 決定直線的條件：

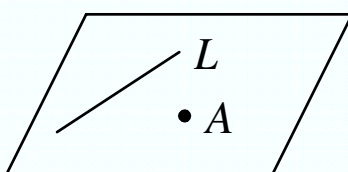
相異兩點可決定一條直線



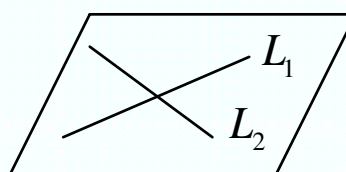
(2) 決定平面的條件：



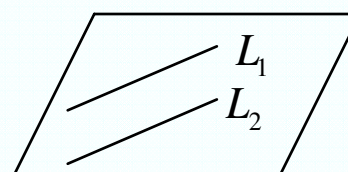
不共線的三點



一直線及線外一點

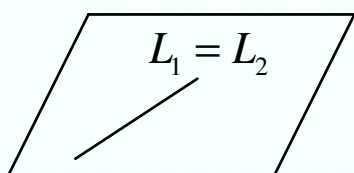


兩相交直線

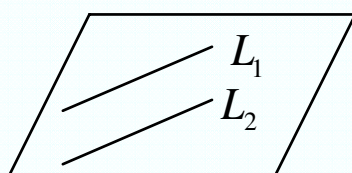


兩平行直線

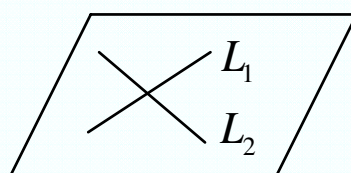
(3) 直線與直線的關係



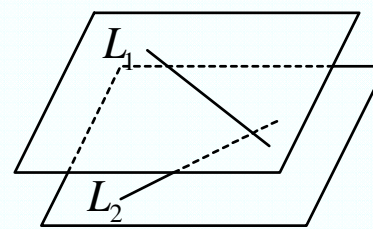
重合



平行

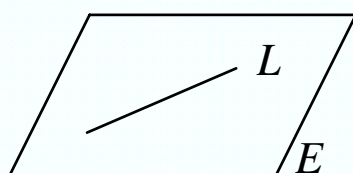


交一點

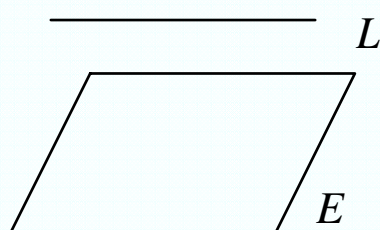


歪斜

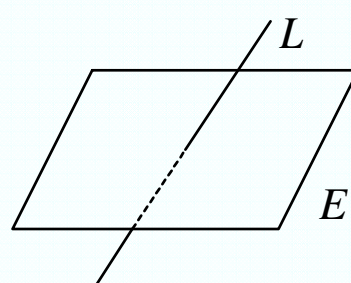
(4) 直線與平面的關係



直線落在平面上

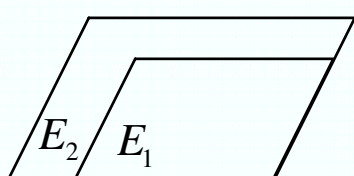


平行

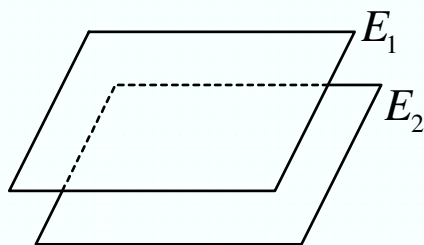


交一點

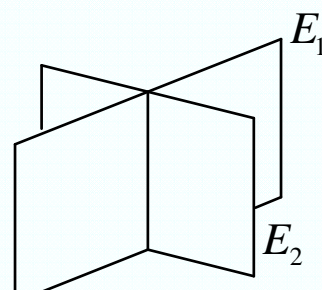
(5) 平面與平面的關係



重合



平行

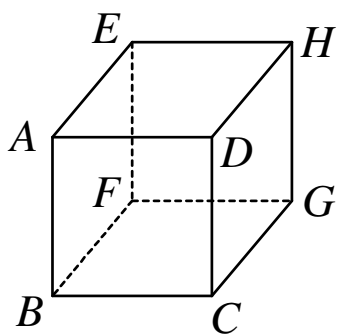


交一直線



老師講解

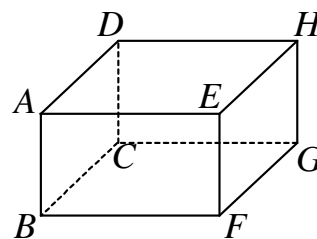
如右圖，在正立方體 $ABCD-EFGH$ 的 8 個頂點中，若每兩個頂點決定一直線，則與 $\overrightarrow{AD}$ 互為歪斜線的有 _____ 條。



學生練習

長方體中，互為歪斜線的稜線共有 _____ 對。

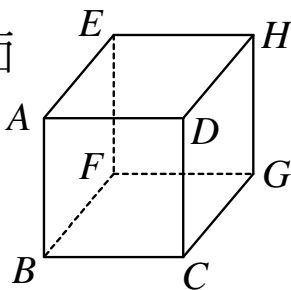
【代碼】r31204m1



老師講解

已知 $ABCD-EFGH$ 為正立方體的 8 個頂點，如右圖，下列選項何者錯誤？

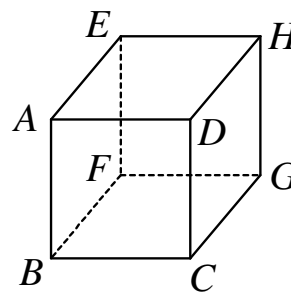
- (A) 線段 $\overline{AH}$ 垂直線段 $\overline{AB}$
- (B) 線段 $\overline{AG}$ 與線段 $\overline{AB}$ 共平面
- (C) 線段 $\overline{BD}$ 與線段 $\overline{HF}$ 歪斜
- (D) 向量 $\overrightarrow{AH}$ 與向量 $\overrightarrow{CD}$ 垂直



學生練習

如右圖所示的正立方體中，下列敘述何者是不正確的？

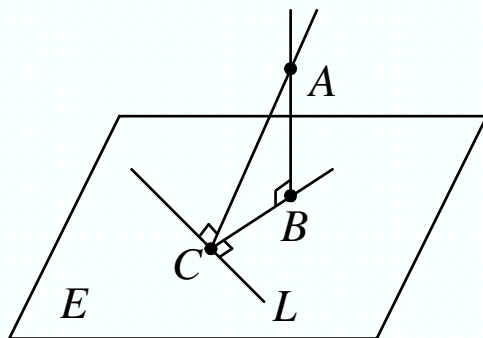
- (A) H, F 連線平行於平面 $ABCD$ 所在的平面
- (B) 頂點 A, G 連線與另一組頂點 C, E 連線不相交
- (C) A, G 連線與 C, H 連線互為歪斜
- (D) A, E 連線垂直於平面 $ABCD$ 所在的平面。



【代碼】r31205mk

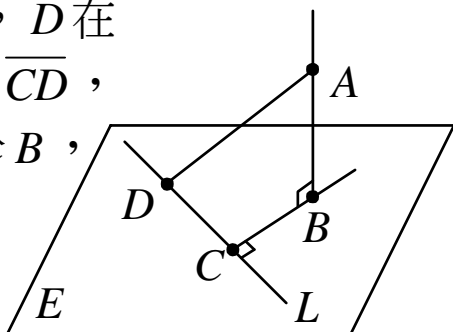
2. 三垂線定理：

設直線 AB 垂直平面 E 於 B 點，若在平面 E 上，直線 BC 垂直直線 L 於 C 點，則直線 AC 必垂直 L 於 C 點。



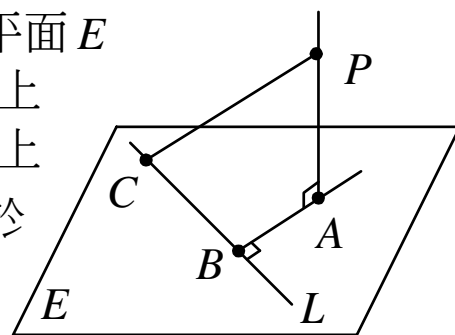
老師講解

如右圖，設 B, C, D 在平面 E 上，且 $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ ，又 $\overline{AB}$ 垂直平面 E 於 B ，已知 $\overline{BC} = \overline{CD} = 4$ ， $\overline{AD} = \sqrt{41}$ ，則 $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



學生練習

如右圖，設 $\overrightarrow{PA}$ 垂直平面 E 於 A 點， L 是平面 E 上一條直線，且 C 是 L 上一點，若 $\overrightarrow{AB}$ 垂直 L 於 B 點， $\overline{PA} = 4$ ， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 12$ ，則 $\overline{PC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

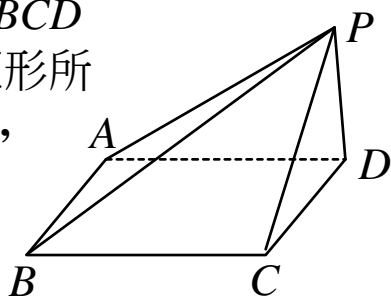


【代碼】r31206m1



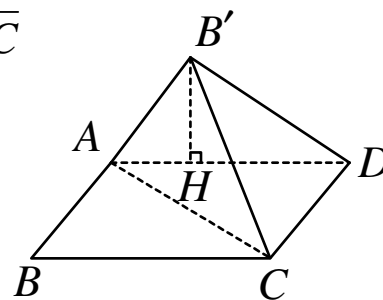
老師講解

如右圖所示，過矩形 $ABCD$ 的頂點 D ，作垂直此矩形所在平面之垂直線段 $\overline{PD}$ ，若 $\overline{PA} = 12\sqrt{3}$ ， $\overline{PD} = 5$ ， $\angle PBA = 60^\circ$ ，求 $\overline{PC}$ 的長度為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



學生練習

一矩形紙板 $ABCD$ 沿 $\overline{AC}$ 上折至 $AB'C$ 之位置，由 B' 作 ACD 平面之垂足 H 在 $\overline{AD}$ 上如圖， $\overline{AD} = 2$ ， $\overline{AB} = 1$ ，則 $\overline{B'D}$ 之長為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



【代碼】r31207m1

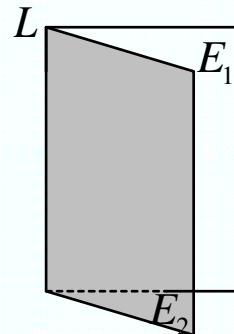


3. 兩平面夾角(二面角)：

(1) 定義：

平面上一條直線 L 把該平面分成兩個部分，每個部分都稱為半平面，而 L 就是這兩個半平面的界線。空間中，由共有一條界線的兩個半平面及此界線所組成的圖形稱為二面角，如右圖。

這條界線稱為此二面角的稜，這兩個半平面 E_1 ， E_2 稱為二面角的面。

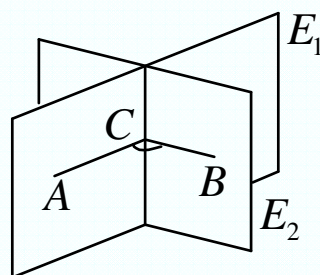


(2) 二面角大小：

若 L 為 E_1 ， E_2 之交線且 $\overline{AC} \perp L$ ， $\overline{BC} \perp L$ ，

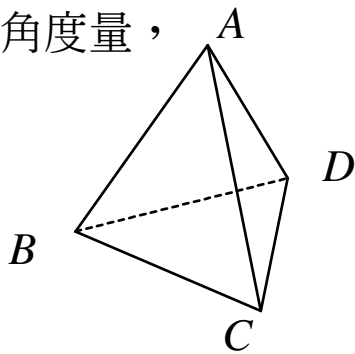
則 $\angle BCA$ 為 E_1 與 E_2 之夾角，

又稱為兩面角。



老師講解

正四面體邊長為 a ，若 θ 為平面 ABC 與平面 BCD 所夾成之兩面角度量，則 $\cos \theta =$ _____。



學生練習

一四面體 $O-ABC$ 中，

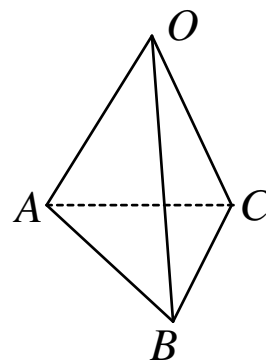
$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 4,$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 2,$$

若 θ 為平面 OAB 與平面 ABC 所夾成之兩面角度量，則：

(1) $\cos \theta$ _____。

(2) 四面體體積為_____。



【代碼】r31212m1



老師講解

將一張正方形的紙 $ABCD$ ，沿著對角線 $\overline{BD}$ 折起，使得 $\angle ABC = 30^\circ$ ，則平面 ABD 與 BCD 的夾角的餘弦值為_____。



學生練習

將正方形 $ABCD$ 沿對角線 $\overline{BD}$ 對折，使 $\angle ABC = 60^\circ$ ，則所成二面角的角度為_____。

【代碼】 r31210m1

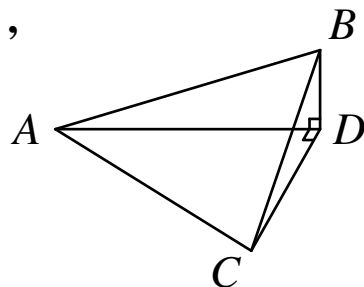
【學生練習答案】

1. 24	2. (B)	3. 13	4. $\sqrt{3}$
5. (1) $\frac{\sqrt{5}}{15}$ (2) $\frac{2\sqrt{11}}{3}$	6. 90°		



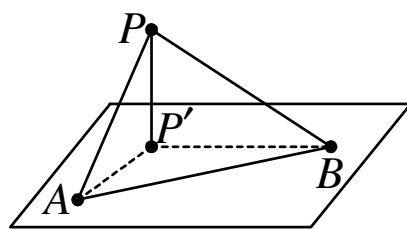
回家功課

- () 1. 如右圖，四面體 $ABCD$ 的稜 $\overline{BD}$ 垂直於平面 ACD ，
 $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ ， $\overline{BD} = 1$ ， $\overline{AD} = 4$ ， $\overline{CD} = 3$ ，
 試求頂點 B 至 $\overline{AC}$ 稜的(垂直)距離為
 (A) $\frac{12}{5}$ (B) $\frac{13}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$ 。



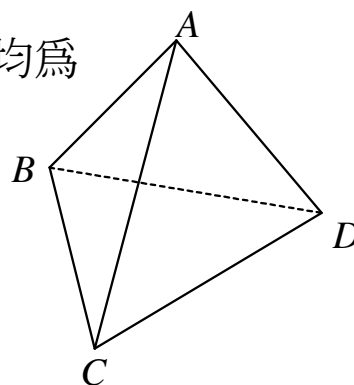
代碼：r31222m1

- () 2. 如圖， A 、 B 兩點都在平面 E 上， P 在 E 的
 投影點為 P' ，已知 $\overline{PP'} = 3$ ， $\overline{AB} = 6$ ，
 $\Delta P'AB$ 面積為 12，則 ΔPAB 面積為
 (A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18。



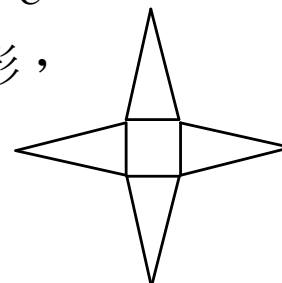
代碼：r31208m1

- () 3. 如右圖， $ABCD$ 為一四面體，已知 ΔACD 與 ΔBCD 均為
 等腰三角形， $\overline{AC} = \overline{AD} = 5$ ， $\overline{BC} = \overline{BD} = 3$ ，
 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{CD} = 2$ ，求 ΔACD 與 ΔBCD 的二面角
 的餘弦值為 (A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ 。



代碼：r31224m1

- () 4. 如右圖的四角錐展開圖，四角錐底面為邊長 2 的正方形，
 四個側面都是腰長為 4 的等腰三角形，則此四角錐的
 高度為 (A) 3 (B) $\sqrt{10}$ (C) $2\sqrt{3}$ (D) $\sqrt{14}$ 。



代碼：r31090c1

- () 5. 有一個底為正方形的五面體，每一稜之長都是 a ，設四邊形 $ABCD$ 為
 其底， O 為其錐頂，試求側面與底面之夾角的正弦值為
 (A) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ 。

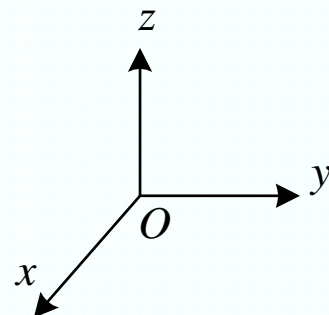
代碼：r31214m1

答案：BACDA

主題二 空間向量的坐標表示法

1. 空間坐標系：

- (1) 在空間任取一點 O 為原點，過 O 點作兩兩垂直的三直線，如右圖，在三直線上各取一方向為正向，另一方向為負向，並取適當長為單位長，如此，這三條直線就變成以 O 為原點的數線，分別稱為 x 軸、 y 軸、 z 軸。而此三個坐標軸所形成的坐標系就稱為空間坐標系。



- (2) 坐標軸與坐標平面：

① 原點 O 的坐標為 $(0,0,0)$

② x 軸： $y = z = 0$ ，故在 x 軸上的點坐標形式為 $(a,0,0)$

y 軸： $x = z = 0$ ，故在 y 軸上的點坐標形式為 $(0,b,0)$

z 軸： $x = y = 0$ ，故在 z 軸上的點坐標形式為 $(0,0,c)$

③ xy 平面： $z = 0$ ，故在 xy 平面上的點坐標形式為 $(a,b,0)$

yz 平面： $x = 0$ ，故在 yz 平面上的點坐標形式為 $(0,b,c)$

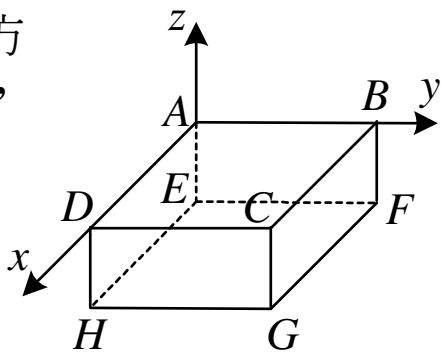
zx 平面： $y = 0$ ，故在 zx 平面上的點坐標形式為 $(a,0,c)$

- (3) 三個坐標平面將坐標空間分成 8 個部分，稱為卦限，其中規定三個坐標軸正向所圍的區域稱為第一卦限。



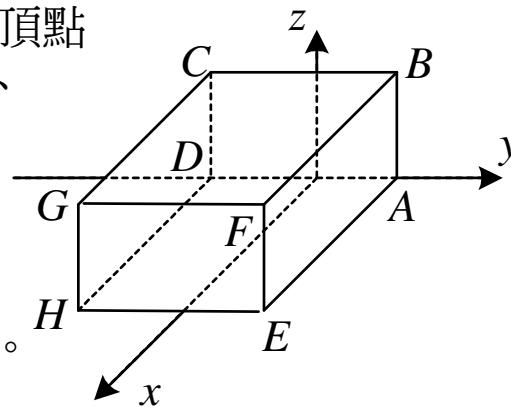
老師講解

空間坐標中有一長方體 $ABCD-EFGH$ ，各邊長均與坐標軸平行，如右圖，已知 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AD} = 5$ ， $\overline{AE} = 3$ ，試求此長方體各頂點坐標。



學生練習

如右圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 中， A 、 B 、 H 三個頂點分別為 $A(0,2,0)$ 、 $B(0,2,3)$ 、 $H(6,-3,0)$ ，試求長方體其他五個頂點的坐標。



【代碼】r32201m1



(4) 中點公式：

設 $P(x_1, y_1, z_1)$ ， $Q(x_2, y_2, z_2)$ ，若 P 、 Q 兩點的連線段中點為 M ，

則 M 點坐標為 $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$

(5) 距離公式：

設 $P(x_1, y_1, z_1)$ ， $Q(x_2, y_2, z_2)$ ，則 $\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

【例】： $A(1, 2, -2)$ ， $B(3, 6, -4)$ ，求

- ① $\overline{AB} = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
- ② $\overline{AB}$ 之中點 $= (2, 4, -3)$



老師講解

已知點 $P(1, 3, 2)$ 與 y 軸上一點 Q 的距離為 3，求 Q 點坐標。



學生練習

已知點 $P(-1, 1, 2)$ 與點 $Q(k, 2, 2)$ 的距離為 $\sqrt{5}$ ，求 Q 點坐標。

【代碼】r32201mk



老師講解

若 $P(-3, 4, 1)$ ，試完成下列表格

	投影點	對稱點	距離
x 軸			
y 軸			
z 軸			
原點			
xy 平面			
yz 平面			
zx 平面			



學生練習

關於空間中一點 $P(-1, 2, -3)$ 之敘述，下列何者不正確？

- (A) P 點在 xy 平面的投影點為 $(-1, 2, 0)$
- (B) P 點在 z 軸的投影點為 $(0, 0, -3)$
- (C) P 點關於 x 軸的對稱點為 $(1, 2, -3)$
- (D) P 點到 y 軸的距離為 $\sqrt{10}$

【代碼】r32202mk



老師講解

P 在第一卦限內，其到 x ， y ， z 軸的距離分別為 $\sqrt{41}$ ， 5 ， $\sqrt{34}$ ，求出 P 點坐標為



學生練習

空間中一線段 $\overline{AB}$ 在 xy 平面、 yz 平面、 zx 平面上之正射影長分別為 $\sqrt{13}$ ， $\sqrt{34}$ 、 $\sqrt{29}$ ，求此線段 $\overline{AB}$ 之長度為_____。

【代碼】r32204m1

2. 空間向量的運算：

(1) 空間向量的坐標表示法：

- ①若點 A 的坐標為 (a, b, c) ， O 為原點，則向量 $\overrightarrow{OA} = (a, b, c)$
- ②若點 $A(x_1, y_1, z_1)$ ， $B(x_2, y_2, z_2)$ ，則 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ 。

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(2) 空間向量的加減法與係數乘法：

設 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 為空間中兩向量，且 $r \in R$

① $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ 。

② $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$ 。

③ $r\overrightarrow{a} = (ra_1, ra_2, ra_3)$ 。

④若 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$

⑤若 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 且分量均不為 0，且 $\overrightarrow{a} // \overrightarrow{b}$ ，則 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

(3) 單位向量：

若 $|\overrightarrow{V}| = 1$ ，則 $\overrightarrow{V}$ 稱之單位向量。



老師講解

已知空間中三點 $P(2, -1, 2)$ ， $Q(1, 3, 4)$ ， $R(2, 1, 0)$ ，若 $\vec{a} = 3\vec{PQ} - 2\vec{PR}$ ，
則(1) $\vec{a} =$ _____ (2) $|\vec{a}| =$ _____。



學生練習

設 $A(3, 1, -1)$ ， $B(2, 0, 1)$ ， $C(1, -1, 2)$ ， $P(3, -2, 1)$ ，令 $\vec{V} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$ ，
則 $\vec{V} =$ _____，又若 $2\vec{PQ} = 3\vec{V}$ ，
則 Q 點之坐標為_____。

【代碼】r32209m1



老師講解

已知兩向量 $\vec{a} = (-1, 1, 1)$ ， $\vec{b} = (2, -1, 1)$ ，
若 $\vec{c} = 2\vec{a} + t\vec{b}$ ， $t \in R$ ，則當 $t =$ _____時，
 $|\vec{c}|$ 有最小值為_____。



學生練習

$\vec{a} = (1, 1, 1)$ ， $\vec{b} = (3, 4, 5)$ ，令 $\vec{x} = \vec{a} + t\vec{b}$
(t 為實數)，則當 $t =$ _____時，
 $|\vec{x}|$ 有最小值為_____，此時 $\vec{x} =$ _____。

【代碼】r32210m1



老師講解

設 $\vec{a} = (k-2, 1, 3)$, $\vec{b} = (6, 3, 2k+1)$,
若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 則 $k =$ _____。



學生練習

若兩向量 $\vec{a} = (x+1, 3x, 2y-1)$,
 $\vec{b} = (2, 4, y+5)$ 互相平行 ,
則 $x =$ _____ , $y =$ _____。
【代碼】 r32211m1



老師講解

設 $ABCD$ 為空間中的一平行四邊形 ,
若 $A(4, 1, 0)$, $B(0, 4, 3)$, $C(3, 2, 1)$,
則 D 的坐標為_____。



學生練習

設 $A(2, 1, -3)$, $B(5, 2, -1)$, $C(3, -2, 4)$ 為
平行四邊形 $ABCD$ 的三個頂點 ,
則 D 點坐標為_____。
【代碼】 r32213m1

【學生練習答案】

1. $C(0, -3, 3)$ 、 $D(0, -3, 0)$ 、 $E(6, 2, 0)$ 、 $F(6, 2, 3)$ 、 $G(6, -3, 3)$	2. $Q(-3, 2, 2)$ 或 $Q(1, 2, 2)$
3. (C)	4. $\sqrt{38}$
5. $\vec{V} = (4, 4, -5)$ 、 $Q(9, 4, -\frac{13}{2})$	
6. $t = -\frac{6}{25}$ 、 $ \vec{x} $ 有最小值 $\frac{\sqrt{3}}{5}$ 、 $\vec{x} = (\frac{7}{25}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{5})$	
7. $x = 2$, $y = 17$	8. $D(0, -3, 2)$



回家功課

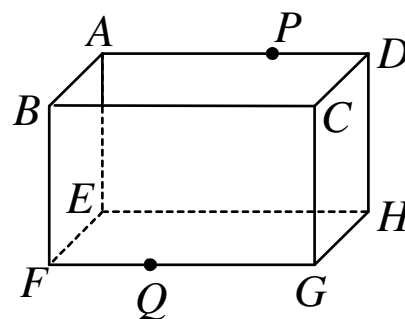
- () 1. 長方體 $ABCD-EFGH$ ，如右圖，

P 在 $\overline{AD}$ 上， Q 在 $\overline{FG}$ 上，

且 $\overline{AB}=1$ ， $\overline{AE}=2$ ， $\overline{AD}=3$ ，

$\overline{PD}=1$ ， $\overline{FQ}=1$ ，則 $\overline{PQ}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $2\sqrt{2}$ 。



代碼：r32223m1

- () 2. 已知 $ABCD-OEFG$ 為一長方體，

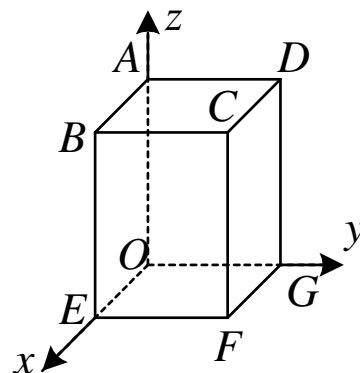
E 點坐標為 $(3,0,0)$ ， G 點坐標為 $(0,4,0)$ ，

A 點坐標為 $(0,0,5)$ ，若 M 為 $\triangle BDF$ 之重心，

則 M 點坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(A) $(2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3})$ (B) $(\frac{8}{3}, 3, 4)$

(C) $(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3})$ (D) $(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3})$ 。



代碼：r32226m1

- () 3. 設點 P 在第一卦限，且與三個坐標平面等距離，若 P 到 y 軸的距離為 2，則 P 點到原點的距離為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $2\sqrt{2}$ 。

代碼：r32222m1

- () 4. 令 $A(5,0,12)$ 、 $B(-5,0,12)$ 為坐標空間中之兩點，且令 P 為 xy 平面上滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=13$ 的點。請問下列哪一個選項中的點可能為 P ？

(A) $(5,0,0)$ (B) $(5,5,0)$ (C) $(0,12,0)$ (D) $(0,0,0)$ 。

代碼：r32103c1

- () 5. 令 $A(-1,6,0)$ ， $B(3,-1,-2)$ ， $C(4,4,5)$ 為坐標空間中三點，若 D 為空間中的一點且滿足 $3\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$ ，則點 D 的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(A) $(-8,23,17)$ (B) $(11,-5,8)$ (C) $(-7,30,18)$ (D) $(5,23,15)$ 。

代碼：r32097c1

- () 6. 若 $P(-2,-3,1)$ 、 $Q(2,2,-2)$ ，若 $\overrightarrow{u}=(a,b,c)$ 與 $\overrightarrow{PQ}$ 同向，且 $|\overrightarrow{u}|=2\sqrt{2}$ ，求 $a+b+c=?$

(A) $\frac{12}{5}$ (B) $\frac{11}{3}$ (C) $\frac{11}{5}$ (D) $\frac{13}{3}$ 。

代碼：r32301m1

- () 7. 假設坐標空間中三相異平面 E_1 ， E_2 ， E_3 皆相通 $(-1,2,0)$ 與 $(3,0,2)$ 兩點，試問以下哪些點也同時在此三平面上？

(A) $(2,2,2)$ (B) $(1,1,1)$ (C) $(4,-2,2)$ (D) $(-2,4,0)$

代碼：r32094c2

答案：BABDC AB

主題三 空間向量的內積與外積

1. 向量的內積：

(1) 定義：

設 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 為空間中兩向量，且其夾角為 θ ，其中 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ，

則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ 。

(2) 內積性質：

① $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ ($\because \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$)

② 若 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 且分量均不為 0，且 $\vec{a} // \vec{b}$ ，則 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

③ 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

(3) 內積應用：

設 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 為空間中兩向量，且其夾角為 θ ，其中 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ，

則 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ 。



老師講解

設 $A(3, -1, 4)$ ， $B(3, 0, 3)$ ， $C(4, -2, 4)$ ，則

(1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



學生練習

坐標空間中， $\vec{a} = (1, 1, 2)$ ，

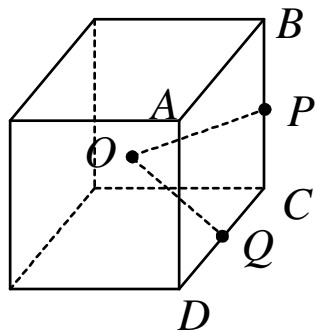
$\vec{b} = (2, -4, -2)$ ，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【代碼】r33201m1



老師講解

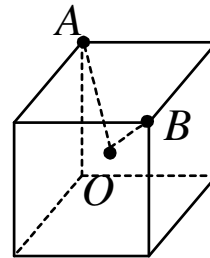
如右圖， $ABCD$ 為正立方體的一側面， P 、 Q 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點， O 為正立方體的中心，則 $\cos \angle POQ = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



2

學生練習

如右圖所示，設一正立方體中心為 O ，而 A 、 B 為此正立方體同一面上的兩個對頂點，則 $\cos \angle AOB = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

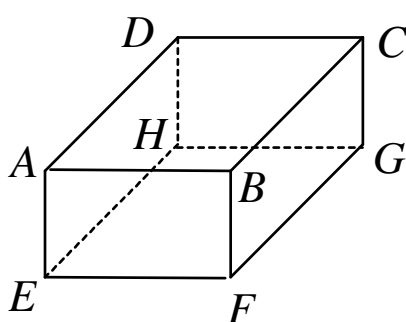


【代碼】r33094b1



老師講解

右圖為長方體 $ABCD-EFGH$ ，其中 $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{AE} = 1$ ，則下列何者的內積值最大？



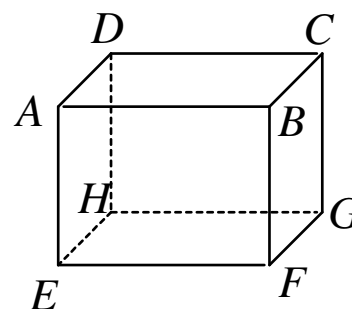
- (A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG}$ (B) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HE}$
(C) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EG}$ (D) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF}$ (E) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{HB}$



3

學生練習

如右圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 中， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AD} = 2$ ， $\overline{AE} = 3$ ，則 $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{GD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【代碼】r33203m1



老師講解

設 $A(-7, 3, 1)$ ， $B(-2, 1, 3)$ ，若 C 點在 x 軸上，且 $\angle ACB$ 為直角，則 C 點坐標為_____。



學生練習

設三向量 $\vec{a} = (1, 2, r)$ ， $\vec{b} = (-1, s, 1)$ ， $\vec{c} = (t, 1, 2)$ 兩兩互相垂直，則序組 $(r, s, t) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【代碼】r33204m1

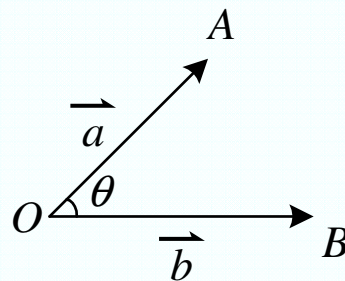
2. 正射影：

設 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 是兩個非零向量，則：

(1) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上之正射影長為 $|\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}|$

(2) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上之正射影為 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$

(3) $\vec{a}$ 在 $t\vec{b}$ ($t \neq 0$) 上之正射影為 $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$





老師講解

空間中有三點 $A(3, 2, 1)$ ， $B(5, 1, 2)$ ， $C(2, 3, -1)$ ，自點 B 作直線 AC 的垂直線，求垂足的坐標為_____。



學生練習

設空間中有三點 $A(1, 1, 3)$ ， $B(0, 2, 4)$ 與 $C(3, 2, 3)$ ，

- (1) $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的正射影為_____。
- (2) 點 C 在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的投影 P 點的坐標為_____。

【代碼】 r33207m1

3. 空間向量的外積：

(1) 外積定義：

若 $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，則 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

【討論】：

- ① $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ 是一向量， $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ 是一純量
- ② 若 $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ ，則 $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{N}$ 且 $\overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{N}$ ，即 $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ 為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之一種公垂向量

(2) 外積運算性質：

$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 皆不為 0

- ① $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a})$ (比較 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$)
- ② $\overrightarrow{a}$ 不平行 $\overrightarrow{b}$ ，則 $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \perp \overrightarrow{a}$ ， $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \perp \overrightarrow{b}$ [即 $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{a} = 0$ ， $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{b} = 0$]



老師講解

已知 $\vec{n}$ 和 $\vec{a} = (1, 3, 0)$ ， $\vec{b} = (-1, 0, 2)$ 均垂直，且 $|\vec{n}| = 14$ ，求 $\vec{n}$ 。



學生練習

設 $\vec{V}_1 = (3, 4, -1)$ ， $\vec{V}_2 = (-2, -2, 1)$ ，
若 $|\vec{u}| = 6$ ，且 $\vec{u} \perp \vec{V}_1$ ， $\vec{u} \perp \vec{V}_2$ ，
則 $\vec{u} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【代碼】r34208m1



老師講解

若 $\vec{a} = (1, 1, 2)$ ， $\vec{b} = (2, 3, 1)$ ，
 $\vec{c} = (-2, 1, -1)$ ，試求下列各式之值：

(1) $\vec{b} \times \vec{c} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\vec{c} \times \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



學生練習

若 $\vec{a} = (-1, 1, 1)$ ， $\vec{b} = (2, 2, 1)$ ，
 $\vec{c} = (3, 1, 2)$ ，試求下列各式之值：

(1) $\vec{a} \times \vec{a}$

(2) $\vec{a} \times \vec{b}$

(3) $\vec{b} \times \vec{a}$

(4) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

(5) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$

(6) $\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ 。

【代碼】r34206m1



4. 外積運算與三角形面積：

三角形面積

若 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為兩邊所形成三角形面積 $= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$



老師講解

若 $A(3, 0, 2)$ ， $B(5, 2, 3)$ ， $C(3, 4, 5)$ ，求 $\triangle ABC$ 面積 = _____。



學生練習

設 $A(3, 3, 2)$ ， $B(0, 4, 1)$ ， $C(2, 4, -1)$ 為空間中相異三點，試求：
(1) $\triangle ABC$ 面積為 _____。
(2) A 點到直線 BC 之最短距離為 _____。

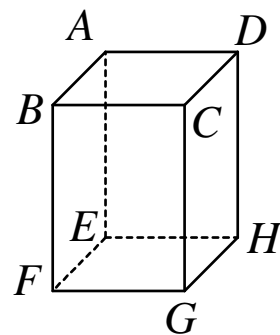
【代碼】 r34209m1

【學生練習答案】

1. 120°	2. $-\frac{1}{3}$	3. -7	4. $(-3, 2, 4)$
5. (1) $(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3})$ (2) $P(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{8}{3})$	6. $\pm(4, -2, 4)$		
7. (1) 0 (2) $(-1, 3, -4)$ (3) $(1, -3, 4)$ (4) 0 (5) $(4, 4, -8)$ (6) $(4, 4, -8)$	8. (1) $3\sqrt{2}$ (2) 3		

回家功課

- () 1. 設 $ABCD-EFGH$ 為空間中長、寬、高分別為 2、3、5 的長方體。已知 $\overline{AB}=2$ 、 $\overline{AD}=\overline{BC}=3$ ，且 $\overline{DH}=5$ ，則內積 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$ 之值為_____。
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10。

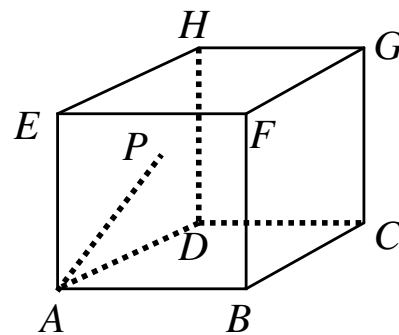


代碼：r33103a1

- () 2. $\overrightarrow{u}=(2,-1,3)$ 、 $\overrightarrow{v}=(-2,1,1)$ ，已知 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{u}+k\overrightarrow{v}$ 垂直，則 $k=$ _____。
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10。

代碼：r33302m1

- () 3. 如圖所示， $ABCD-EFGH$ 為邊長等於 1 之正立方體。若 P 點在立方體之內部且滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ ，則 P 點至直線 AB 之距離為_____。
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$ 。



代碼：r32094c1

- () 4. 在空間中，設 $\overrightarrow{a}=(2,1,2)$ ， $|\overrightarrow{b}|=12$ ， $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角為 120° ，則 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 的正射影為_____。
(A) $(-4,-2,-4)$ (B) $(4,2,4)$ (C) $(-2,-1,-2)$ (D) $(2,1,2)$ 。

代碼：r33216m1

- () 5. 已知 $A(1,0,-1)$ 、 $B(7,0,5)$ 、 $C(3,2,k)$ 為空間中三點，若 $k \neq 0$ ，且 $\triangle ABC$ 的面積為 9，求 k 值=_____。
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2。

代碼：r34211m1

- () 6. 空間中有 A 、 B 、 C 、 D 四點。已知 $\overline{AB}=1$ ， $\overline{BC}=2$ ， $\overline{CD}=3$ ， $\angle ABC=\angle BCD=120^\circ$ ，而 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 之夾角為 60° ，則 $\overline{AD}$ 之長
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2。

代碼：r33086a1

答案：CABAD A



主題四 三階行列式與六面體體積

1. 二階與三階行列式的定義：

(1) 二階行列式的定義：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(2) 三階行列式的定義：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$



老師講解

已知 $\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ ，求 x 之值。



學生練習

設 $\begin{vmatrix} x & 7 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$ ，求 $\begin{vmatrix} x+9 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & x+11 \end{vmatrix}$ 之值。

【代碼】a22a01m2

2. 行列式性質：

(1) 列與行依次交換，行列式值不變。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) 任兩列(或兩行)互換，其值異號。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (\text{第二、三行對調})$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{第一、二列對調})$$

(3) 某一系列(或一行)諸元皆為 0，其值為 0。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(4) 某二列(或二行)對應元相同(成比例)，其值為 0。

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{第一、二行成比例})$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{第一、三列成比例})$$

(5) 某一行(或一列)諸元有公因數，可將公因數提出。

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{第一列提出 } k)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & kc_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{第三行提出 } k)$$

(6) 某一行(或一列)諸元皆為二項式，可分成二個同階行列式的和。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + d_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + d_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(7) 某一行(或一列)諸元乘 k 倍加至另一列(或一行)的對應元，其值不變。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + ka_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + ka_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + ka_3 \end{vmatrix} \quad (\text{第一行乘上 } k \text{ 倍後加到第三行})$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + ka_1 & b_2 + kb_1 & c_2 + kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (\text{第一列乘上 } k \text{ 倍後加到第二列})$$



老師講解

求行列式 $\begin{vmatrix} -6 & 8 & 2 \\ 15 & -20 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ 之值。



學生練習

求行列式 $\begin{vmatrix} 15 & 10 & 15 \\ 15 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ 之值。

【代碼】a22a03m2



3

老師講解

若 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 3$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ l & m & n \end{vmatrix} = 2$,

則 $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ g+2l & h+2m & k+2n \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3

學生練習

若 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ l & m & n \end{vmatrix} = 3$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ l & m & n \end{vmatrix} = -2$,

求 $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d+3p & e+3q & f+3r \\ l & m & n \end{vmatrix}$ 之值。

【代碼】 a22a03m3

4

老師講解

若 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$, 求 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a+1 \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 之值。

4

學生練習

若 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$, 求 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 2 & b+2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 之值。

【代碼】 a22b01m2



老師講解

若 $\begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 1 & b & y \\ 1 & c & z \end{vmatrix} = 3$ ，求 $\begin{vmatrix} 2+x & x & a \\ 2+y & y & b \\ 2+z & z & c \end{vmatrix}$ 之值。



學生練習

若 $\begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 1 & b & y \\ 1 & c & z \end{vmatrix} = 6$ ，求 $\begin{vmatrix} 2 & a+x & a \\ 2 & b+y & b \\ 2 & c+z & c \end{vmatrix}$ 之值。

【代碼】a22b02m2

3. 三階行列式的降階法：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (\text{利用第一行降階})$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (\text{利用第二列降階})$$



老師講解

求三階行列式 $\begin{vmatrix} 2015 & 2001 & 1974 \\ 7 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 之值。



學生練習

求三階行列式 $\begin{vmatrix} 99 & 9 & 7 \\ 199 & 4 & 3 \\ 299 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 之值。

【代碼】a22a04m2



老師講解

若行列式 $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & 3+x \end{vmatrix} = 0$,
求 x 所有解之總和。



學生練習

若行列式 $\begin{vmatrix} 9+x & 2 & 3 \\ 9 & 2+x & 3 \\ 9 & 2 & 3+x \end{vmatrix} = 0$,
求 x 所有解之總和。

【代碼】a22b03m2

4. 平行六面體體積：

在空間中若 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 為三個非零向量

$$(1) \text{ 則 } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 所張開之平行六面體體積} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(2) \text{ 則 } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 所張開之四面體體積} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



老師講解

設空間中相異四點 $A(-1,3,-2)$ 、 $B(0,4,0)$ 、 $C(1,3,-1)$ 、 $D(-2,6,-3)$

- (1) 以 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 為相鄰三條稜線的平行六面體的體積為_____。
- (2) 四面體 $ABCD$ 的體積為_____。



學生練習

設空間中相異四點 $A(0,4,2)$ 、 $B(2,5,2)$ 、 $C(-1,1,5)$ 、 $D(3,2,3)$

- (1) $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 為相鄰三條稜線的平行六面體的體積為_____。
- (2) 四面體 $ABCD$ 的體積為_____。

【代碼】 r34215mk



老師講解

若空間中四點 $A(1,2,3)$ 、 $B(0,0,4)$ 、 $C(4,1,2)$ 、 $D(a,3,2)$ 共平面，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



學生練習

設 $A(4,1,a+1)$ 、 $B(7,0,-3)$ 、 $C(10,a,-2)$ 、 $D(7,1,0)$ 四點共平面，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【代碼】 r34217m1

【學生練習答案】

1. 27	2. 330	3. -6	4. 16
5. -12	6. -399	7. -14	8. (1)16 (2) $\frac{8}{3}$
9. 1			



回家功課

() 1. 設 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & 2 \\ 3 & x & 1 \end{vmatrix} = 36$ 的解為 a 與 b ，則 $a+b = ?$

(A) $\frac{4}{3}$ (B) 4 (C) $\frac{20}{3}$ (D) $\frac{28}{3}$ 。

代碼：a22093k1

(93 年統測 C)

() 2. 設 a, b, c, d, e, f 為實數，若 $\begin{vmatrix} a & 1 & d \\ b & 1 & e \\ c & 1 & f \end{vmatrix} = 2$ ，則 $\begin{vmatrix} 2a & -3 & 4d \\ 2b & -3 & 4e \\ -10c & 15 & -20f \end{vmatrix} = ?$

(A) 120 (B) -120 (C) 240 (D) -240。

代碼：a22096k1

(96 年統測 C)

() 3. 設 k 為自然數，若行列式 $\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 3 \\ 1 & 2-k & 3 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0$ ，則 $k = ?$

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6。

代碼：a22094k1

(94 年統測 C)

() 4. 設 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 7$ ，則 $\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(A) 0 (B) 1 (C) 7 (D) -7。

代碼：a22211m1

() 5. 設 $ax+by+c=0$ ，求 $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & -x & -y \\ x^2+2y^2 & -x & -2y \\ c & a & b \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1。

代碼：a22210m1

() 6. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+\sqrt{5} & 3+\sqrt{5} & 4+\sqrt{5} \\ 9+4\sqrt{5} & 14+6\sqrt{5} & 21+8\sqrt{5} \end{vmatrix}$ 的值為

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。

代碼：a22216m1

() 7. 於空間中有四點 $O(0,0,0)$ ， $A(0,1,1)$ ， $B(1,2,-1)$ ， $C(3,1,2)$ ，試求點 A 到平面 OBC 的距離為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{2}$ 。

代碼：r34219m1

答案：ACDCA AB

主題五 空間中的平面

1. 平面方程式：

(1) 平面的法向量：

- ①坐標空間中，如果直線 L 垂直平面 E ，且 $\vec{n} // L$ ，則稱 $\vec{n}$ 是平面 E 的一個法向量，也稱 $\vec{n}$ 與平面 E 垂直，記作 $\vec{n} \perp E$ 。
- ②平面的法向量並不是唯一的，但他們彼此互相平行。

(2) 平面方程式：

①點向式：

設平面 E 過點 $P(x_0, y_0, z_0)$ ，法向量 $\vec{n} = (a, b, c)$ ，
則平面 E 之方程式為 $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ 。

②一般式：

以 (a, b, c) 為法向量之平面可表為 $ax + by + cz + d = 0$ ，其中 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ 。

例；設平面 E 過 $A(1, 2, 3)$ ，法向量 $\vec{n} = (4, -1, 1)$ ，則平面 E 之方程式

【解】： 設 $P(x, y, z)$ 在平面上，則 $\vec{AP} \perp \vec{n}$

$$\begin{cases} \vec{AP} = (x-1, y-2, z-3) \\ \vec{n} = (4, -1, 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 4(x-1) - (y-2) + (z-3) = 0$$

$$\Rightarrow 4x - y + z = 5$$

【另解】：設平面 $E: 4x - y + z = d$

$A(1, 2, 3)$ 代入 E ，得 $d = 5$ ，故 $E: 4x - y + z = 5$

【討論】：

- ①平面中，直線 $L: ax + by = c$ 法向量 (a, b)
- ②空間中，平面 $E: ax + by + cz = d$ 法向量 (a, b, c)
- ③若平面與 xy 平面平行(垂直 z 軸)，法向量 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ ，則平面為 $z = d$ ， $d \in R$ 。

【例】(1) xy 平面之方程式為 $z = 0$ 。

(2) 平行 xy 平面，且過 $(0, 0, 5)$ 之平面方程式 $z = 5$ 。



老師講解

已知點 $A(3,1,2)$ 在平面 E 上的投影點為 $B(-1,4,4)$ ，求則平面 E 的方程式。



學生練習

空間中有三點 $A(0,2,-3)$ 、 $B(1,1,1)$ 、 $C(1,-1,3)$ ，若平面 E 過點 C ，且與直線 AB 垂直，求平面 E 的方程式。

【代碼】r41201m1



老師講解

若 $A(-1,3,0)$ ， $B(5,1,2)$ ，求：
 $\overline{AB}$ 之垂直平分面方程式為_____。



學生練習

在空間中，連接點 $P(2,1,3)$ 與點 $Q(4,5,5)$ 的線段 PQ 之垂直平分面_____。

【代碼】r41088c1



老師講解

若 $A(4,6,5)$ ， $B(6,4,3)$ ， $C(4,3,1)$ ，則
 A, B, C 三點所決定之平面方程式為_____。



學生練習

設 $A(0,2,3)$ ， $B(3,1,-2)$ ， $C(6,2,-1)$ ，則：

- (1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} =$ _____。
- (2) $\triangle ABC$ _____。
- (3) 平面 ABC 的方程式為_____。

【代碼】r41203m1



老師講解

求過 $A(2,1,-1)$ ， $B(1,1,2)$ 且垂直
 $E: 7x+4y-4z=0$ 之平面 F 的方程式。



學生練習

與二平面 $x+2y-z+1=0$ ， $x-y+z-1=0$
均垂直，且通過點 $(1,-2,1)$ 的平面之
方程式為_____。

【代碼】r41204m1

2. 二平面的夾角：

已知平面 $E_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ 與 $E_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ ，

若 θ 為 $\vec{n}_1$ 與 $\vec{n}_2$ 的夾角，亦為 E_1 與 E_2 的夾角，

$$\text{則 } \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \times \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}},$$

故兩平面的夾角為 θ 及 $180^\circ - \theta$ 。



老師講解

求二平面 $x+2y-z=10$ 與 $x-y+2z=8$
的夾角。



學生練習

已知二平面 $2x+2y+z=5$ 與
 $x+2y+2z=8$ 的夾角為 θ ，求 $\sin \theta = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

【代碼】r41301m1



老師講解

若平面 $ax + y + 3z + 2 = 0$ 與平面 $y + z - 3 = 0$ 所夾的銳夾角 45° ，求 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ 。



學生練習

若 yz 平面與平面 $E: kx - 2y + z + 2 = 0$ 之夾角為 45° ，則 $k = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

【代碼】r41208m1

3. 點到平面的距離：

(1) 點面距離：

點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $E: ax + by + cz + d = 0$ 之距離為 $d(P, E) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 。

(2) 兩平行面距離：

兩平行平面 $\begin{cases} E_1: ax + by + cz + d_1 = 0 \\ E_2: ax + by + cz + d_2 = 0 \end{cases}$ 之間的距離為 $d(E_1, E_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ 。



老師講解

設 $P(1, -2, 3)$ ， $E: 4x + 3y - 12z - 1 = 0$ 求點 P 到平面 E 的距離 = $\underline{\hspace{1cm}}$ 。



學生練習

求 $P(1, -1, 2)$ 到平面 $E: 2x + 3y - 6z = 1$ 之距離為 $\underline{\hspace{1cm}}$ 。

【代碼】r41302m1



老師講解

若 $P(a, b, c)$ 為 $2x - 4y - z - 1 = 0$ 上一點，則 $\sqrt{(a-1)^2 + (b-3)^2 + (c+2)^2}$ 之最小值 = ____。



學生練習

點 $P(1, 3, 2)$ 到平面 $E: 2x - y + 2z + k = 0$ 之距離為 5，則 $k =$ _____。

【代碼】r41210m1



老師講解

$A(8, 5, 3)$ 對平面 E 之對稱點為 $A'(-4, -1, -1)$ ，試求 $B(3, 4, 4)$ 對平面 E 之距離 = _____。



學生練習

原點 O 在平面 E 上的投影點為 $(2, -2, 1)$ ，求 $P(1, 1, 1)$ 到平面 E 的距離。

【代碼】r41211m1



老師講解

若 $E_1: x - 2y + 2z = 8$,
 $E_2: 2x - 4y + 4z = 5$,
 則求此二平面之距離_____。



學生練習

若 $E_1: 2x - 4y + 5z = 2$,
 $E_2: 2x - 4y + 5z = 17$,
 則求此二平面之距離_____。

【代碼】r41303m1



老師講解

設兩平面 $E_1: 2x - y + 2z - 4 = 0$,
 $E_2: ax + by + cz + 10 = 0$, 已知 $E_1 // E_2$,
 且 E_1 與 E_2 的距離為 2 ,
 求序對 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



學生練習

二平行平面 $E_1: x + 2y - 2z + 3 = 0$ 、
 $E_2: 2x + 4y - 4z = k$, 已知 E_1 與 E_2
 的距離為 $\frac{5}{2}$, 則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

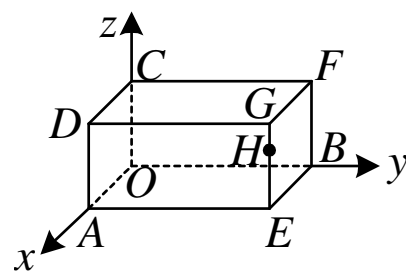
【代碼】r41214m1

【學生練習答案】

1. $x - y + 4z = 14$	2. $x + 2y + z = 13$	3. (1) $(4, -18, 6)$ (2) $\sqrt{94}$ (3) $2x - 9y + 3z = -9$	
4. $x - 2y - 3z = 2$	5. $\frac{\sqrt{17}}{9}$	6. $\pm\sqrt{5}$	7. 2
8. $k = 12$ 或 -18	9. $\frac{8}{3}$	10. $\sqrt{5}$	11. $k = 9$ 或 -21

回家功課

- () 1. 右圖的長方體中， $\overline{OA}=2$ ， $\overline{OB}=4$ ， $\overline{OC}=3$ ，且 $\overline{GH}:\overline{HE}=1:2$ ，則通過點 D 且與 $\overline{CH}$ 垂直的平面方程式為_____。
- (A) $x+2y-z=-1$ (B) $2x+4y-z=1$
(C) $2x+4y-z=5$ (D) $x+2y-z=10$ 。



代碼：r41202m1

- () 2. 空間中有一直線 L 與平面 $E: x+2y+3z=9$ 垂直。試求通過點 $(2,-3,4)$ 且與直線 L 垂直的平面方程式為_____。
- (A) $x+2y+3z=8$ (B) $x+2y+3z=5$
(C) $2x+y+z=5$ (D) $2x+y+z=8$ 。

代碼：r41089c1

- () 3. 若空間中三平面 $E_1: 2x-3y+z=3$ ， $E_2: ax+6y+bz=-6$ ， $E_3: x-2y+cz=2$ ，其中 E_2 和 E_3 重合，且已知 E_1 和 E_3 垂直，則 $a+b-c$ 的值=_____。
- (A) 29 (B) 27 (C) 25 (D) 23。

代碼：r41223m1

- () 4. 垂直 xy 平面，且過兩點 $A(3,0,1)$ ， $B(4,1,6)$ 之平面 E 的方程式為_____。
- (A) $z=1$ (B) $x-y=3$ (C) $x+2y-z=2$ (D) $2x-3y=6$ 。

代碼：r41219m1

- () 5. 設 P ， Q 為平面 $ax+by+cz=5$ 上相異兩點，且 $\overrightarrow{PQ}=(x_0, y_0, z_0)$ ，則 $\overrightarrow{PQ} \cdot (a, b, c)$ 為_____。
- (A) 不定值，隨 (x_0, y_0, z_0) 而改變 (B) 25 (C) 5 (D) 0。

代碼：r41086c1

- () 6. 設 θ 為兩平面 $E_1: 2x-y+2z-6=0$ 與 $E_2: 3x-4z-2=0$ 的夾角(取銳角)，則 θ 最接近的整數度數為_____。其中 $\sin 6^\circ=0.1045$ ， $\sin 7^\circ 30'=0.1305$ ， $\sin 7^\circ 40'=0.1334$ ， $\sin 7^\circ 50'=0.1363$ ， $\sin 8^\circ=0.1392$ 。
- (A) 7° (B) 8° (C) 83° (D) 82° 。

代碼：r41086c2

- () 7. 空間中，設 $A(0,4,4)$ ， $B(2,4,5)$ ， $C(4,-4,-4)$ ， $D(3,3,8)$ ，則在四面體 $D-ABC$ 中，以 $\triangle ABC$ 為底面時，高的長度為_____。
- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{7}$ 。

代碼：r41226m1

- () 8. 設平面 E_1 與平面 $E_2: 2x+3y-6z+3=0$ 平行，且點 $P(1,2,3)$ 到此兩平面等距離，則平面 E_1 之方程式為_____。
- (A) $2x+3y-6z+17=0$ (B) $2x+3y-6z+7=0$
(C) $2x+3y-6z+13=0$ (D) $2x+3y-6z+11=0$ 。

代碼：r41215m1

答案：BAABD DCA



歷屆試題

- () 1. 已知 $\Delta = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 3 \\ 1 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix}$ ，則 Δ 與下列哪一式 不恆等？

(A) $\begin{vmatrix} 6-x & 2 & 3 \\ 6-x & 2-x & 3 \\ 6-x & 2 & 3-x \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & 3-x \end{vmatrix}$ (C) $(6-x) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$
(D) $x^2(6-x)$ 。

代碼：a22101s1
(101 年統測 B)

- () 2. 求二次方程式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & x \\ 1 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$ 的解集合
(A) {1, 2} (B) {-1, 2} (C) {1, -2} (D) {-1, -2}。

代碼：a22102s1
(102 年統測 B)

- () 3. 若三階行列式 $\begin{vmatrix} x & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{vmatrix}$ 之值為 3，則階行列式 $\begin{vmatrix} x+2 & 13 & 16 \\ 11 & 14 & 17 \\ 12 & 15 & 18 \end{vmatrix}$ 之值為何？ (A) -9 (B) -3 (C) 3 (D) 9。

代碼：a22102k1
(102 年統測 C)

- () 4. 下列行列式之值何者與 $\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$ 之值相等？
(A) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ 1 & -2 & 3 \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} a & d & -1 \\ b & e & 2 \\ c & f & -3 \end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix} a & d & 1 \\ b & e & 2 \\ c & f & 3 \end{vmatrix}$ 。

代碼：a22103s1
(103 年統測 B)

- () 5. 三階行列式 $\begin{vmatrix} 101 & 102 & 103 \\ 201 & 202 & 203 \\ 301 & 302 & 304 \end{vmatrix}$ 之值為何？
(A) -202 (B) -201 (C) -101 (D) -100。

代碼：a22103k1
(103 年統測 C)

- () 6. 三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ 之值為何？ (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2。

代碼：a22104s1
(104 年統測 B)

- () 7. 若行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2$ ，則 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 + a_1 & b_1 - 2c_1 \\ a_2 & c_2 + a_2 & b_2 - 2c_2 \\ a_3 & c_3 + a_3 & b_3 - 2c_3 \end{vmatrix} = ?$
(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4。

代碼：a22104k1
(104 年統測 C)

- () 8. 設 a 、 b 、 c 均為實數，若 $(a-b)(b-c)(c-a)=-2$ ，則
- $$\begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 6c & 3c & 3b \\ 2c-2a & c-a & c-a \end{vmatrix}$$
- 之值為何？ (A)-12 (B)-6 (C)6 (D)12。

代碼：a22105k1
(105 年統測 C)

- () 9. 若兩個三階行列式的和 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ 之值為 20，則 $a = ?$
- (A) $\frac{1}{2}$ (B)2 (C) $\frac{5}{2}$ (D)3。

代碼：a22106s1
(106 年統測 B)

- () 10. 求三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 10 & 121 \end{vmatrix} = 0$ 所有解的和為何？
- (A)11 (B) $\frac{34}{3}$ (C)12 (D) $\frac{40}{3}$ 。

代碼：a22106k1
(106 年統測 C)

- () 11. 若二階行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 2 \end{vmatrix} = 5$ ，且 $\begin{vmatrix} x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ，則 $x+y$ 之值為何？
- (A)-1 (B)0 (C)1 (D)5。

代碼：a23107s1
(107 年統測 B)

- () 12. 設 b_1 、 b_2 、 b_3 、 c_1 、 c_2 及 c_3 均為實數，若二階行列式 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 13$ 、
- $$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 7$$
- 、
- $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$
- ，則三階行列式
- $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 2 & b_2 & c_2 \\ 3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ?$
- (A)5 (B)13 (C)25 (D)33。

代碼：a22107k1
(107 年統測 C)

- () 13. 若實數 x 滿足行列式 $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 4 & 6-2x & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4$ ，則 $\begin{vmatrix} 2 & 3-x & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1-x & -1 & -1 \end{vmatrix} = ?$
- (A)4 (B)-4 (C)8 (D)-8。

代碼：a22108s1
(108 年統測 B)

- () 14. 利用降階法將行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 依第二列展開，
- 可得 $a \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ x & 1 \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & z \end{vmatrix}$ ，則 $a+b+c+x+y+z = ?$
- (A)-4 (B)0 (C)5 (D)6。

代碼：a22109s1
(109 年統測 B)



() 15. 已知三階行列式 $\begin{vmatrix} a_1 - 2b_1 - 3c_1 & a_1 - 2c_1 & a_1 \\ a_2 - 2b_2 - 3c_2 & a_2 - 2c_2 & a_2 \\ a_3 - 2b_3 - 3c_3 & a_3 - 2c_3 & a_3 \end{vmatrix} = 8$ ，則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ?$

(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4。

代碼：a22109k1
(109 年統測 C)

() 16. 若 x 、 y 、 z 為相異實數，則三階行列式 $\begin{vmatrix} x+y & x-y & x \\ y+z & y-z & y \\ z+x & z-x & z \end{vmatrix} = ?$

(A) 0 (B) $(x-y)(y-z)(z-x)$

(C) $(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)$

(D) $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$ 。

代碼：110tcc11
(110 年統測 C)

() 17. 正四面體 (四個面皆為正三角形) $ABCD$ 的四個頂點坐標為 $A(0,0,0)$ 、 $B(2,0,0)$ 、 $C(1,\sqrt{3},0)$ 、 $D(x,y,z)$ ，其中 $z > 0$ ，則 $z = ?$ (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 。

代碼：111tcc13
(111 年統測 C)

() 18. 今有一飛機失事落海，救難直升機於失事地點附近偵測到黑盒子 (飛行記錄器的俗稱)，其所發出的訊號恰好位於直升機的正下方，但無法確定深度，直升機將位置訊息告知水上工作船，經船上人員推算，直升機位於工作船東方 140 公尺、北方 80 公尺的海平面上方 100 公尺處，並且偵測到該黑盒子與水上工作船的直線距離為 180 公尺，如圖 (三) 所示。根據上述訊息，若黑盒子在海平面下深度為 x 公尺，則 $x = ?$ (A) 60 (B) 70 (C) 80 (D) 90。

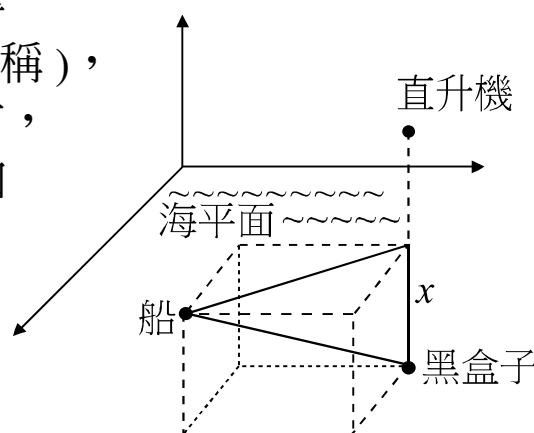


圖 (三)

代碼：111tcc14
(111 年統測 C)

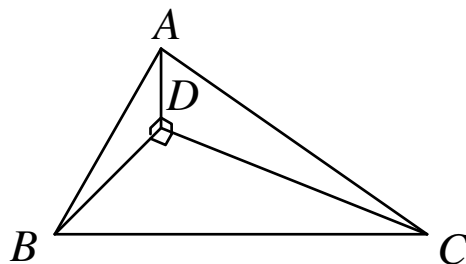
答案：BCBBD BDBD DAABC ACC

綜合練習

- () 1. 一正立方體的八個頂點中有四個頂點，各頂點彼此之間的距離都是1，則此正立方體的體積為 (A) $2\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (C) 1 (D) 2。

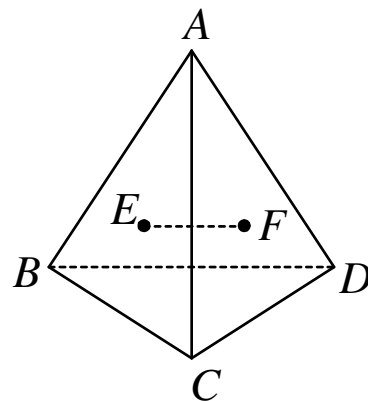
代碼：r31091a1

- () 2. 右下圖 $A-BCD$ 是一個四面體，
 $\overline{AD}$ ， $\overline{BD}$ ， $\overline{CD}$ 兩兩互相垂直於 D 點，
且 $\overline{AD}=1$ ， $\overline{BD}=2$ ， $\overline{CD}=2\sqrt{3}$ ，
則點 A 到 $\overline{BC}$ 的最短距離為
(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2。



代碼：r31223m1

- () 3. 學校蓋了一棟正四面體的玻璃溫室(如右圖)，
今欲將一鋼柱橫架在室中，作為吊花的橫樑。
其兩端分別固定在兩面牆 ABC 和 ACD 的重心
 E ， F 處。生物老師要先知道這個鋼柱多長，
才能請工人製作。雖然 $\overline{BD}$ 的長度很容易量出，
卻很難爬到 E ， F 點測量 L 長。生物老師在上
課時說出他的問題，立刻有一位同學舉手說他
有辦法。這位同學在紙上畫出右圖，
算出 $\overline{EF}:\overline{BD}$ 就解決了問題，問 $\overline{EF}:\overline{BD}=$
(A) 1:3 (B) 1:4 (C) 1:6 (D) 1:9。



代碼：r31085c1

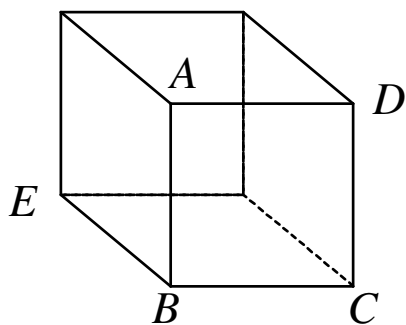
- () 4. 有一正四面體的三個頂點 $A(1,1,0)$ ， $B(1,0,1)$ ， $C(0,1,1)$ ，試求另一個頂點坐標為何？
(A) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ (B) $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ (C) $(1,1,1)$ (D) $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ 。

代碼：r32221m1

- () 5. 設 O 為原點，點 P 在第一卦限內，若點 P 與 z 軸之距離為 5，點 P 與 xy 平面之距離為 2，且 $\overline{OP}$ 在 zx 平面上的投影長為 $2\sqrt{5}$ ，則點 P 坐標為 (a,b,c) ，求 $a+b-c=$ (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11。

代碼：r32220m1

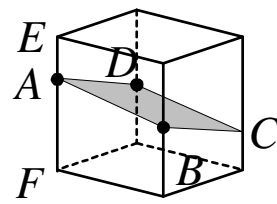
- () 6. 空間中一長方體如圖所示，
其中 $ABCD$ 為正方形， $\overline{BE}$ 為長方體的一邊，
已知 $\tan \angle AEB = \frac{5}{2\sqrt{6}}$ ，則 $\tan \angle CED =$
(A) $\frac{7}{2\sqrt{6}}$ (B) $\frac{7}{5}$ (C) $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$ 。



代碼：r31100c1



- () 7. 一正立方體被一平面截出一個四邊形 $ABCD$ (如下圖)，其中 $\overline{EA}:\overline{AF}=1:2$ ，且 B 、 D 分別為稜的中點，則 $\cos \angle DAB =$ (A) $\frac{6}{37}$ (B) $\frac{1}{26}$ (C) $\frac{1}{37}$ (D) $\frac{25}{26}$ 。



代碼：r33091c1

- () 8. 空間中，以 $\overline{AB}$ 為共同邊的兩正方形 $ABCD$ 、 $ABEF$ ，其邊長皆為 4，已知內積 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF} = 11$ ，則 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} =$ (A) -5 (B) 5 (C) 27 (D) -27 。

代碼：r34101a1

- () 9. 若 $\overrightarrow{a} = (1, 2, k)$ ， $\overrightarrow{b} = (2, 0, 3)$ ， $\overrightarrow{c} = (4, 0, 5)$ 且 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{c}$ 上正射影向量相同，則 $k =$ (A) $\frac{19}{5}$ (B) $\frac{13}{3}$ (C) $\frac{11}{7}$ (D) $\frac{14}{9}$ 。

代碼：r33208m1

- () 10. $\overrightarrow{a} = (1, 1, 2)$ ， $\overrightarrow{b} = (2, -4, x)$ ， $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角 60° ，則 $x =$ (A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{35}{11}$ (C) $\frac{16}{3}$ (D) $\frac{26}{5}$ 。

代碼：r33202m1

- () 11. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 20 \\ 5 & 50 & 1 \\ 10 & 1 & 5 \end{vmatrix} = ?$ (A) -99^2 (B) -100^2 (C) 99^2 (D) 100^2 。

代碼：a22097k1
(97 年統測 C)

- () 12. 若 $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x-1 & 2 & 4 \\ x-2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$ ，則 $x = ?$ (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 。

代碼：a22092k1
(92 年統測 C)

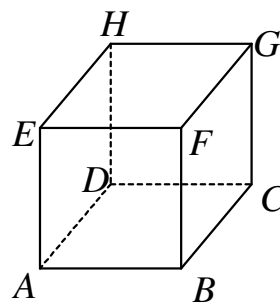
- () 13. 若 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 12$ 且 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = 156$ ，則 $\begin{vmatrix} 1 & a+1 & a^2(a+1) \\ 1 & b+1 & b^2(b+1) \\ 1 & c+1 & c^2(c+1) \end{vmatrix} = ?$ (A) 13 (B) 144 (C) 168 (D) 1872 。

代碼：a22095k1
(95 年統測 C)

- () 14. 空間中有兩點 $A(1, -2, 4)$ ， $B(-2, 0, -3)$ ，若直線 $\overline{AB}$ 與平面 $2x + y - 3z + 1 = 0$ 相交於 P 點，則 $\overline{AP}:\overline{BP} = ?$ (A) $3:2$ (B) $11:6$ (C) $5:3$ (D) $2:1$ 。

代碼：r41213m1

- () 15. 右圖中， $ABCD-EFGH$ 是一個正六面體，三頂點 $A(2, 2, 2)$ ， $B(0, 4, 3)$ ， $D(3, 4, d)$ ，若點 E 在第一卦限，求 E 的座標 (A) $(3, 3, 4)$ (B) $(4, 3, 4)$ (C) $(3, 4, 4)$ (D) $(4, 3, 3)$ 。



代碼：r34227m1

- () 16. 空間中三向量 $\vec{a} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{b} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{c} = (w_1, w_2, w_3)$,

所張平行六面體的體積為 $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ 的絕對值。

今已知 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 三向量所張平行六面體的體積為 5 ,

則 $2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 三向量所張平行六面體的體積為何？

(A)3 (B)5 (C)10 (D)15。

代碼：r34085c1

- () 17. 在坐標空間中，平面 $x - 2y + z = 0$ 上有一以點 $P(1, 1, 1)$ 為圓心的圓 T ,
而 $Q(-9, 9, 27)$ 為圓 T 上一點。若過 Q 與圓 T 相切的直線之一方向向量
為 $(a, b, 1)$, 則 $a + b = ?$ (A)8 (B)7 (C)6 (D)5。

代碼：r41093c1

- () 18. 設 $O(0, 0, 0)$ 為坐標空間中某長方體的一個頂點，且知 $A(2, 2, 1)$,
 $B(2, -1, -2)$, $C(3, -6, 6)$ 為此長方體中與 O 相鄰的三頂點。若平面
 $E: x + by + cz = d$ 將此長方體截成兩部分，其中包含頂點 O 的那一部
分是個正立方體。則序組 $(b, c, d) = ?$
(A)(-2, 2, 9) (B)(-2, 2, 9) (C)(-2, 2, 9) (D)(-2, 2, 9)。

代碼：r41097c1

答案：BDADA DCCAD AACBB CAC



筆記欄



單元 11 一次方程式與矩陣

主題一 一次方程組與矩陣列運算

1. 二元一次聯立方程式的解法：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (\text{其中 } a_1, b_1 \text{ 不能同時為 } 0, a_2, b_2 \text{ 不能同時為 } 0)$$

(1) 利用加減消去法或代入消去法

(2) 利用行列式解法(克拉瑪 (Cramer) 公式)

$$\text{令 } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{若 } \Delta \neq 0, \text{ 則 } x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

$$\text{例；解聯立方程式 } \begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases}$$

【解一】加減消去法：

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 6y = 36 \\ 4x + 6y = -10 \end{cases} \Rightarrow 13x = 26 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

【解二】克拉瑪 (Cramer) 公式：

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 2x + 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 13, \Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 26, \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -39$$

$$\Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-39}{13} = -3$$

(3) 矩陣列運算 (重點 3 介紹)



老師講解

$$\text{兩方程式 } \begin{cases} 3x + \frac{2y}{x} = 7 \\ 3ax - by = 19 \end{cases} \text{ 與 } \begin{cases} 5x + \frac{y}{x} = 7 \\ ax - 2by = 13 \end{cases}$$

有相同解，求 $a+b$ 之值。



學生練習

$$\text{兩方程式 } \begin{cases} x + \frac{3x}{y} = -8 \\ ax - 3by = -1 \end{cases} \text{ 與 } \begin{cases} 3x - \frac{x}{y} = 16 \\ ax + 2by = 14 \end{cases}$$

有相同解，求 $a+b$ 之值。

【代碼】 a23a01m2



2. 三元一次聯立方程式的解法：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

(1) 利用加減消去法

(2) 利用行列式解法(克拉瑪 (Cramer) 公式)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{若 } \Delta \neq 0, \text{ 則 } x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

例；解聯立方程式 $\begin{cases} 3x + y + 2z = 11 \\ 2x - y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$

【解一】加減消去法：

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 11 \\ 2x - y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{消 } z} \begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 7x + 7y = 21 \end{cases} \xrightarrow{\text{消 } y} \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

【解二】克拉瑪 (Cramer) 公式：

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14, \Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 28, \Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 42$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1, y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2, z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{42}{14} = 3$$

(3) 矩陣列運算 (重點 3 介紹)



老師講解

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + 3y + z = 10 \end{cases}, \text{ 求 } (x, y, z) \text{ 之解。}$$



學生練習

$$\text{若 } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 11 \\ 3x + y + 3z = 19 \end{cases}, \text{ 求 } x + y + z \text{ 之值。}$$

【代碼】a23a03m2



老師講解

若
$$\begin{cases} -2x + y - z = 1 \\ -2x + 5y + 2z = 2 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$$
，求 z 之值。



學生練習

若
$$\begin{cases} 2x + 3y - 3 = 0 \\ y - z + 8 = 0 \\ 3x - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$
，求 z 之值。

【代碼】a23a03m3



老師講解

今有一個三位數，各位數字的和為8，交換個位數字與百位數字後就比原數小99，交換十位數字與百位數字後就比原數小270，求這數。



學生練習

設三數和是73，第一數除以第二數得商數為2，餘數5，第二數除以第三數得商數2，餘數4，求此三數。

【代碼】a23b02m1



3. 高斯消去法：

(1) 係數矩陣與增廣矩陣：

$$\text{設方程組為} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}, \text{則:}$$

①係數矩陣：若只將未知數的係數依序列出，所得的矩陣稱為係數矩陣，

$$\text{即} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \text{為方程組所對應的係數矩陣。}$$

$$\text{②增廣矩陣：} \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array} \right] \text{稱為方程組所對應的增廣矩陣。}$$

(2) 矩陣的列運算：把矩陣下列三種方式的改變稱為列運算：

$$\text{①把某兩列互換: } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{②把某列乘上一個不為0的常數: } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \times 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{③把某列乘上一常數加至另一列: } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xleftarrow{\times(-3)} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(3) 高斯消去法：利用上述之列運算依照下列步驟

【步驟一】：作列運算，使第一列第一行為1。

【步驟二】：作列運算，使第二列以下的第一行全部化為0。

【步驟三】：作列運算，使第二列第二行為1，若沒辦法辦到，則使第二列第三行為1，
並使此1之下方的數全部化為0。

【步驟四】：重複步驟三，將下一列右一行化為1，直到最後一列為止。

經過上列步驟最後得出的矩陣就稱為梯(矩)陣，解一次方程組就是要將他的增廣矩陣經過矩陣的列算化為梯(矩)陣，如此即可求出原方程組的解。

這種解一次方程組的方法稱為高斯消去法。

5

老師講解

試利用矩陣的列運算解下列方程式

$$\begin{cases} x+3y+z=-22 \\ 2x-6y-z=7 \\ 2x-5y+z=1 \end{cases}$$

5

學生練習

利用高斯消去法解下列方程組

$$\begin{cases} x+3y-2z=-11 \\ 3x+2y-z=-4 \\ 2x-y+3z=13 \end{cases}$$

【代碼】f51201m1

6

老師講解

設矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 7 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & c \end{array} \right]$ 經列運算後變為

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right], \text{ 則 } a+b+c = \underline{\hspace{2cm}}.$$

6

學生練習

增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & b & 3 & -2 \\ a & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & c \end{array} \right]$ 經由列運算

$$\text{得 } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right], \text{ 則 } a+b+c = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【代碼】f51202m1



4. 二元一次聯立方程組的討論：

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{圖形表二直線}$$

- (1) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (即 $\Delta \neq 0$) $\Rightarrow$ 二線交一點，僅有一組解 $\Rightarrow$ 相容方程組
- (2) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (即 $\Delta = 0$ ， Δ_x, Δ_y 不全為 0) $\Rightarrow$ 二線平行，無解 $\Rightarrow$ 矛盾方程組
- (3) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (即 $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$) $\Rightarrow$ 二線重合，有無限多組解 $\Rightarrow$ 相依方程組



老師講解

設 $\begin{cases} (a+1)x + 2y = -1 \\ 4x + (a-1)y = 2 \end{cases}$ 無解，求 a 之值。



學生練習

若 $\begin{cases} 4x + (m+5)y + m = 0 \\ (m+2)x + (3m+1)y + 2 = 0 \end{cases}$
為相依方程組，求 m 之值。

【代碼】a23a04m3



老師講解

設 $\begin{cases} ax + 3y = 0 \\ 2x + 6y = b - 3 \end{cases}$ 除了 $(0,0)$ 以外，
尚有其他解，求 a, b 之值。



學生練習

設 $\begin{cases} 4x + ay = 0 \\ 2x + 3y = b + 2 \end{cases}$ 除了 $(0,0)$ 以外，
尚有其他解，求 $a+b$ 之值。

【代碼】a23b03m2

5. 三元一次聯立方程組的討論：

(1) 利用行列式解法(克拉瑪 (Cramer) 公式)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

① 若 $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ 方程式僅有一組解 (即 $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta z}{\Delta}$)

【例如】： $\begin{cases} x + 3y + z = -22 \\ 2x - 6y - z = 7 \\ 2x - 5y + z = 1 \end{cases}$, $\Delta \neq 0$, 且僅有一組解 $x = -9$ 、 $y = -4$ 、 $z = -1$

② 若 $\Delta = 0$, 但 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 有一不為 0 $\Rightarrow$ 方程式無解

【例如】： $\begin{cases} 3x - y - z = -1 \\ x + 2y - z = 0 \\ 5x - 4y - z = -3 \end{cases}$, $\Delta = 0$, 但 $\Delta x \neq 0 \Rightarrow$ 方程式無解

③ 若 $\Delta = 0$, 且 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0 \Rightarrow$ 方程式無限多組解或無解

【例如】： $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x + y + z = 7 \\ 8x + 7y + z = 31 \end{cases}$, $\Delta = 0$, 且 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0 \Rightarrow$ 方程式無限多組解

【例如】： $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$, $\Delta = 0$, 且 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0 \Rightarrow$ 方程式無解

(2) 利用矩陣列運算

三元一次方程組的增廣矩陣，經由列運算後，由其最後的結果，可判斷方程組解的個數：

① $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array} \right] \Rightarrow$ 方程組有唯一解 $(x, y, z) = (a, b, c)$ 。

② $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array} \right] \Rightarrow$ 若 $\begin{cases} \text{若 } c = 0 \Rightarrow \text{無限多組解} \\ \text{若 } c \neq 0 \Rightarrow \text{無解} \end{cases}$



老師講解

解下列方程組，每一題都用行列式與高斯消去法各解一次

$$(1) \begin{cases} 3x - y - z = -1 \\ x + 2y - z = 0 \\ 5x - 4y - z = -3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x + y + z = 7 \\ 8x + 7y + z = 31 \end{cases}$$



學生練習

利用高斯消去法解下列方程組

$$(1) \begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x - 4y + 8z = 3 \\ x + 2y - 2z = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 3x - y + 2z = 9 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

【代碼】 f51203m1



老師講解

若聯立方程式 $\begin{cases} x+2y+3z=ax \\ 2x+y+3z=ay \\ 2x+3y+z=az \end{cases}$ 有不為 $(0,0,0)$ 的解，則實數 $a=$ _____。



學生練習

若三元一次齊次方程式 $\begin{cases} ax+2y+3z=0 \\ 2x+ay+3z=0 \\ 2x+3y+az=0 \end{cases}$ 有不為 $(0,0,0)$ 的解，則實數 a 的值為_____。
【代碼】 r43205m1

【學生練習答案】

1. -1	2. 5	3. $\frac{79}{13}$	4. 45，20，8
5. $x=1$ ， $y=-2$ ， $z=3$		6. -1	7. 2
8. 4	9. (1)無限多組解 (2)無解		10. $a=-5$ 或2或3



回家功課

() 1. 解方程組 $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 4 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 1 \end{cases}$ ，則 $x - y = ?$ (A) $-\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ 。

代碼：a23201m1

() 2. 若 $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - y - 3z = 6 \\ x + 3y - 2z = 7 \end{cases}$ ，求 $x + y + z = ?$ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。

代碼：a23203m1

() 3. $\begin{cases} x - 3y + 2z = -9 \\ ax + y + z = 4 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 2x - y + bz = 1 \\ x + 3y - 2z = 13 \\ 2x - cy + z = 12 \end{cases}$ 表 x 、 y 、 z 的三元一次方程組，

代碼：r43212m1

若兩方程組為同義方程組，且恰有一組解，則 $a + b + c = ?$

(A) -1 (B) -2 (C) -3 (D) -4。

() 4. 有甲、乙、丙三數，其和為 20，甲數與乙數的二倍及丙數的三倍和為 44，甲數與乙數的二的二倍減去丙數得 -14，求此三數中最大為多少？
(A) 14 (B) 18 (C) 22 (D) 26。

代碼：a23212m1

() 5. 方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ ，已知 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1$ 、 $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 2$ 、 $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 3$ ，
則 $x + 2y = ?$ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。

代碼：r24301m1

() 6. 方程式 $\begin{cases} ax + 8y = 6 \\ 2x + ay = 3 \end{cases}$ 為矛盾方程組，則 $a = ?$
(A) 4 (B) -4 (C) ± 4 (D) 0。

代碼：a23220m1

() 7. 設 a 是實數，若聯立方程式 $\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = 1 \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$ 有唯一解，則 a 可能為
(A) -3 (B) -2 (C) 1 (D) 2。

代碼：r43207m1

() 8. 增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & -10 \\ 3 & 3 & -4 & 9 \end{array} \right]$ 經由列運算得 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array} \right]$ ，
求 $a + b + c = ?$ (A) -21 (B) -23 (C) -25 (D) -27。

代碼：f51205m1

() 9. 利用列運算求解方程組時，得 $\cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & 3 \\ 0 & 1 & b & -5 \\ 0 & 2 & -6 & c \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$ ，
數字 a, b, c 不慎汙損，求 $a + b + c = ?$ (A) 11 (B) 17 (C) -9 (D) -14。

代碼：f51205m7

答案：DBBBA BBCD

主題二 矩陣運算

1. 矩陣的定義：

(1) 定義：

設 m, n 是正整數， $a_{ij} (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ 是實數，形如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

的長方形陣列稱為 $m \times n$ 階矩陣，以 $[a_{ij}]_{m \times n}$ 表示這矩陣。

(2) 矩陣及相關名詞：

元	矩陣中每一個數叫作這矩陣之一個元。
列	在一矩陣中，位於同一水平線上的各元合稱為這個矩陣的一列，而且列的順序由上至下，依次叫作第一列、第二列、第三列、...
行	在一矩陣中，位於同一鉛直線上的各元合稱為該矩陣的一行，而且行的順序由左至右依次叫作第一行、第二行、第三行、...
階數	若一矩陣共有 m 列且有 n 行，我們稱之為 $m \times n$ 階矩陣，簡稱為 $m \times n$ 階矩陣。
方陣	當一矩陣之列數與行數相等，我們稱之為方陣，而 $n \times n$ 矩陣(方陣)，則簡稱為 n 階方陣。
(i, j) 元	在一個矩陣中，每個元都有它所屬的列與行；習慣上位於第 i 列、第 j 行的元稱為 (i, j) 元。

(3) 矩陣相等：

若兩矩陣之行數與列數都分別相等，且其 (i, j) 位置的元素都對應相等(即 $a_{ij} = b_{ij}$)，則稱 A 與 B 相等，以 $A = B$ 表示。



老師講解

若 $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ，其中 $a_{ij} = i^2 + 2j$ ，試寫出此矩陣 A 。



學生練習

矩陣 A 之 (i, j) 元定義為 $a_{ij} = 2i - j^2 + 1$ ，其中 $i = 1, 2, 3$ ， $j = 1, 2$ ，試求 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【代碼】f52201m1



老師講解

設 $\begin{bmatrix} a & 3 & 3x \\ x+y & 7 & x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & 3 & b \\ 4 & 7 & 2x+1 \end{bmatrix}$,
試求序組 $(x, y, a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



學生練習

若 $\begin{bmatrix} x+2y & z+3u \\ 2z-u & x-3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$,
則 $(x, y, z, u) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【代碼】 f52203m1

2. 矩陣的加減法與係數積：

(1) 矩陣的加法： $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{bmatrix}$

【性質】：① $A+B=B+A$

② $(A+B)+C=A+(B+C)$

(2) 矩陣的減法： $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & c-g \\ b-f & d-h \end{bmatrix}$

(3) 矩陣的係數積： $r \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra & rc \\ rb & rd \end{bmatrix}$

【比較】： $r \begin{vmatrix} a & d \\ b & c \end{vmatrix} = r(ad-bc) = \begin{vmatrix} ra & rc \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ra & c \\ rb & d \end{vmatrix}$



老師講解

設 $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$ ，

- (1) $A + B =$ _____。
(2) 若 $7X - 2A + B = A + 5X$ ，
則 $X =$ _____。



學生練習

設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ，

- $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ，試求：
(1) $2A + 3B =$ _____。
(2) 若矩陣 X 滿足 $2X - 4C = 2A + B$ ，
求 $X =$ _____。

【代碼】 f52204m1

【學生練習答案】

1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$	2. $(x, y, z, u) = (1, 2, 3, 4)$
3. (1) $\begin{bmatrix} 11 & -1 & 11 \\ 12 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{17}{2} \\ 0 & 7 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	



回家功課

() 1. 設 $\begin{bmatrix} \sin 2\theta & (\sin \theta + \cos \theta)^2 \\ \cos 4\theta & \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & q \\ p & r \end{bmatrix}$, 求 $2p + 4q + r = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(A)10 (B)11 (C)12 (D)13。

代碼：f52221m1

() 2. 某校調查電子群取得乙級和丙級證照的人數如下：

代碼：f52308m1

電子科： 一年級：乙級(0 人)、丙級(52 人)
 二年級：乙級(3 人)、丙級(58 人)
 三年級：乙級(13 人)、丙級(67 人)
 資訊科： 一年級：乙級(0 人)、丙級(54 人)
 二年級：乙級(5 人)、丙級(62 人)
 三年級：乙級(12 人)、丙級 72 人)
 控制科： 一年級：乙級(0 人)、丙級(32 人)
 二年級：乙級(2 人)、丙級(47 人)
 三年級：乙級(9 人)、丙級(53 人)

分別以矩陣 $\begin{bmatrix} 0 & 52 \\ 3 & 58 \\ 13 & 67 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 0 & 54 \\ 5 & 62 \\ 12 & 72 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 0 & 32 \\ 2 & 47 \\ 9 & 53 \end{bmatrix}$ 表示電子科、資訊科和控

制科各年級取得乙級和丙級證照的人數，求以 3×2 階矩陣表示電子群各年級取得乙級和丙級證照的人數可為：

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 138 \\ 10 & 167 \\ 34 & 192 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 16 & 177 \\ 17 & 188 \\ 11 & 132 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 15 & 117 \\ 22 & 143 \\ 14 & 187 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 113 \\ 13 & 153 \\ 21 & 178 \end{bmatrix}$ 。

() 3. 有一個 3×2 階矩陣，其元素由一個 1，兩個 2，三個 3 所構成，則此種矩陣共有幾個？

(A)6 (B)12 (C)60 (D)120。

代碼：f52222m1

答案：BAC

主題三 矩陣的乘法與二階乘法反方陣

1. 矩陣的乘法：

(1) 兩個矩陣可相乘的條件：

AB 有意義 $\Leftrightarrow A$ 的行數等於 B 的列數。

(2) 定義：

若 A 是一個 $m \times n$ 階矩陣，而 B 是一個 $n \times p$ 階矩陣，則其乘積 AB 是一個 $m \times p$ 階矩陣，而且 AB 的每個 (i, j) 元都等於 A 的第 i 列中各元(共有 n 個元)與 B 的第 j 行中各對應元(也有 n 個元)之乘積的和。

(3) 設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ， $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ ， $C = [c_{ij}]_{m \times p}$ ，則 $AB = C$ 表示：

$$AB = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

(第 i 列) (第 j 行) (第 i 列第 j 行)

故對每組 (i, j) ， $i = 1, 2, \dots, m$ ； $j = 1, 2, \dots, p$ ，

都有 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$ 。



老師講解

設 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ ，

求 $AB = ?$ $BA = ?$



學生練習

設 $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ，

求 $AB = ?$ $BA = ?$

【代碼】f52306m1



(4) 矩陣乘法的基本性質：

設 A, B, C 皆為可相乘之矩陣， r 為實數

① 結合律： $(AB) \cdot C = A \cdot (BC)$

② 分配律： $A(B+C) = AB + AC$ (左分配)、 $(B+C)A = BA + CA$ (右分配)

③ $(rA)B = r(AB) = A(rB)$

(5) 矩陣乘法與實數乘法的差異：

若 A, B 為矩陣

① 矩陣乘法沒有交換律： AB 與 BA 不一定相等

② 矩陣乘法沒有消去律：當 $AB = AC$ 且 $A \neq O$ 時， B 與 C 不一定相等。

【例如】：
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【註】：但 A, B, C 為 n 階方陣，當 $AB = AC$ 且 $\det A \neq 0$ 時， B 與 C 相等。

③ 若 A, B 為非零矩陣，其乘積 AB 可能為零矩陣。

即 $AB = O$ 時， A, B 可能皆不是 O 矩陣。

【例如】：
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



老師講解

設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，

$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ，求

(1) $(AB)C = \underline{\hspace{2cm}}$ ，(2) $A(BC) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



學生練習

設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ，

$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，求

(1) $(AB)C = \underline{\hspace{2cm}}$ ，(2) $A(BC) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【代碼】 f52307m1



老師講解

若 $A = \begin{bmatrix} 15 & -7 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -10 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, 求

(1) $AC + BC = \underline{\hspace{2cm}}$,

(2) $(A + B)C = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



學生練習

已知 $A = \begin{bmatrix} 99 & 98 \\ -97 & -96 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -96 & -97 \\ 98 & 99 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, 求 $AC + BC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【代碼】f52208m1

(6) 方陣的乘法：

設 A 是一方陣，

① $\underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{k \text{ 個}} = A^k$

② $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$

③ $(A^m)^n = A^{mn}$ 。 ($m, n \in N$)



老師講解

設 A, B 均為二階方陣，

且 $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, 則

$A^2 - B^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



學生練習

已知 A, B 是二階方陣，

$A + 2B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $A - 2B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

則 $A^2 - 4B^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【代碼】f52210m1



老師講解

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ 則 } A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10} = ?$$



學生練習

$$\text{設 } A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -4 & -5 \end{bmatrix},$$

滿足 $A + A^2 + A^3 + A^4 = kA$,
求實數 $k =$ _____。

【代碼】 f52214m1

(7) 乘法單位方陣性質：

①單位矩陣：

一個 $n \times n$ 階的方陣，從它的左上角到右下角之直線上的元都是1，而其它的元都是0，我們就稱它為 n 階單位方陣，以 I_n 表示。

$$\text{【例如】： } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

②設 A 為 $m \times n$ 階矩陣，則 $I_m A = A$ ， $A I_n = A$ 。

$$\text{【例如】： } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AI = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A$$

③若 I 為單位矩陣，則 $I^n = I$

【註】： I_n 就像實數乘法中的「1」，任何矩陣乘上 I_n 後的結果與原矩陣相同



老師講解

若 A 為 2 階方陣， I 為 2 階單位方陣，
若 m, n 為實數， $A^2 = 3A$ ，
 $(A + I)^2 = mA + nI$ ，求 m 、 n 之值。



學生練習

若 A 為 2 階方陣，且 $A^2 = -2A$ ，
 I 為 2 階單位方陣， $(A - 2I)^2 = mA + nI$
其中 m, n 為實數，求 m 、 n 之值。

【代碼】 f52302m1

2. 二階反矩陣的定義與公式：

(1) n 階方陣的乘法反方陣：

設 A 是一個 n 階方陣，若存在一個 n 階方陣 B ，使得 $AB = BA = I_n$ ，
則稱方陣 A 是可逆方陣，而方陣 B 稱為方陣 A 的乘法反方陣，以 $B = A^{-1}$ 表示。
亦即 $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ 。

(2) 二階方陣的反方陣：

若 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，且 $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

①若 $\det A = 0$ 時，則 A 沒有反方陣

②若 $\det A \neq 0$ 時， $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$



老師講解

設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ，則

- (1) 試求 A^{-1} 為_____，
- (2) 若 $AB = 2I_2$ ，求 $B =$ _____。



學生練習

設方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ，

- (1) 試求 $A^{-1} =$ _____，
- (2) 若 $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，求 $B =$ _____。

【代碼】f53201m1



老師講解

設 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$,

- (1) 若 $AX = B$, 試求 $X =$ _____ ,
 (2) 若 $YA = B$, 試求 $Y =$ _____ 。



學生練習

設矩陣 A 滿足 $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 6 & 19 & 29 \\ -1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$,
 試求矩陣 $A =$ _____ 。

【代碼】f53202m1



老師講解

設 $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, 若 A 的反矩陣不存在,
 則實數 $x =$ _____ 。



學生練習

設 $A = \begin{bmatrix} x-2 & 2 \\ -1 & 3-x \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣不存在,
 則 $x =$ _____ 。

【代碼】f53204m1

(3) 矩陣與方程組：

若方程式 $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ ，則可以矩陣乘法型式表示成 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$



老師講解

試利用反方陣解一次方程組 $\begin{cases} 3x+y=11 \\ 5x+2y=17 \end{cases}$



學生練習

試利用反方陣解一次方程組 $\begin{cases} 4x+y=9 \\ x-3y=-1 \end{cases}$

【代碼】 f53301m1



老師講解

已知 $\begin{cases} x+2y=u \\ 2x-3y=v \end{cases}$ ， $\begin{cases} 3u+4v=p \\ 2u+1v=q \end{cases}$ ，
若 x, y, p, q 四個未知數的關係式以矩陣表示為 $M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ ，則 $M =$ _____。



學生練習

已知 $\begin{cases} 2x+y=u \\ 3x-2y=v \end{cases}$ ， $\begin{cases} 4u+3v=p \\ u+2v=q \end{cases}$ ，
若 x, y, p, q 四個未知數的關係式以矩陣表示為 $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ ，則 $A =$ _____。

【代碼】 f53207m1

【學生練習答案】

1. $AB = \begin{bmatrix} 6 & 24 \\ 4 & 6 \\ 11 & 19 \end{bmatrix}$ BA 無法運算		2.(1) $\begin{bmatrix} 47 & 67 \\ 21 & 29 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 47 & 67 \\ 21 & 29 \end{bmatrix}$	
3. $\begin{bmatrix} 14 & 18 \\ 18 & 22 \end{bmatrix}$	4. $\begin{bmatrix} 15 & 19 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$	5. 40	6. $m=-6$ 、 $n=4$
7. (1) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $B = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$		8. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$	9. $x=1$ 或 4
10. $(x, y) = (2, 1)$	11. $\begin{bmatrix} 17 & -2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$		



回家功課

() 1. 若 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, 則 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(A) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -12 & 15 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -8 & 10 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 4 & 11 \end{bmatrix}$ 。

代碼：f52303m1

() 2. 設 A 為二階方陣，且 $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+3b \\ a-b \end{bmatrix}$, $B \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c+2d \\ 3c-d \end{bmatrix}$,

則 $A+B = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(A) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ 。

代碼：f52212m1

() 3. 已知 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$, 則 $X = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

代碼：f53302m1

() 4. 二階方陣 A 的反方陣是 $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, 求矩陣 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(A) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ 。

代碼：f53213m1

() 5. 設 A 是二階方陣，且 $A^3 = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 17 & -12 \\ -24 & 17 \end{bmatrix}$, 求 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ 。

代碼：f53203m1

答案：CABAD

歷屆試題

- () 1. 設二元一次方程組 $\begin{cases} 3x-7y=11 \\ 3y-7x=11 \end{cases}$ ，則其解為何？
 (A)無解 (B)無限多組解 (C) $x=6$ 、 $y=1$ (D) $x=-\frac{11}{4}$ 、 $y=-\frac{11}{4}$ 。
 代碼：a23100s1
 (100 年統測 B)
- () 2. 某餐廳有 A、B 及 C 三種套餐。今志志訂 2 個 A 套餐，2 個 B 套餐，總共 2000 元；敏敏訂 3 個 A 套餐，1 個 B 套餐，總共 2400 元；耀耀訂 1 個 A 套餐，1 個 B 套餐，2 個 C 套餐，總共 3200 元。若訂 6 個 A 套餐，4 個 B 套餐及 2 個 C 套餐，則總共為多少元？ (A)7400 (B)7600 (C)7800 (D)8000。
 代碼：a23100s2
 (100 年統測 B)
- () 3. 已知方程組 $\frac{x+y+1}{4} = \frac{2x-1}{5} = \frac{y+1}{2}$ 的解為 (a,b) ，求 $a-b$ 之值？
 (A)-2 (B)-1 (C)0 (D)1。
 代碼：a23102s1
 (102 年統測 B)
- () 4. 已知 $a > 0$ ，且方程式組 $\begin{cases} -x+3y=ax \\ 3x+y=ay \end{cases}$ 有無限多組解，則 $a = ?$
 (A)1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{10}$ 。
 代碼：a23102k1
 (102 年統測 C)
- () 5. 設 x 、 y 、 k 均為實數，若 $|x+1|+|2x-y+4|+|x+3y+k|=0$ ，則 k 之值何？ (A)3 (B)1 (C)-4 (D)-5。
 代碼：a23103k1
 (103 年統測 C)
- () 6. 已知 a, b 為實數，若 $\begin{cases} -2x-6y=8 \\ ax+by=2 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 3x+5y=-4 \\ 2ax+(a-b)y=6 \end{cases}$ 有相同的解，則 $(a+b)^2 = ?$ (A)9 (B)16 (C)25 (D)36。
 代碼：a23104s1
 (104 年統測 B)
- () 7. 若二元一次方程式組 $\begin{cases} 2x+3y=-4 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ 的解為 $x=a$ 、 $y=b$ ，則 $a+b = ?$
 (A) $-\frac{23}{17}$ (B) $-\frac{21}{17}$ (C) $\frac{21}{17}$ (D) $\frac{23}{17}$ 。
 代碼：a23104k1
 (104 年統測 C)



() 8. 已知 $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{4}{x} - \frac{9}{y} = -1 \end{cases}$ ，則下列何者正確？

(A) $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}$ ， $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}$ (B) $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}$ ， $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}$

(C) $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}$ ， $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}$ (D) $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}$ ， $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}$ 。

代碼：a23105s1
(105 年統測 B)

() 9. 若三元一次聯立方程式 $\begin{cases} ax - ay = 5 \\ ax - y + (1-a)z = 3 \\ (1-a)y + (2a-3)z = 1 \end{cases}$ 恰有一解，則 a 可能為下列何值？ (A)0 (B)1 (C)2 (D)3。

代碼：a23105k1
(105 年統測 C)

() 10. 設 x 、 y 、 z 為整數，且 $2|x+y|+3|x-y-4|+5|2x+3y-z|=4$ ，則 z 可為下列何者？ (A)0 (B)3 (C)5 (D)11。

代碼：a23106k1
(106 年統測 C)

() 11. 設 t 為實數，且三元一次聯立方程式 $\begin{cases} (t+1)x + (t-1)z = 1 \\ (t+1)y + z = 3 \\ (t+1)y + tz = 5 \end{cases}$ 無解，則 t 可為下列何者？ (A)-2 (B)0 (C)1 (D)2。

代碼：a23106k2
(106 年統測 C)

() 12. 設 $\begin{cases} 3x+5y+z=15 \\ 2x+4y+z=12 \\ 5x+y+2z=3 \end{cases}$ ，則 $y=?$ (A)2 (B)3 (C)4 (D)5。

代碼：a23107k1
(107 年統測 C)

() 13. 已知下列兩個聯立方程組有相同的解 (x, y, z) ，試問 a 的值為何？
 $\begin{cases} 3x-4y+z=4 \\ 5x+2y-2z=3 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} 2x+3y-2z=a \\ 4x+5y-3z=1 \end{cases}$
 (A)-1 (B)0 (C)1 (D)2。

代碼：a23108k1
(108 年統測 C)

() 14. 若 k 為實數，且二元一次聯立方程組 $\begin{cases} kx+3y+k+1=0 \\ x+4(k+1)y+8k^2+1=0 \end{cases}$ 有無限多組解，則 k 可為下列何值？
 (A) $-\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$ 。

代碼：110tcc10
(110 年統測 C)

- () 15. 在一個園遊會的攤位遊戲中，遊戲規則如下：在一個桶子裡有三種球，抽中紅球可得 x 點，抽中黃球可得 y 點，但抽中黑球則必須扣掉 z 點。每個人抽 10 次，每次抽一個球，最後依照得到的點數來兌換獎品。已知小華抽中 3 個紅球、3 個黃球、4 個黑球，共得 10 點；小明抽中 4 個紅球、3 個黃球、3 個黑球，共得 21 點；小玲抽中 2 個紅球、6 個黃球、2 個黑球，共得 26 點。若小蘭抽中 3 個紅球、5 個黃球、2 個黑球，則小蘭得到的點數為何？ (A)28 (B)30 (C)32 (D)39 。

代碼：111tcc11
(111 年統測 C)

- () 16. 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ，且 $AB = A + B$ ，則 $c = ?$
(A)-1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D)1 。

代碼：111tcc17
(111 年統測 C)

答案：DBDDD AAADB CBBCA C



綜合練習

- () 1. 設聯立方程組 $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ ax+by=4 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 2ax+by=-1 \end{cases}$ 有共同解，則 $a+b$ 之值為： (A)-14 (B)14 (C)4 (D)-4 (E)-8。

代碼：a23089g1

- () 2. 一礦物內含 A、B、C 三種放射性物質，放射出同一種輻射。已知 A、B、C 每公克分別會釋放出 1 單位、2 單位、1 單位的輻射強度，又知 A、B、C 每過半年其質量分別變為原來質量的 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 倍。於一年前測得此礦物的輻射強度為 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度為 22 單位，且目前此礦物的輻射強度為 8 單位，則目前此礦物中 A、B、C 物質的總質量為多少公克？
(A)7 (B)10 (C)11 (D)13。

代碼：f31100c1

- () 3. 相傳包子是三國時白羅家族發明的。孔明最喜歡吃他們所作的包子，因此白羅包子店門庭若市，一包難求，必須一大早去排隊才買得到。事實上，白羅包子店只賣一種包子，每天限量供應 999 個，且規定每位顧客限購三個，而購買一個，二個，三個包子的價錢分別是 8，15，21 分錢。在那三國戰亂的某一天，包子賣完了，老闆跟老闆娘有如下的對話，老闆說：「賺錢真辛苦，一個包子成本就要 5 分錢，今天到底賺了多少錢？」老闆娘說：「今天共賣了 7195 分錢，只有 432 位顧客買到包子。」請問當天白羅包子店淨賺多少錢？
(A)1700 (B)2100 (C)2200 (D)2350。

代碼：f51090b1

- () 4. 對矩陣 $\begin{bmatrix} 4 & 9 & a \\ 3 & 7 & b \end{bmatrix}$ 作列運算若干次後得到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，則數對 $(a, b) = ?$
(A)(-5, -4) (B)(13, 10) (C)(7, 16) (D)(1, 2)。

代碼：f51098a1

- () 5. 方程組 $\begin{cases} x-4y+z=2 \\ 3x-5y+2z=5 \\ x+6y-2z=-1 \end{cases}$ 的增廣矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ 經列運算簡化為矩陣 $\begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \beta & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$ ，則 $\alpha + \beta + \gamma =$
(A)-1 (B)2 (C)3 (D)5。

代碼：f51206m1

- () 6. 下列增廣矩陣所表示的一次方程組何者無限多解？

$$(A) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad (B) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \quad (C) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 2 & 4 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5 \end{bmatrix}$$

$$(D) \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & | & 3 \\ 1 & 2 & 3 & | & 4 \\ 2 & 2 & 2 & | & 2 \end{bmatrix}。$$

代碼：f51301m1

- () 7. 設 $a_1, a_2, \dots, a_9$ 為等差數列且 k 為實數。

若方程組
$$\begin{cases} a_1x - a_2y + 2a_3z = k + 1 \\ a_4x - a_5y + 2a_6z = -k - 5 \\ a_7x - a_8y + 2a_9z = k + 9 \end{cases}$$
 有解，則 $k = ?$

(A) -1 (B) -2 (C) -3 (D) -5。

代碼：r43106c1

- () 8. 設聯立方程組
$$\begin{cases} 6x + (a-2)y - 7a + 17 = 0 \\ (a+5)x - 2y + 8a + 24 = 0 \end{cases}$$
，若此方程組有無限多組解，則 a 之值為 (A) 2 (B) -1 (C) -2 (D) 3。

代碼：a23087z2

- () 9. 設
$$\begin{cases} px + 2y = q - 2 \\ (2p-1)x + 2y = 0 \end{cases}$$
 除了 (0,0) 以外，尚有其他解，求 $p+q = ?$
- (A) 0 (B) -4 (C) 3 (D) 以上皆非。

代碼：a23222m1

- () 10. 已知下列聯立方程式
$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$
 無解，則 $k = ?$
- (A) 2 (B) 1 (C) -2 (D) 3。

代碼：f51086a1

- () 11. 設 n 為正整數，符號 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n$ 代表矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 自乘 n 次，
- 令 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ ，請選出錯誤的選項
- (A) a_1, a_2, a_3 為等比數列 (B) d_1, d_2, d_3 為等比數列
- (C) b_1, b_2, b_3 為等差數列 (D) c_1, c_2, c_3 為等差數列。

代碼：f52304m1



- () 12. 請問下列哪一個選項中的矩陣成績等於 $\begin{bmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{bmatrix}$? 代碼：f52101b1
- (A) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (B) $[2 \ 3] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
 (D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 。
- () 13. 設二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，求 $b = ?$ 代碼：f52215m1
- (A) -36 (B) -45 (C) -55 (D) -66。
- () 14. 設 A, B, C 均為 n 階方陣，下列各性質，何者必成立？ 代碼：f52305m1
- (A) $(A+B)C = CA+CB$
 (B) $(AB)C = A(BC)$
 (C) 若 $A^2 = I$ 則 $A = I$ 或 $A = -I$
 (D) $(AB)^2 = A^2B^2$ 。
- () 15. 小惠有一台自行車，平時用一副四位數密碼的號碼鎖鎖住。有一天，志明向他借用這台自行車，他答應借用，但只告訴志明號碼鎖的密碼 $abcd$ 符合以下二階方陣的等式： $\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -10 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ，志明卻一直無法解出正確的密碼，而不能使用這台自行車。請你(妳)幫忙志明求出這副號碼鎖的正確密碼。 代碼：f53099b1
- (A) 4589 (B) 2153 (C) 4173 (D) 7321。
- () 16. 設 P, Q, R 為二階方陣，已知 $PQ = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$ ， $PR = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ ，
 且 $Q + R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ，若 $P = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ，求 $a+b+c+d = ?$ 代碼：f53103b1
- (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11。
- () 17. 設 A, B 為兩個二階方陣，已知 $AB = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ ， $AB^2 = \begin{bmatrix} 25 & 50 \\ 29 & 46 \end{bmatrix}$ ，
 則 $B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ ，求 $a+b+c+d = ?$ 代碼：f53214m1
- (A) 12 (B) 10 (C) 8 (D) 6。
- () 18. 無論 x 為任意數，下列何者恆有乘法反方陣？ 代碼：f53303m1
- (A) $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 2x & 1-x \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} x & x+1 \\ -1 & x-3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ -5 & x+2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} x & x+1 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ 。

- () 19. 設 x, c 為實數，方陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & x \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ 。已知 A 的反方陣恰好是 B 的 c 倍（其中 $c \neq 0$ ），則數對 $(x, c) = ?$ （請化為最簡分數）
 (A) $(3, \frac{1}{13})$ (B) $(-3, \frac{1}{3})$ (C) $(2, \frac{1}{7})$ (D) $(-2, \frac{1}{11})$ 。

代碼：f53105b1

- () 20. 下表是兩年前三種零食分別在兩間超市的單價：（單位：元／包）

代碼：f53104b1

	超市甲	超市乙
蘇打餅	30	28
薯片	55	50
魷魚絲	70	66

上表以單價矩陣 $\begin{bmatrix} 30 & 28 \\ 55 & 50 \\ 70 & 66 \end{bmatrix}$ 表示。如果這兩間超市都以每年 3% 的比例調漲物品的價格，請問下列哪些選項的計算結果可以代表現在這些零食在這兩間超市的單價矩陣？

- (A) $2 \cdot (1.03) \cdot \begin{bmatrix} 30 & 28 \\ 55 & 50 \\ 70 & 66 \end{bmatrix}$
- (B) $\begin{bmatrix} 2 \cdot (1.03) & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot (1.03) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot (1.03) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 28 \\ 55 & 50 \\ 70 & 66 \end{bmatrix}$
- (C) $\begin{bmatrix} 1.03 & 0 & 0 \\ 0 & 1.03 & 0 \\ 0 & 0 & 1.03 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 28 \\ 55 & 50 \\ 70 & 66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.03 & 0 \\ 0 & 1.03 \end{bmatrix}$
- (D) $\begin{bmatrix} (1.03)^2 & (1.03)^2 & (1.03)^2 \\ (1.03)^2 & (1.03)^2 & (1.03)^2 \\ (1.03)^2 & (1.03)^2 & (1.03)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30 & 28 \\ 55 & 50 \\ 70 & 66 \end{bmatrix}$ 。

答案：AACBB DDBCC CECBD CBCAC



筆記欄



單元 12 二元一次不等式及其應用

主題一 二元一次不等式的圖形

1. 二元一次不等式：

設 a, b, c 為實數，且 $a^2 + b^2 \neq 0$ ，則 $ax + by + c > 0$ 、 $ax + by + c \geq 0$ 、 $ax + by + c < 0$ 、 $ax + by + c \leq 0$ ，均稱為二元一次不等式。

2. 二元一次不等式的圖形：

(1) 設直線 $L: ax + by + c = 0$ 且 $a > 0$ ，則：

$ax + by + c > 0$ 的圖形為直線 L 的右側半平面。

$ax + by + c \geq 0$ 的圖形為直線 L 的右側半平面及直線 L 。

$ax + by + c < 0$ 的圖形為直線 L 的左側半平面。

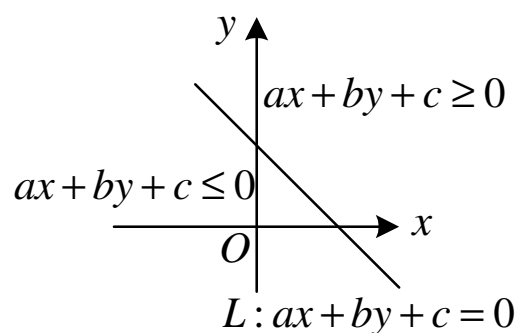
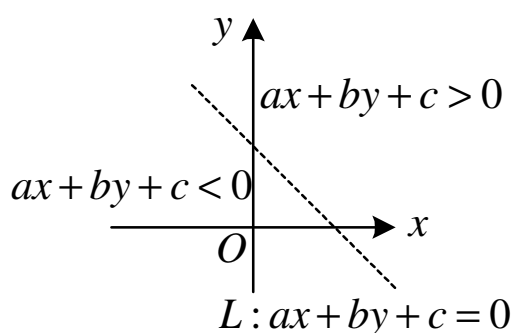
$ax + by + c \leq 0$ 的圖形為直線 L 的左側半平面及直線 L 。

註：❶ 若不等式中 x 項係數 $a < 0$ 時，

須先移項整理，使 x 項係數為正數。

❷ 若不等式含等式(表示包含直線)，則圖形以實線畫出，

若不等式不含等式(表示不包含直線)，則圖形以虛線畫出。



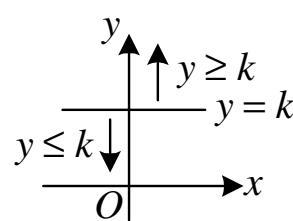
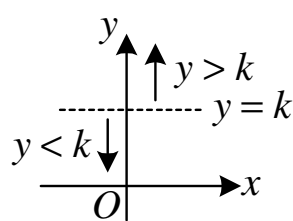
(2) 設直線 $L: y = k$ ， $k \in R$ ，則：

$y > k$ 圖形為直線 L 之上半平面。

$y \geq k$ 圖形為直線 L 之上半平面及直線 L 。

$y < k$ 圖形為直線 L 之下半平面。

$y \leq k$ 圖形為直線 L 之下半平面及直線 L 。





老師講解

圖示下列二元一次不等式的解：

(1) $3x - 2y + 6 = 0$

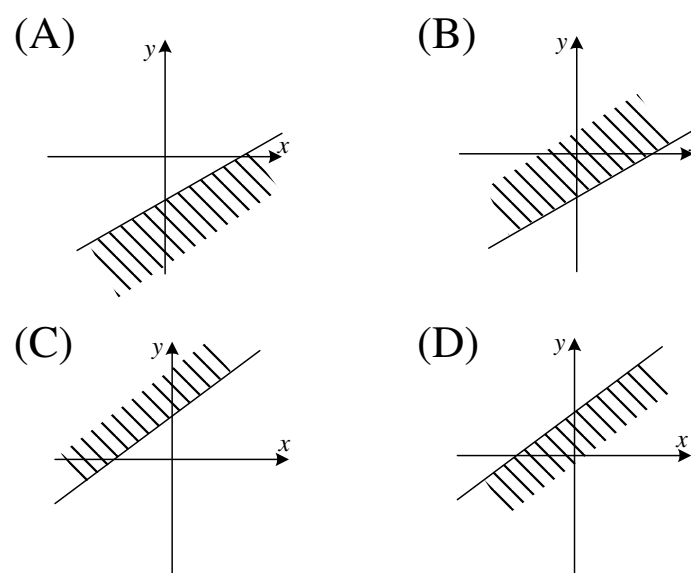
(2) $3x - 2y + 6 \geq 0$

(3) $3x - 2y + 6 < 0$



學生練習

下列何者可能為 $3x - 4y - 12 \leq 0$ 之圖形？



【代碼】a33a01m2

3. 同側、異側的判別：

設直線 $L: ax + by + c = 0$ ，且平面上相異兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，

(1) A 、 B 兩點在直線 L 之同側 $\Rightarrow (ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) > 0$

(2) A 、 B 兩點在直線 L 之異側 $\Rightarrow (ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) < 0$

註：若 $\overline{AB}$ 與 L 相交(異側或線上) $\Rightarrow (ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c) \leq 0$



老師講解

若兩點 $(3,1)$ 與 $(-4,6)$ 分別在直線 $3x - 2y + c = 0$ 之相反兩側，求 c 的範圍。



學生練習

若兩點 $(1,2)$ 與 $(-1,1)$ 分別在直線 $ax + y - 3 = 0$ 之相反兩側，求 a 的範圍。

【代碼】a33a01m3



老師講解

設 $P(2,3)$ ， $Q(-1,2)$ ，若 $\overline{PQ}$ 與直線 $L: x + y + k = 0$ 相交，試求 k 之範圍。



學生練習

設 $A(3,1)$ ， $B(-4,6)$ ，若 $\overline{AB}$ 與直線 $L: 3x - 2y + k = 0$ 相交，試求 k 之範圍。

【代碼】a33b01m2



4. 二元一次聯立不等式與圖形：

兩個或兩個以上的二元一次不等式並列，其圖形為各二元一次不等式圖解的交集。



老師講解

圖示 $\begin{cases} 3x+4y \leq 12 \\ 2x-y \geq 4 \end{cases}$ 二元一次不等式的解：



學生練習

滿足聯立不等式 $\begin{cases} 2x-3y \geq 6 \\ 2x+5y \leq 10 \end{cases}$ 之解的圖形
沒有通過第幾象限？

【代碼】 a33a02m2



老師講解

試求不等式 $\begin{cases} |2x+3y| \leq 6 \\ |2x-3y| \leq 6 \end{cases}$ 之圖形面積。



學生練習

試求不等式 $\begin{cases} |x+y| \leq 2 \\ |x-y| \leq 2 \end{cases}$ 之圖形面積。

【代碼】 a33b02m2



老師講解

試求下列各不等式圖形所圍成之面積：

(1) $3|x| + 2|y| \leq 6$

(2) $3|x+2| + 2|y-1| \leq 6$



學生練習

試求 $3|x-1| + 4|y+2| \leq 12$ 所圍的積。

【代碼】a33b03m2

【加強題】

1. 試作不等式 $6-2y \leq x-2 \leq y \leq 6$ 的圖形，並求此圖形圍成的區域面積_____。



2. 試求 $\begin{cases} (x-y-2)(2x+y-4) \leq 0 \\ -2 \leq y \leq 4 \end{cases}$ 圖形面積 = ____。

3. 坐標平面上，不等式組 $\begin{cases} 4x-3y-20 \leq 0 \\ 3x+8y-56 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ ，所表示的區域中，有 ____ 個格子點。

【學生練習答案】

1. (B)	2. $a > 1$ 或 $a < -2$	3. $-7 \leq k \leq 24$	4. 第二象限
5. 8	6. 24		

回家功課

- () 1. 已知直線 L 的方程式為 $3x - y = k$ 。若平面上兩點 $P(-1, 1)$ 、 $Q(2, -1)$ 分別在直線 L 的左右側，則 k 的範圍為何？
(A) $-4 < k < 7$ (B) $-7 < k < 4$
(C) $7 < k$ 或 $k < -4$ (D) $4 < k$ 或 $k < -7$ 。 代碼：a33104p2
- () 2. 求聯立不等式 $\begin{cases} |x + y| \leq 8 \\ |x - y| \leq 8 \end{cases}$ 之圖形區域面積為何？
(A) 64 (B) 86 (C) 100 (D) 128。 代碼：a33096s2
- () 3. 在坐標平面上，滿足不等式組 $5x + 2y \leq 180$ 、 $x + y \leq 45$ 、 $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$ 的區域面積為何？
(A) 270 (B) 675 (C) 945 (D) 1620。 代碼：a33094s1

答案：ADC



主題二 線性規劃

- (1) ①將題目中的限制條件用二元一次不等式聯立來表示。
②以線性函數 $f(x, y)$ 表示題目中所要達成的目標(目標函數)。
- (2) 圖解二元一次不等式聯立圖形，並找出可行解區域。
- (3) 求出目標函數 $f(x, y)$ 的最大值與最小值。



老師講解

已知 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - 3y + 9 \geq 0 \\ 2x + y - 10 \leq 0 \end{cases}$ ，試求：

- (1) 所圍成圖形的面積
- (2) $f(x, y) = x - 2y + 1$ 的最大值與最小值



學生練習

若滿足不等式 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + 3y - 12 \leq 0 \\ 2x + y - 8 \leq 0 \end{cases}$ 之條件，

試求 $f(x, y) = 3x + 2y$ 的極大值。

【代碼】a33a03m2



老師講解

有一建築用地總面積3000平方公尺，以總成本不超過2000萬元的經費下建築甲、乙兩種不同形式的住宅，已知甲形式住宅每棟佔地200平方公尺，造價400萬元，可獲利200萬元，乙形式住宅每棟佔地300平方公尺、造價100萬元、獲利250萬元，則在此建築此兩種住宅，試求總共最多可獲利多少元。



學生練習

設工廠製造一單位的甲產品需 A 原料2斤， B 原料4斤；製造一單位的乙產品需 A 原料6斤， B 原料2斤。而此工廠每月配料為 A 原料200斤， B 原料100斤；若甲產品每單位利潤600元，乙產品每單位利潤1000元，試求此工廠最大獲利。

【代碼】a33b05m2



老師講解

設有甲、乙兩種食物，甲每份價格 40 元，乙每份價格 30 元。甲每份含 A 營養素 10 單位，B 營養素 15 單位；乙每份含 A 營養素 20 單位，B 營養素 10 單位。若每人一天至少需要 A 營養素 80 單位，B 營養素 60 單位，在費用最少的原則下，應如何安排甲、乙兩種食物的單位量以獲得足夠的營養？



學生練習

根據研究，每個人每週至少需要 A, B, C 三種營養素分別為 26 單位、30 單位、30 單位。今有甲、乙兩種食物，其價格每公斤各為 200 元與 300 元，甲食物每公斤含有 A, B, C 三種營養素分別為 1 單位、3 單位、1 單位，而乙食物每公斤含有 A, B, C 三種營養素分別為 3 單位、1 單位、5 單位，試問每個人每週能維持最低的營養標準，而費用最低為多少？

【代碼】a33b06m2

【學生練習答案】

1. 13	2. 36000 元	3. 3400	
-------	------------	---------	--

回家功課

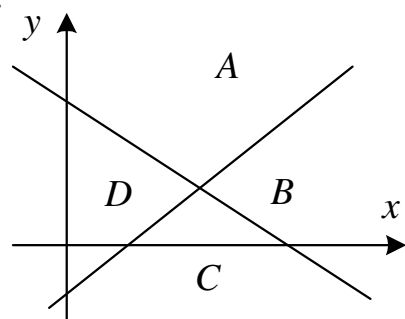
- () 1. 若 $5|x+2|+2|y-3|\leq 10$ 之條件下，求 $2x+y$ 之最大值為
(A) -2 (B) 1 (C) 3 (D) 4 。 代碼：a33b04m1
- () 2. 在座標平面上，在 $|x-1|+|y-3|\leq 2$ 的平面區域中， $x+2y$ 的最大值為何？
(A) 3 (B) 5 (C) 9 (D) 11 。 代碼：a33097s1
- () 3. 在 $x\geq 0$ ， $y\geq 0$ ， $3x+y\leq 30$ ， $x+2y\leq 20$ 的條件下，函數 $4x+y$ 的最大值為何？
(A) 30 (B) 38 (C) 40 (D) 80 。 代碼：a33092s1
- () 4. 兩種款式的毛織品，
每一件 A 款式毛織品的製作需用紅色毛線 40 公尺，白色毛線 30 公尺，利潤 40 元；每一件 B 款式毛織品的製作需用紅色毛線 20 公尺，白色毛線 30 公尺，利潤 25 元。現有紅色毛線 800 公尺，白色毛線 900 公尺，全部均可使用，問最大利潤為何？
(A) 800 元 (B) 900 元 (C) 1000 元 (D) 1200 元 。 代碼：a33099p2
- () 5. 設有甲、乙兩種食物，甲每份價格 20 元，乙每份價格 10 元。甲每份含 A 營養素 5 單位，B 營養素 10 單位；乙每份含 A 營養素 20 單位，B 營養素 15 單位。若每人一天至少需要 A 營養素 50 單位，B 營養素 60 單位，在費用最少的原則下，應如何安排甲、乙兩種食物的單位量以獲得足夠的營養？
(A) 甲 0，乙 4 (B) 甲 10，乙 0 (C) 甲 $\frac{18}{5}$ ，乙 $\frac{8}{5}$ (D) 甲 $\frac{13}{5}$ ，乙 $\frac{13}{5}$ 。 代碼：a33089s1

答案：DDCBA



歷屆試題

- () 1. 在直角坐標平面上，設點 $(1, b)$ 滿足不等式 $ax + 3y - 6 \geq 0$ ，則數對 (a, b) 可為下列何者？ (A)(1,1) (B)(-5,5) (C)(-1,-1) (D)(5,-5)。
代碼：a33100s1
(100 年統測 B)
- () 2. 設 a 、 b 為實數，若一元二次不等式 $ax^2 + x + b > 0$ 的解集合為 $\{x | -\frac{1}{5} < x < \frac{2}{3}, x \text{ 為實數}\}$ ，則 $2a + b = ?$ (A)-5 (B)-4 (C)4 (D)5。
代碼：a31100k1
(100 年統測 C)
- () 3. 下列二元一次聯立不等式中，何者代表圖(一)所示之三角區域？
(A) $\begin{cases} x - 4y + 1 \leq 0 \\ 2x - 3y - 3 \geq 0 \\ x + y - 9 \leq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x - 4y + 1 \leq 0 \\ 2x - 3y - 3 \leq 0 \\ x + y - 9 \leq 0 \end{cases}$
(C) $\begin{cases} x - 4y + 1 \geq 0 \\ 2x - 3y - 3 \geq 0 \\ x + y - 9 \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x - 4y + 1 \geq 0 \\ 2x - 3y - 3 \leq 0 \\ x + y - 9 \leq 0 \end{cases}$
圖(一)
- () 4. 已知點 Q 為二元一次聯立不等式 $\begin{cases} 2x + 3y + 6 \geq 0 \\ 5x - 4y + 20 < 0 \end{cases}$ 圖形上的一點，則 Q 之坐標可能為下列何者？ (A)(-5,0) (B)(-2,0) (C)(0,5) (D)(0,6)
代碼：a33101s1
(101 年統測 B)
- () 5. 在 $x \geq 0$ ， $y \geq 1$ ， $x + y \leq 2$ 的條件下， $2x - y$ 的最大值為何？
(A)-2 (B)-1 (C)1 (D)2。
代碼：a33101k1
(101 年統測 C)
- () 6. 受制於 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 3 \\ 2x + y \leq 4 \end{cases}$ 的條件下，求 $f(x, y) = x + 3y$ 的最大值。
(A)0 (B)7 (C)9 (D)12。
代碼：a33102k1
(102 年統測 C)
- () 7. 設 $x \geq -1$ 且 $y \geq -2$ ，求共有幾組整數解 (x, y) 滿足方程式 $x + y = 2014$ ？
(A)2018 (B)2019 (C)2020 (D)2021。
代碼：a33103s1
(103 年統測 B)
- () 8. 在聯立不等式組 $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ ， $2x + y - 6 \leq 0$ ， $x + 2y - 6 \leq 0$ 的可行解區域中， x 、 y 均為整數解的點坐標 (x, y) 共有多少個？
(A)8 (B)9 (C)11 (D)無限多個。
代碼：a33103k1
(103 年統測 C)

- () 9. 在聯立不等式 $\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x + 3y \leq 7 \\ x - 4y \leq 0 \end{cases}$ 的條件下，目標函數 $f(x, y) = 2x - 3y - 2$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m = ?$ (A) -5 (B) -3 (C) 3 (D) 5。
代碼：a33104k1
(104 年統測 C)
- () 10. 滿足二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ 3x - y \leq 6 \\ 5x + 2y \geq 10 \end{cases}$ 的整數解 (x, y) 共有幾個？
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6。
代碼：a33105k1
(105 年統測 C)
- () 11. 在滿足二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 3 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$ 的條件下。若 $3x - 5y$ 的最大值及最小值分別為 M 及 m ，則 $M + m$ 之值為何？
(A) -9 (B) -4 (C) -3 (D) 3。
代碼：a33107s1
(107 年統測 B)
- () 12. 坐標平面上滿足不等式 $\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ 的區域面積為何？
(A) 12 (B) 13 (C) 15 (D) 16。
代碼：a33107k1
(107 年統測 C)
- () 13. 設 (x, y) 滿足 $y \geq 0$ 、 $0 \leq x \leq 4$ 、 $-2 \leq x - 2y \leq 2$ ，試問 $f(x, y) = x - y$ 之最大值為何？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。
代碼：a33108s1
(108 年統測 B)
- () 14. 有兩條直線 $L_1: 3x - 5y = 2$ 、 $L_2: x + 2y = 3$ 將平面分成四個區域，如圖所示，試問區域 A 可用哪一組不等式表示？
(A) $\begin{cases} 3x - 5y \geq 2 \\ x + 2y \geq 3 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3x - 5y \leq 2 \\ x + 2y \geq 3 \end{cases}$
(C) $\begin{cases} 3x - 5y \geq 2 \\ x + 2y \leq 3 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 3x - 5y \leq 2 \\ x + 2y \leq 3 \end{cases}$ 。

代碼：a33108k1
(108 年統測 C)
- () 15. 某家口罩工廠擁有 5 台 A 型機器和 3 台 B 型機器來製造口罩，平時每日總產量為 11070 個口罩。今因應肺炎疫情日趨嚴重，緊急添購 3 台 A 型機器和 9 台 B 型機器，並提高所有機器的每日產能至原先的 150%，使得該工廠每日總產量增為 42120 個口罩，試問一台 A 型機器原先的每日產能為多少個？
(A) 1350 (B) 1380 (C) 1410 (D) 1440。
代碼：a23109k1
(109 年統測 C)

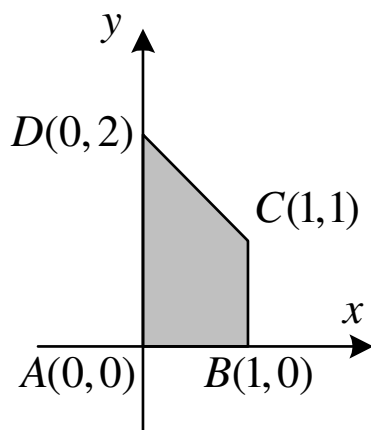


- () 16. 如圖(三)所示，四邊形 $ABCD$ 的四個頂點為 $A(0,0)$ 、 $B(1,0)$ 、 $C(1,1)$ 及 $D(0,2)$ ，則四邊形 $ABCD$ 區域為下列哪一個聯立不等式的圖解？

代碼：a33109s1
(109 年統測 B)

(A) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ x+2y \leq 2 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \\ 2x+y \leq 2 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ x+y \leq 2 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \\ x+y \leq 2 \end{cases}$ 。



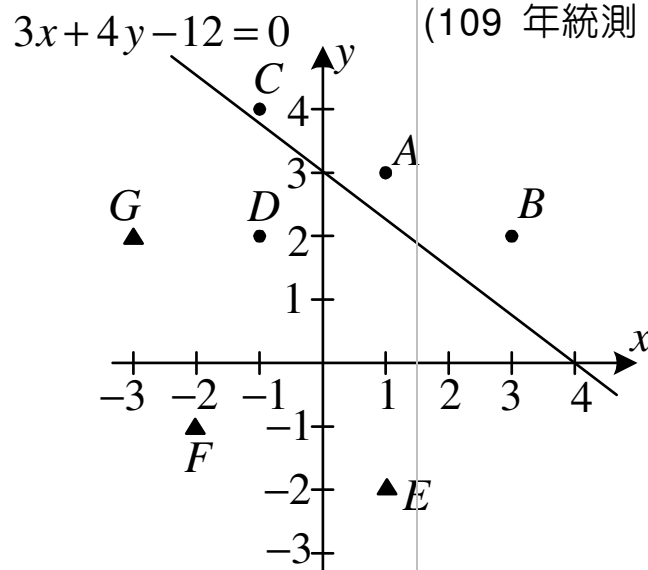
- () 17. 在 $\begin{cases} x+2y-6 \geq 0 \\ x+y-10 \leq 0 \\ 2 \leq x \leq 9 \end{cases}$ 的條件下，求其可行解區域的面積(平方單位)為何？

代碼：a33109k1
(109 年統測 C)

(A) $\frac{119}{4}$ (B) $\frac{59}{2}$ (C) $\frac{117}{4}$ (D) $\frac{55}{2}$ 。

- () 18. 在人工智慧的分類技術中，用到以直線分類不同物件的概念。設平面上有七個點 $A(1,3)$ 、 $B(3,2)$ 、 $C(-1,4)$ 、 $D(-1,2)$ 、 $E(1,-2)$ 、 $F(-2,-1)$ 、 $G(-3,2)$ 分屬●、▲二類，其中直線 $L: 3x+4y-12=0$ 未能將它們正確分類，如圖(三)標示。若將 L 平行移動至新的位置成為新直線 L_1 且能達到正確分類目的，則下列何者可為 L_1 的直線方程式？

代碼：g13109k1
(109 年統測 C)



(A) $3x+4y+2=0$ (B) $3x+4y-6=0$
(C) $6x+8y+3=0$ (D) $6x+8y-3=0$ 。

- () 19. 下列數對 (x, y) 何者滿足聯立不等式 $\begin{cases} 100x+2y-100 \geq 0 \\ 2x+100y+100 \leq 0 \end{cases}$ ？

代碼：110tcb03
(110 年統測 B)

(A) $(0,0)$ (B) $(1,1)$ (C) $(2,1)$ (D) $(2,-2)$ 。

- () 20. 若小林準備 600 萬元投資股票 x 萬元及債券 y 萬元，而投資股票金額不會低於債券金額的 2 倍，則下列何者為題意之限制條件？

代碼：110tcb18
(110 年統測 B)

(A) $\begin{cases} x+y \leq 600 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x+y \leq 600 \\ 2x \geq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x+y > 600 \\ x \geq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x+y > 600 \\ 2x \geq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 。

- () 21. 小蘇爲了瘦身，每餐攝取的熱量及糖量均不能超過 400 大卡及 20 克。今天小蘇去便利商店打算購買 A 食品或 B 食品各若干份，其中 A 食品標示一份 100 大卡及 8 克的糖量，B 食品標示一份 150 大卡及 6 克的糖量。試問小蘇這一餐可以怎麼搭配，來符合所設定的每餐攝取量？
(A)A 食品 3 份，B 食品 0 份 (B)A 食品 2 份，B 食品 1 份
(C)A 食品 0 份，B 食品 3 份 (D)A 食品 1 份，B 食品 2 份。
- () 22. 一家具公司有 60 個書櫃，存放於桃園 20 個及雲林 40 個。從桃園送到台北及台南的運費各爲每個書櫃 200 元及 400 元，而雲林送到台北及台南的運費各爲每個書櫃 600 元及 300 元。該公司收到兩筆訂單，要送到台北 30 個以及台南 20 個。試問該公司運送書櫃的最少運費爲多少元？ (A)12000 (B)16000 (C)18000 (D)20000。
- () 23. 坐標平面上，若點 $A(a, -6)$ 在直線 $L: 2x - y + 12 = 0$ 之右半平面，則下列何者爲 a 的可能值？
(A)-15 (B)-12 (C)-10 (D)-7。

代碼：111tcb19
(111 年統測 B)

代碼：111tcb24
(111 年統測 B)

代碼：111tcc06
(111 年統測 C)

答案：BBADC CACBB CBCBA DADDA DBD



綜合練習

- () 1. 若 $A(-4,6)$ ， $B(3,1)$ 且 $\overline{AB}$ 線段與直線 $3x-2y+k=0$ 相交，則
(A) $-7 < k < 24$ (B) $-7 \leq k \leq 24$ (C) $-1 < k < 23$ (D) $-1 \leq k \leq 23$ 。 代碼：a33214m1
- () 2. 已知 x, y 均為實數且滿足不等式 $x \geq 0$ ， $y \geq 0$ ， $4x+3y \geq 18$ ， $x+3y \geq 9$ ，則 $x+y$ 的最小值為
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 9 。 代碼：a33091k1
- () 3. 在坐標平面上，不等式 $\frac{x+y-6}{2x-y-6} \leq 0$ 的解集中滿足 $0 \leq x \leq 6$ ， $0 \leq y \leq 2$ 區域的面積為多少？ (A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 。 代碼：a33090s1
- () 4. 在坐標平面上，滿足不等式 $|x| \leq y \leq 8$ 的區域面積為何？
(A) 16 (B) 32 (C) 64 (D) 128 。 代碼：a33094k1
- () 5. 若二元一次聯立不等式 $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ x+y \leq a \\ x \geq 0 \end{cases}$ ，在坐標平面圍成的封閉區域為 T ，
且 T 的面積為 $\frac{1}{2}$ ，則 a 之值為何？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：a33105w2
- () 6. 某表演廳可售票座位，其售價有 600 元及 1000 元兩種價位，
且 600 元價位之座位有 500 席、1000 元價位之座位有 300 席。
已知某日售出 600 元票 x 張、1000 元票 y 張，且 $x \geq 3y$ 、 $x+y \leq 500$ ，
則此日售票所得金額的最大值為多少元？
(A) 300000 (B) 350000 (C) 400000 (D) 500000 。 代碼：a33104p1
- () 7. 據營養學家的研究，每個人每週至少需要 12 單位的蛋白質，9 單位的
醣與 8 單位的脂肪。今有甲、乙兩種食物，其價格每公斤各為 100 元與
30 元，甲食物每公斤含有 4 單位的蛋白質、2 單位的醣以及 1 單位的
脂肪，而乙食物每公斤含有 1 單位的蛋白質、1 單位的醣以及 2 單位的
脂肪。試問每個人每週能維持最低的營養標準，而費用最低為多少？
(A) 330 (B) 360 (C) 200 (D) 700 元。 代碼：a33209m1
- () 8. 某汽車公司擁有甲、乙兩家工廠，生產 A 、 B 兩種不同型的汽車，
若甲廠每天可完成 10 台 A 型的汽車與 20 台 B 型的汽車，乙廠每天可
完成 30 台 A 型的汽車與 10 台 B 型的汽車。如果公司要製造 150 台 A
型汽車與 100 台 B 型汽車，則兩工廠各工作幾天，才能使兩工廠所花
費的工作天數之和最少？
(A) 甲廠 0 天，乙廠 10 天 (B) 甲廠 1 天，乙廠 6 天
(C) 甲廠 15 天，乙廠 0 天 (D) 甲廠 3 天，乙廠 4 天。 代碼：a33102w2

答案：BBACA BAD

單元 13 二次曲線

主題一 拋物線

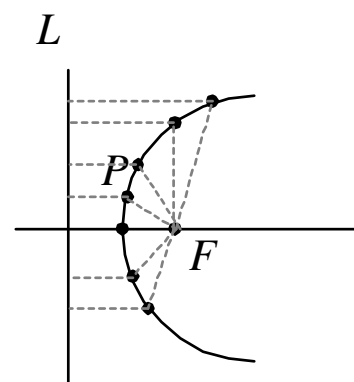
1. 定義：

在平面上與一定點 F 與一定直線 L 等距離的所有動點所成的圖形稱為拋物線。

即滿足 $\overline{PF} = d(P, L)$ 之所有 P 點所形成的軌跡圖形，

其中，定直線 L 稱為此拋物線的準線，

定點 F 稱為此拋物線的焦點。



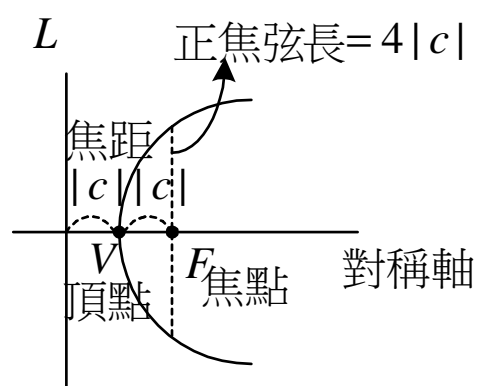
2. 拋物線的名詞：

(1) 對稱軸：過焦點 F 與準線 L 垂直的直線，簡稱為軸。

(2) 頂點：軸與拋物線之交點 V ，稱為此拋物線的頂點。

(3) 焦距：焦點到頂點的距離 $|c|$ 。

(4) 正焦弦：過焦點與對稱軸垂直的弦。



老師講解

已知一拋物線的焦點為 $(1,1)$ ，準線為 $x + y - 6 = 0$ ，求其正焦弦長。



學生練習

已知一拋物線的焦點為 $(1,-1)$ ，準線為 $x - y + 2 = 0$ ，求其正焦弦長。

【代碼】g31a01m2



3.拋物線的標準式：

方程式	頂點	焦點	準線	正焦弦長	對稱軸	$c > 0$	$c < 0$
$x^2 = 4cy$	$(0,0)$	$(0,c)$	$y = -c$	$4 c $	$x = 0$		
$y^2 = 4cx$	$(0,0)$	$(c,0)$	$x = -c$	$4 c $	$y = 0$		

【基本練習】

求下列拋物線之頂點、焦點、準線、正焦弦長

(1) $y^2 = 8x$ (2) $x^2 = -12y$



老師講解

試求拋物線方程式 $(x-4)^2 = 4(y+3)$ 之頂點、焦點、準線、正焦弦長、對稱軸。



學生練習

試求拋物線方程式 $(y+2)^2 = 8(x-1)$ 之頂點、焦點、準線、正焦弦長。

【代碼】 g31a02m3



老師講解

試求拋物線方程式 $y^2 + 8y + 4x - 4 = 0$ 之頂點、焦點、準線、正焦弦長、對稱軸。



學生練習

試求拋物線方程式 $x^2 - 4x - 8y - 20 = 0$ 之頂點、焦點、準線、正焦弦長、對稱軸。

【代碼】g31b01m2



老師講解

已知一拋物線的焦點 $F(-1, 3)$ ，準線 $L: y + 1 = 0$ ，求此拋物線方程式。



學生練習

試求焦點 $F(0, -2)$ ，準線 $L: y - 2 = 0$ 之拋物線方程式。

【代碼】g31a03m2



老師講解

拋物線的焦點為 $(2,1)$ ，頂點為 $(3,1)$ ，
求此拋物線方程式。



學生練習

試求頂點 $V(0,0)$ ，焦點 $F(5,0)$ 之拋物線
方程式。

【代碼】g31a03m3



老師講解

已知一拋物線之頂點為 $(-1,0)$ ，且過點
 $(2,6)$ ，其準線平行 y 軸，試求此拋物線
方程式。



學生練習

已知一拋物線之頂點為 $(2,1)$ ，且過點
 $(-2,-1)$ ，其準線平行 x 軸，試求此拋物線
方程式。

【代碼】g31b02m2

4. 拋物線的一般式：

- (1) 上下型(軸平行 y 軸)，其方程式可設為 $y = ax^2 + bx + c$
- (2) 左右型(軸平行 x 軸)，其方程式可設為 $x = ay^2 + by + c$



老師講解

設拋物線其對稱軸平行 x 軸，且過 $(3,0)$ ， $(1,1)$ ， $(7,-1)$ 三點，試求此拋物線。



學生練習

試求過 $(0,3)$ ， $(1,4)$ ， $(2,9)$ 三點，且其對稱軸與 y 軸平行之拋物線方程式。

【代碼】g31a04m2



老師講解

設拋物線 $x^2 - 3x + 6y - 4 = 0$ 與 x 軸交於 A 與 B 兩點，則 $\overline{AB}$ 等於？



學生練習

設拋物線 $x^2 - 6x + y + 4 = 0$ 與 $2x - y - 1 = 0$ 交 A 、 B 兩點，求 $\overline{AB}$ 之長。

【代碼】g31b03m2



老師講解

試求拋物線 $y^2 = 8x$ 上的動點 P 到直線 $x + y + 8 = 0$ 的最短距離？



學生練習

試求拋物線 $x^2 = 2y$ 上的點，與 $A(0,3)$ 的最短距離？

【代碼】g31251m1

【加強題】

1. 設拋物線對稱軸為 $x - 1 = 0$ ，且過兩點 $(0,0)$ ， $(3,12)$ ，求此拋物線方程式為_____。
2. 坐標平面上有一以點 $V(0,3)$ 為頂點， $F(0,6)$ 為焦點的拋物線，設 $P(a,b)$ 為此拋物線上一點， $Q(a,0)$ 為 P 在 x 軸上的投影，滿足 $\angle FPQ = 60^\circ$ ，則 $b =$ _____。

3. 在拋物線 $y^2 = 4x$ 上有一動點 P ， P 至準線 L 的距離為 a ， P 至頂點 V 的距離為 b ，求 $|a - b|$ 之最大值 = _____。

【學生練習答案】

1. $4\sqrt{2}$	2. 頂點 $(1,-2)$ 焦點 $(3,-2)$ 準線 $x = -1$ 正焦弦長 $= 4 c = 8$		
3. 頂點 $(2,-3)$ 焦點 $(2,-1)$ 準線 $y = -5$ 正焦弦長 $= 4 c = 8$ 對稱軸 $x = 2$			
4. $x^2 = -8y$	5. $y^2 = 20x$	6. $(x-2)^2 = -8(y-1)$	7. $y = 2x^2 - x + 3$
8. $2\sqrt{5}$	9. $\sqrt{5}$		



回家功課

- | | |
|---|--------------------|
| <p>() 1. 拋物線方程式 $x^2 - 4x - 8y - 12 = 0$，則下列敘述何者不成立？
 (A)軸平行於 y 軸 (B)頂點為 $(2, -2)$
 (C)準線方程式為 $y + 1 = 0$ (D)正焦弦長為 8。</p> | <p>代碼：g31207m1</p> |
| <p>() 2. 已知點 $A(5, 6)$ 在拋物線 $(x - 1)^2 = 4(y - 2)$ 上，則點 A 與此拋物線上之焦點的距離為何？
 (A)2 (B)3 (C)4 (D)5。</p> | <p>代碼：g31091k1</p> |
| <p>() 3. 若拋物線 $y = ax^2 + bx + c$ 的準線為 $y = 1$，焦點為 $(2, 2)$，則 $a + b + c$ 之值為
 (A)2 (B)$\frac{13}{2}$ (C)$\frac{15}{2}$ (D)$\frac{7}{2}$。</p> | <p>代碼：g31210m1</p> |
| <p>() 4. 在坐標平面上，若將二次曲線 $(x + 1)^2 = 4y$ 向 x 軸正方向平移 2，再向 y 軸正方向平移 1，則平移後的方程式為何？
 (A)$(x + 3)^2 = 4(y + 1)$ (B)$(x - 1)^2 = 4(y - 1)$
 (C)$(x + 1)^2 = 4y - 1$ (D)$(x - 3)^2 = 4y + 1$。</p> | <p>代碼：g31094k1</p> |
| <p>() 5. 設拋物線方程式為 $y^2 - 4x - 2y + 9 = 0$，已知拋物線與直線 $x = 3$ 相交於 A, B 兩點，求 $\overline{AB} = ?$
 (A)2 (B)4 (C)6 (D)8。</p> | <p>代碼：g31090k1</p> |
| <p>() 6. 設 $f(x) = 2x^2 + 4x + k$ 的圖形相交 x 軸於 P, Q 兩點，若 P, Q 之間的距離為 2，則 k 值
 (A)-2 (B)-4 (C)1 (D)0。</p> | <p>代碼：g31221m1</p> |
| <p>() 7. 已知拋物線之焦點為 $(2, 3)$，準線為 $x - 4y + 3 = 0$，則其正焦弦長為
 (A)$\frac{7}{\sqrt{17}}$ (B)$\frac{14}{\sqrt{17}}$ (C)$\frac{28}{\sqrt{17}}$ (D)以上皆非。</p> | <p>代碼：g31212m1</p> |

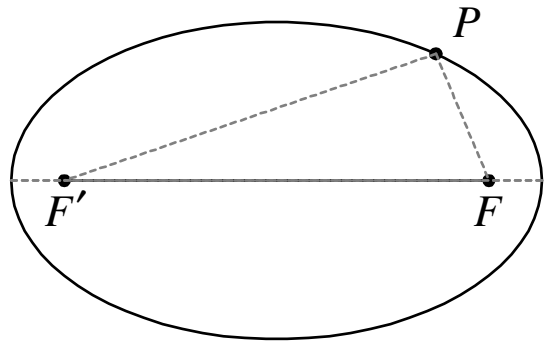
答案：CDABB DB

主題二 橢圓

1. 定義：

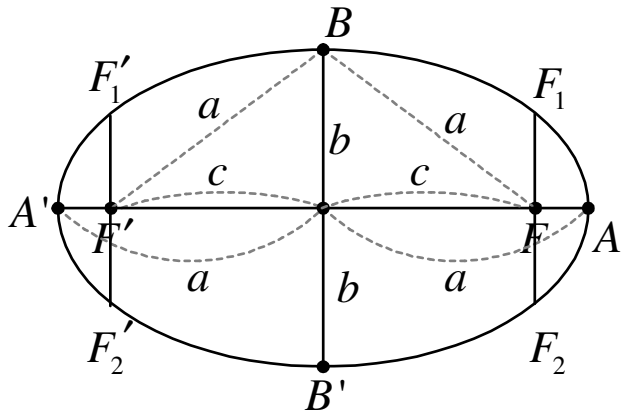
設平面上兩定點 F, F' ，且 $\overline{FF'} = 2c$ ，若平面上一點 P 到 F, F' 的距離和為一定值 $2a$ ，

即滿足 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ ($2a > 2c$)，則所有動點 P 點所形成的軌跡圖形稱為橢圓。



2. 橢圓的名詞：

- (1) 焦點：兩定點 F, F' 。
- (2) 中心： $\overline{FF'}$ 的中點 O 。
- (3) 長軸： $\overline{AA'}$ ，長軸頂點 A, A' ，長軸長 $\overline{AA'} = 2a$ 。
- (4) 短軸： $\overline{BB'}$ ，短軸頂點 B, B' ，短軸長 $\overline{BB'} = 2b$ 。
- (5) 正焦弦：過焦點與長軸垂直的弦($\overline{F_1F_2}, \overline{F'_1F'_2}$)。



3. 橢圓的標準式：

方程式	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($a > b > 0$)
圖形		
中心	$(0,0)$	$(0,0)$
長軸頂點	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
短軸頂點	$(0, \pm b)$	$(\pm b, 0)$
焦點	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
長軸	$2a$	$2a$
短軸	$2b$	$2b$
正焦弦長	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
關係式	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 = b^2 + c^2$



【基本練習】

已知橢圓方程式 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ，試求其中心、焦點、長軸長、短軸長、正焦弦長。



老師講解

已知橢圓方程式 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ ，
試求其中心、焦點、長軸長、短軸長、
正焦弦長。



學生練習

已知橢圓方程式 $\frac{(x-2)^2}{169} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ ，
試求其中心、焦點、長軸長、短軸長、
正焦弦長。

【代碼】g32a02m3



老師講解

已知橢圓方程式
 $4x^2 + 9y^2 + 16x - 54y + 61 = 0$ ，
試求其中心、焦點、長軸長、短軸長、
正焦弦長。



學生練習

已知橢圓方程式
 $4x^2 + y^2 + 40x - 16y + 148 = 0$ ，
試求其中心、焦點、長軸長、短軸長、
正焦弦長。

【代碼】g32b01m2



老師講解

設橢圓之二焦點為 $(-1,3)$ ， $(5,3)$ ，
長軸之端點為 $(-2,3)$ ，求其方程式。



學生練習

已知一橢圓的二焦點為 $(2,1)$ 與 $(6,1)$ ，
長軸長為 10，求其方程式。

【代碼】g32a03m2



老師講解

已知橢圓一焦點 $(4,0)$ ，短軸在 $y = 2$ 上
且長軸長為 12，求其方程式。



學生練習

已知橢圓一焦點 $(3,0)$ ，短軸在 y 軸，
且長軸長為 8，求其方程式。

【代碼】g32a03m3



老師講解

若 x, y 均為實數，且 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-7)^2} = 10$ ，則求滿足 (x, y) 之方程式。



學生練習

求在平面上，至兩定點 $A(2, 5)$ 、 $B(2, -3)$ 距離之和恆等於 10 之軌跡方程式。

【代碼】g32a03m4



老師講解

若 $P(x, y)$ 在橢圓 $9x^2 + 16y^2 = 144$ 上，求 P 至直線 $x - y + 7 = 0$ 距離最大值。



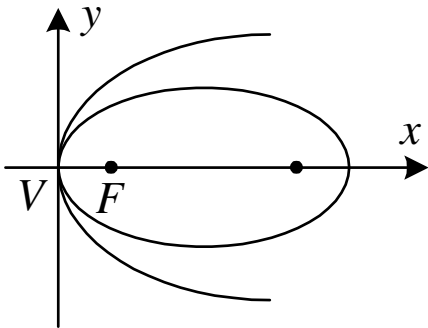
學生練習

若 $P(x, y)$ 在橢圓 $x^2 + 9y^2 = 9$ 上，求 P 至直線 $x - 4y + 12 = 0$ 距離最大值。

【代碼】g32b03m2

【加強題】

如圖，拋物線 $y^2 = 2x$ 的頂點 V 與焦點 F 正好是另一個橢圓的頂點與焦點，若此橢圓短軸的長度是 3，則橢圓長軸的長度是 5。



【學生練習答案】

1. 中心 $(2,1)$ 、焦點 $(14,1)$ 、 $(-10,1)$ 、長軸長 $= 2a = 26$ 、短軸長 $= 2b = 10$ 、正焦弦長 $= \frac{2b^2}{a} = \frac{50}{13}$		
2. 中心 $(-5,8)$ 、焦點 $(-5,8+2\sqrt{3})$ 、 $(-5,8-2\sqrt{3})$ 、長軸長 $= 8$ 、短軸長 $= 4$ 、正焦弦長 $= 2$		
3. $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{21} = 1$	4. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$	
5. $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$	6. $\sqrt{17}$	



回家功課

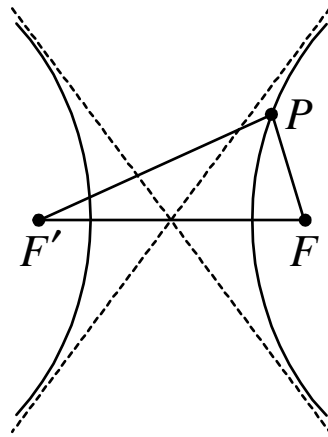
- () 1. 橢圓 $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ ，試判斷下列何者為誤？ (A)中心 $(-2,1)$ (B)長軸長為10 (C)長軸頂點 $(2,1)$ ， $(-6,1)$ (D)正焦弦長為 $\frac{32}{5}$ 。 代碼：g32203m1
- () 2. 橢圓 $4x^2 + 9y^2 + 8x - 18y - 23 = 0$ 的兩焦點為 F_1 、 F_2 ，且 P 為橢圓上一點，則 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} =$ (A) $2\sqrt{13}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C)4 (D)6。 代碼：g32207m1
- () 3. 橢圓 $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y = 116$ 之中心為圓心，短軸為直徑所作之圓的方程式為 (A) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 9 = 0$ (C) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$ 。 代碼：g32208m1
- () 4. 已知一橢圓的焦點座標為 $(0,2)$ ， $(0,-2)$ ，短軸長為8，求橢圓方程式？ (A) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ (B) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$ (C) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{16} = 1$ (D) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。 代碼：g32090k1
- () 5. 橢圓兩焦點為 $(1,1)$ ， $(-3,1)$ ，且 $(2,1)$ 為橢圓之一頂點，則橢圓方程式 (A) $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{5} = 1$ (B) $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ (C) $\frac{(x+1)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ (D) $\frac{(x+1)^2}{24} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ 。 代碼：g32212m1
- () 6. 在坐標平面上，兩固定點坐標分別為 $A(4,0)$ 、 $B(-4,0)$ ，若某可移動點 P ，滿足 $\overline{PA} + \overline{PB} = 10$ 之關係，則 P 所形成之軌跡為 (A) $9x^2 + 25y^2 = 225$ (B) $9x^2 - 25y^2 = 225$ (C) $x^2 - y^2 = 25$ (D) $x^2 + y^2 = 25$ 。 代碼：g32213m1
- () 7. 若 x, y 均為實數，且 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} = 10$ ，則 (x, y) 恆滿足下列哪一個方程式？ (A) $\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ (B) $\frac{(x-4)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ (C) $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ (D) $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ 。 代碼：g32091k1
- () 8. 橢圓 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上之任一點與原點及 $(4,0)$ 為三頂點所形成之最大三角形面積為 (A)8 (B) $\frac{9}{2}$ (C)6 (D) $\frac{25}{2}$ 。 代碼：g32087x1

答案：CDABA ACC

主題三 雙曲線

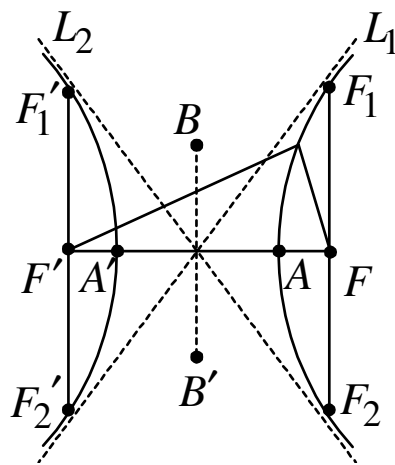
1. 定義：

設平面上兩定點 F, F' ，且 $\overline{FF'} = 2c$ ，若平面上一點 P 到 F, F' 的距離差之絕對值為一定值 $2a$ ，即滿足 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a$ ($2a < 2c$)，則所有動點 P 點所形成的軌跡圖形稱為雙曲線。



2. 雙曲線的名詞：

- (1) 焦點：兩定點 F, F' 。
- (2) 中心： $\overline{FF'}$ 的中點 O 。
- (3) 實軸： $\overline{AA'}$ ，實軸頂點 A, A' ，實軸長 $\overline{AA'} = 2a$ 。
- (4) 共軛軸： $\overline{BB'}$ ，共軛軸頂點 B, B' ，共軛軸長 $\overline{BB'} = 2b$ 。
- (5) 正焦弦：過焦點與實軸垂直的弦 ($\overline{F_1F_2}, \overline{F'_1F'_2}$)。
- (6) 漸近線： L_1, L_2 二直線為雙曲線的漸近線。



3. 雙曲線的標準式：

方程式	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
圖形		
中心	$(0, 0)$	$(0, 0)$
頂點	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
焦點	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
實軸	$2a$	$2a$
共軛軸	$2b$	$2b$
正焦弦長	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
關係式	$a^2 + b^2 = c^2$	$a^2 + b^2 = c^2$



【基本練習】

已知雙曲線方程式 $16x^2 - 9y^2 = 144$ ，試求其中心、焦點、頂點、貫軸長、共軛軸長、正焦弦長、漸近線。



老師講解

已知雙曲線方程式 $\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$ ，
試求其中心、焦點、頂點、貫軸長、
共軛軸長、正焦弦長、漸近線。



學生練習

已知雙曲線方程式 $\frac{(y-1)^2}{25} - \frac{(x+1)^2}{144} = 1$ ，
試求其中心、焦點、頂點、貫軸長、
共軛軸長、正焦弦長、漸近線。

【代碼】g33a02m3



老師講解

求兩焦點為 $(-1, 1)$ ， $(-1, -5)$ ，
共軛軸長為 4 之雙曲線方程式。



學生練習

求以中心為 $(6, 4)$ ，一頂點為 $(6, 7)$ ，
且共軛軸長為 8 之雙曲線方程式。

【代碼】g33a03m2



老師講解

已知雙曲線兩頂點為 $(1,2)$ ， $(5,2)$ ，
且正焦弦長為 9，求其方程式。



學生練習

求兩焦點 $(15,1)$ ， $(-11,1)$ 且過點 $(-10,1)$
之雙曲線方程式。

【代碼】g33a03m3



老師講解

設兩焦點為 $F(2,3)$ ， $F'(-4,3)$ ，且過
 $P(2,-5)$ 之雙曲線方程式。



學生練習

設雙曲線兩焦點分別 $F(0,3)$ 、 $F'(0,-3)$ ，
且圖形過 $P(8,3)$ ，求此雙曲線方程式。

【代碼】g33b02m2



老師講解

二漸近線 $x+2y-1=0$ ， $x-2y+1=0$
且過 $(1,-1)$ 之雙曲線方程式。



學生練習

設 $3x+2y=0$ ， $3x-2y=0$ 是某一雙曲線
的漸近線，且知此雙曲線通過 $(2,5)$ ，
求其方程式。

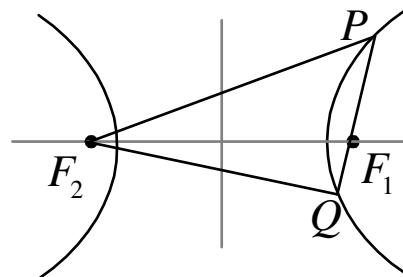
【代碼】g33a03m4



【加強題】

1. 若雙曲線的頂點與焦點分別是橢圓 $9x^2 + 4(y+1)^2 = 36$ 的焦點和頂點，則此雙曲線的方程式為_____。

2. 如右圖，一雙曲線兩焦點 F_1 ， F_2 ，貫軸長為10， P ， Q 為雙曲線上兩點，若 $\overline{PQ}$ 過 F_1 且 $\overline{PQ} = 6$ ，試求 $\triangle PQF_2$ 的周長為_____。



3. 兩漸近線為 $2x - y = 0$ 及 $2x + y - 4 = 0$ ，且一焦點為 $(1, 2 + \sqrt{10})$ ，求雙曲線方程式為_____。

【學生練習答案】

1. 中心 $(-1, 1)$ 、焦點 $(-1, 14)$ 、 $(-1, -12)$ 、頂點 $(-1, 6)$ 、 $(-1, -4)$ 、貫軸長 10、共軛軸長 24、正焦弦長 $\frac{288}{5}$ 、漸近線 $5x + 12y - 7 = 0$ 、 $5x - 12y + 17 = 0$		
2. $\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{(x-6)^2}{16} = 1$		3. $\frac{(x-2)^2}{144} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$
4. $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{8} = 1$	5. $9x^2 - 4y^2 + 64 = 0$	



回家功課

- () 1. 方程式 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ 之圖形為雙曲線，則下列何者錯誤？
(A)中心為(0,0) (B)貫軸長為10 (C)頂點為(5,0)，(-5,0)
(D)焦點為(4,0)，(-4,0) 。 代碼：g33202m1
- () 2. 有一曲線之方程式為 $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$ ，則下列敘述何者不正確？
(A)正焦弦長為9 (B)其中一漸近線為 $3x + 2y - 1 = 0$
(C)貫軸長為6 (D)其中一焦點為 $(1 + \sqrt{13}, -1)$ 。 代碼：g33087y1
- () 3. 已知一雙曲線方程式為 $4x^2 - 16y^2 + 4x + 16y + 1 = 0$ ，則其貫軸上的兩頂點分別為何？
(A) $(-\frac{1}{2}, 1)$ ， $(-\frac{1}{2}, -1)$ (B) $(\frac{1}{2}, 1)$ ， $(\frac{1}{2}, -1)$
(C) $(-\frac{1}{2}, 0)$ ， $(\frac{1}{2}, 1)$ (D) $(-\frac{1}{2}, 0)$ ， $(-\frac{1}{2}, 1)$ 。 代碼：g33090k1
- () 4. 已知一雙曲線的兩焦點為(-1,0)，(9,0)且貫軸長為6，求此雙曲線的共軛軸長為
(A)6 (B)8 (C)10 (D)12 。 代碼：g33209m1
- () 5. 在平面上，跟兩定點(13,0)，(-13,0)距離差的絕對值恆為24的所有點之軌跡方程式？
(A) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{169} = 1$ (B) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{144} = 1$
(C) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ (D) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ 。 代碼：g33207m1
- () 6. 已知雙曲線之兩頂點為 $(\pm 12, 0)$ ，焦點為(13,0)，則此雙曲線之方程式為
(A) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{25} = 1$ (B) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$
(C) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{144} = 1$ (D) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ 。 代碼：g33210m1
- () 7. 下列何者為曲線 $4y^2 = (2x+1)^2 + 9$ 的漸近線？
(A) $y = x + \frac{1}{2}$ (B) $y = 2x - 1$ (C) $y = 2x + 1$ (D) $2y = x + \frac{1}{2}$ 。 代碼：g33095k1

答案：DCDBC BA

歷屆試題

- () 1. 設拋物線的對稱軸平行 x 軸，且過 $(8, -3), (8, 1), (2, -2)$ 三點，則此拋物線之頂點坐標為何？ (A) $(-1, 0)$ (B) $(-1, 1)$ (C) $(0, -1)$ (D) $(1, -1)$ 。

代碼：g31100k1
(100 年統測 C)

- () 2. 若一橢圓方程式為 $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ 。點 $P(x, y)$ 為此橢圓上任一點，則 $\sqrt{(x+5)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = ?$ (A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 10。

代碼：g32100k1
(100 年統測 C)

- () 3. 設拋物線 $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ 之頂點為 V 且與直線 $L: y = 1$ 相交於 A 、 B 二點，則 $\triangle ABV$ 之面積為何？ (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8。

代碼：g31101k1
(101 年統測 C)

- () 4. 已知拋物線的焦點為 $(2, -5)$ ，準線方程式為 $y = -1$ 。
求此拋物線的正焦弦長 (A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16。

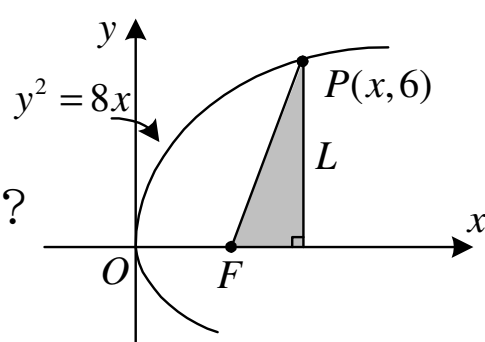
代碼：g31102s1
(102 年統測 B)

- () 5. 若橢圓的兩焦點為 $(-2, 1)$ 、 $(4, 1)$ 且長軸長為 10，求其方程式

代碼：g32102s1
(102 年統測 B)

(A) $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ (B) $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$
(C) $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ (D) $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ 。

- () 6. 已知點 $P(x, 6)$ 為拋物線 $y^2 = 8x$ 上一點，
 F 為此拋物線的焦點， L 為過點 P 且與 x 軸垂直的直線，如圖。
求由 $\overline{PF}$ 、 L 與 x 軸所圍成的三角形面積為何？
(A) $\frac{15}{2}$ (B) 8 (C) $\frac{17}{2}$ (D) 9。



代碼：g31102k1
(102 年統測 C)

- () 7. 設雙曲線的兩焦點分別為 $F(-3, 2)$ 、 $F'(5, 2)$ ，且此雙曲線過點 $P(5, \frac{13}{3})$ ，
則此雙曲線的實軸長為何？ (A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 14。

代碼：g33102k1
(102 年統測 C)

- () 8. 已知平面上有一雙曲線方程式為 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ，下列何者為其漸近線？
(A) $\frac{x}{4} + \frac{y}{9} = 0$ (B) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 0$ (C) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ (D) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ 。

代碼：g33103s1
(103 年統測 B)



- () 9. 設直線 $8x + y = c$ 為拋物線 $y = 4(x-1)^2$ 之切線，則 c 之值為何？
(A)4 (B)5 (C)6 (D)7 。 代碼：g31103k1
(103 年統測 C)
- () 10. 設 F 、 F' 為橢圓 $25x^2 + 9y^2 = 225$ 的二焦點，點 $P(-3,0)$ 為橢圓上一點，
則 $\overline{PF} + \overline{PF'}$ 之值為何？ (A)6 (B)8 (C)10 (D)15 。 代碼：g32103k1
(103 年統測 C)
- () 11. 若拋物線 $x + 2y^2 + 4y - 8 = 0$ 的頂點為 (a,b) ，則 $a + 2b = ?$
(A)8 (B)9 (C)10 (D)11 。 代碼：g31104s1
(104 年統測 B)
- () 12. 橢圓 $25x^2 + 16y^2 - 100x + 32y - 284 = 0$ 之兩焦點在哪兩個象限？
(A)一、二 (B)二、三 (C)三、四 (D)一、四 。 代碼：g32104k1
(104 年統測 C)
- () 13. 若橢圓 $x^2 + 4y^2 - 4x - 16y + a = 0$ 不與 x 軸相交，且與 y 軸相切，則 a 之
值為何？ (A)4 (B)8 (C)16 (D)24 。 代碼：g32105s1
(105 年統測 B)
- () 14. 已知一橢圓之焦點分別為 $(3,3)$ 及 $(-1,3)$ ，且過點 $(3,6)$ ，則下列何者為
橢圓上的點？ (A) $(-1,0)$ (B) $(1,2)$ (C) $(2,3)$ (D) $(4,5)$ 。 代碼：g32105k1
(105 年統測 C)
- () 15. 已知雙曲線 $H: \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ 兩頂點的距離為 a ，橢圓 $E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 長軸
長為 b ，則 $a + b = ?$ (A)16 (B)18 (C)20 (D)22 。 代碼：g33106s1
(106 年統測 B)
- () 16. 已知橢圓 $E: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 與圓 $C: x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ ，則橢圓 E 與圓 C 有
多少個交點？ (A)1 (B)2 (C)3 (D)4 。 代碼：g32106s1
(106 年統測 B)
- () 17. 若雙曲線 $4x^2 - 16y^2 + 4x + 16y + 1 = 0$ 的實軸長及正焦弦長分別為
 i 、 j ，則 $i + j = ?$ (A) $\frac{3}{2}$ (B)2 (C) $\frac{5}{2}$ (D)5 。 代碼：g33106k1
(106 年統測 C)
- () 18. 若一拋物線之準線為 $x = -1$ ，焦點為 $(3,3)$ ，則此拋物線之方程式為何？
(A) $y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$ (B) $y^2 - 4x - 2y + 13 = 0$
(C) $y^2 - 8x - 2y + 25 = 0$ (D) $y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$ 。 代碼：g31107s1
(107 年統測 B)

- () 19. 已知點 F 及直線 L 分別為橢圓 $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ 的焦點及短軸。
若以直線 L 為準線及點 F 為焦點所作出拋物線的方程式為
 $4c(x-h) = (y-k)^2$ ，則 $|chk| = ?$
(A) 12 (B) 8 (C) 6 (D) 4。

代碼：g32108k1
(108 年統測 C)

- () 20. 已知 F_1 、 F_2 為橢圓 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ 的焦點，且 F_3 、 F_4 為雙曲線 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
的焦點。若 P 點為上述橢圓與雙曲線之交點，則下列何者正確？
(A) $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 24$ (B) $\overline{PF_3} + \overline{PF_4} = 26$
(C) $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 6$ (D) $|\overline{PF_3} - \overline{PF_4}| = 6$ 。

代碼：g33108k1
(108 年統測 C)

- () 21. 若 C 為坐標平面上的雙曲線，且其方程式為 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ ，則下列
哪一條直線與 C 沒有交點？
(A) $y = \frac{-2}{5}x$ (B) $y = \frac{-1}{5}x$ (C) $y = \frac{3}{5}x$ (D) $y = \frac{4}{5}x$ 。

代碼：g33109s1
(109 年統測 B)

- () 22. 已知 $A(-1,4)$ 、 $B(5,4)$ 為坐標平面上兩點。若拋物線 $H: y = C(x-h)^2$ 通
過 A 、 B 兩點，則 $C+h = ?$
(A) $\frac{13}{5}$ (B) $\frac{22}{9}$ (C) $\frac{18}{7}$ (D) $\frac{17}{4}$ 。

代碼：g31109s1
(109 年統測 B)

- () 23. 若給定一橢圓標準式 $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{144} = 1$ ，則下列何者正確？
(A) $(4,-2)$ 為其中一焦點 (B) $(9,-2)$ 為其中一長軸頂點
(C) $(4,10)$ 為其中一短軸頂點 (D) 正焦弦長為 $\frac{25}{6}$ 。

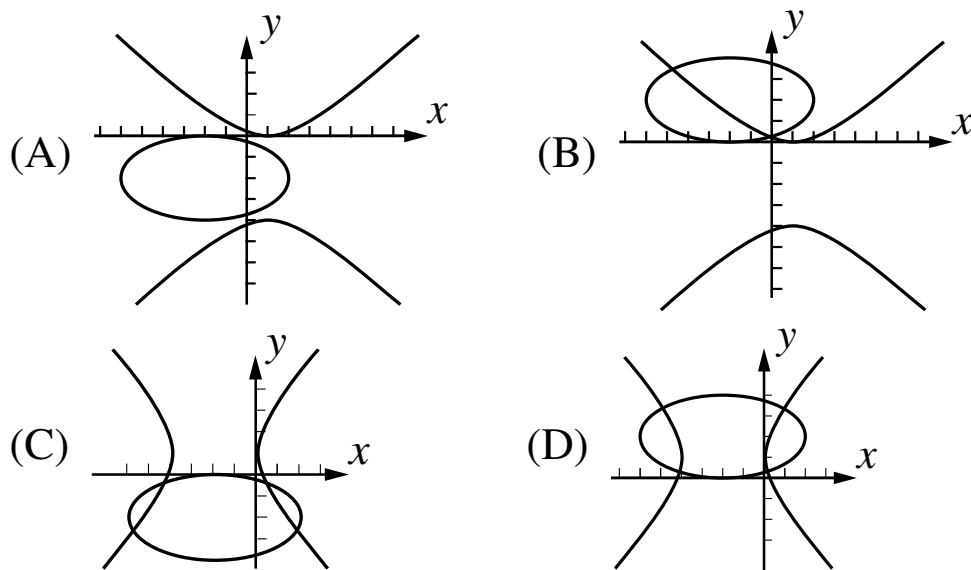
代碼：g32109k1
(109 年統測 C)

- () 24. 若橢圓曲線上的任意點到兩點 $(2,-3)$ 、 $(-4,-3)$ 的距離和
為 10，則此橢圓之短軸長為何？
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8。

代碼：110tcb17
(110 年統測 B)



- () 25. 若有兩個二次曲線方程式，分別為 $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y + 4 = 0$ 與 $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{5} = 1$ ，則下列何者為此兩曲線的圖形組合？



代碼：110tcc09
(110 年統測 C)

- () 26. 若直線 $y = mx$ 與拋物線 $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ 相切，且切點在第一象限內，則 $m = ?$ (A)1 (B)2 (C)4 (D)6 。

代碼：110tcc22
(110 年統測 C)

- () 27. 若 $P(x, y)$ 為橢圓 $4x^2 + 6y^2 - 12y - 6 = 0$ 上任意一點，則 $x + 3y$ 的最大值為何？
(A) $3 + 7\sqrt{3}$ (B) $3 + 5\sqrt{3}$ (C) $3 + 3\sqrt{5}$ (D) $3 + \sqrt{21}$ 。

代碼：111tcc24
(111 年統測 C)

答案：CDBBA ABBAC ADCAC BDDDB DBDDD BD

綜合練習

- () 1. 關於拋物線 $P: x = 4y^2 + 8y$ ，下列敘述何者正確？ (A)開口向下
(B)頂點在 $(-4, -1)$ (C)準線是 $y = -1$ (D)正焦弦長為 4。

代碼：g31099k1

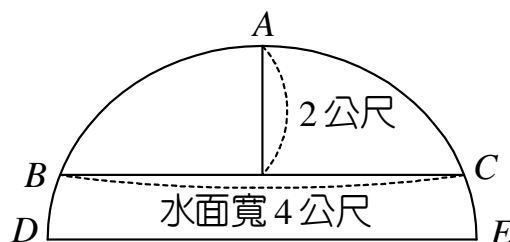
- () 2. 拋物線 $(y-1)^2 = -6(x+2)$ 之頂點 V ，焦點 F ，過 F 且垂直軸之直線與拋物線相交於 P ，則 $\triangle PVF$ 面積為 (A)18 (B)9 (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{9}{4}$ 。

代碼：g31216m1

- () 3. 一拋物線頂點為 $(2, 4)$ ，其軸平行 x 軸，且過點 $(3, 2)$ ，則此拋物線方程式為 (A) $x^2 - 8x - 4y + 24 = 0$ (B) $x^2 - 8x + 4y + 8 = 0$
(C) $y^2 - 4x - 8y + 24 = 0$ (D) $y^2 + 4x - 8y + 8 = 0$ 。

代碼：g31218m1

- () 4. 已知一個拋物線形狀的拱橋，拱頂(A 點)離水面 2 公尺時，水面寬度($\overline{BC}$ 長)為 4 公尺，如圖所示，若水面再下降 1 公尺後，則此時水面寬度($\overline{DE}$ 長)為多少公尺？
(A) $2\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{6}$ (C) $4\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{3}$ 。



代碼：g31097k1

- () 5. 若橢圓 $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上一點至兩焦點之距離和為 8，則下列何者正確？
(A)焦點為 $(0, 2\sqrt{3})$ ， $(0, -2\sqrt{3})$ (B) $k = 20$ (C)正焦弦長為 2
(D)焦點為 $(4, 0)$ ， $(-4, 0)$ 。

代碼：g32216m1

- () 6. 設 A 、 B 為橢圓 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 的兩焦點， P 為此橢圓上之任意一點，則 $\triangle PAB$ 面積的最大值為何？ (A)6 (B)12 (C)15 (D)20。

代碼：g32092k1

- () 7. 設橢圓 $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$ 與 $\frac{(x-9)^2}{a^2} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1$ 有交點，則正數 a 的範圍為 (A) $1 \leq a \leq 9$ (B) $2 \leq a \leq 10$ (C) $3 \leq a \leq 11$ (D) $4 \leq a \leq 12$ 。

代碼：g32217m1



- () 8. 設一雙曲線之兩焦點為 $F_1(5, 2)$ 、 $F_2(-1, 2)$ ，且過點 $(7, 6)$ ，
則此雙曲線方程式為 (A) $\sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = 6\sqrt{5}$
(B) $\frac{(x-2)^2}{5} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ (C) $\frac{(x-2)^2}{20} - \frac{(y-4)^2}{16} = 1$
(D) $\frac{(x-2)^2}{20} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ 。

代碼：g33211m1

- () 9. 若雙曲線 $H: 9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$ ，則下列直線何者是
雙曲線 H 的漸近線？ (A) $L_1: 2x + 3y - 14 = 0$ (B) $L_2: 2x - 3y + 10 = 0$
(C) $L_3: 3x + 2y - 14 = 0$ (D) $L_4: 3x - 2y + 10 = 0$ 。

代碼：g33098k1

- () 10. 若雙曲線的兩焦點為 $(-4, 0)$ 、 $(6, 0)$ 及一頂點為 $(4, 0)$ ，則下列那一點
在此雙曲線上？ (A) $(-\frac{11}{4}, 3)$ (B) $(\frac{17}{4}, 4)$ (C) $(5, 5)$ (D) $(\frac{11}{2}, 6)$ 。

代碼：g33092k1

- () 11. 試問在坐標平面上，曲線 $y^2 = 4x$ 與 $x + y + 2 = 0$ 之間的最短距離為何？
(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) 1 (C) $\sqrt{22}$ (D) 2。

代碼：g34095k1

- () 12. 試問在坐標平面上通過原點且與橢圓 $(x-3)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 相交於一點的直
線斜率為何？ (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (C) 1, -1 (D) $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ 。

代碼：g32096k1

答案：BDCBC BDBCA AA

單元 14 導函數及其應用

主題一 函數的極限與連續

1. 函數的極限：

(1) 定義：

函數 $f(x)$ 在 x 趨近於定數 a 時($x \neq a$)， $f(x)$ 趨近於定值 L ，

則稱函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 的極限值為 L ，記作 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

(2) 函數極限的四則運算：

設 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ 、 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ ， k 為常數，則

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow a} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k\alpha$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha \pm \beta$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha\beta \quad \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{其中 } \beta \neq 0)$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow a} k = k$$

(3) 函數極限的求法：

① 定型極限(分母不為 0)：以 $x = a$ 直接代入，即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

② $\frac{0}{0}$ 分式型：將分子、分母因式分解，約去公因式，再以 $x = a$ 代入

③ $\frac{0}{0}$ 根式型：將根式有理化，約去公因式，再以 $x = a$ 代入

註：遇 $\frac{0}{0}$ 的題型，可用羅必達定理。方法：將分子、分母各自微分，再以 $x = a$ 代入



老師講解

試求下列的極限值。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x + 2) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2+6}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{3x^2-x-6} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2}{x^2-4}$$



學生練習

試求下列的極限值。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x - 16}$$

【代碼】c11a01m2



老師講解

試求下列的極限值。

(1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$



學生練習

求 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{3x^2 + x - 2}$ 之值。

【代碼】c11a01m3



老師講解

求 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - x - 2} + \frac{1}{x^2 - 7x + 10} \right)$ 之值。



學生練習

求 $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \right)$ 之值。

【代碼】c11b01m2



老師講解

求 $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{\sqrt{x+2}-3}$ 之值。



學生練習

求 $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+h}-2}{h-1}$ 之值。

【代碼】c11a01m5



老師講解

求 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}$ 之值。



學生練習

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$ 之值。

【代碼】c11b02m2



老師講解

設 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+ax+b}{x-2} = 5$ 成立時，求 $a+b$ 之值



學生練習

設 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+ax+b}{x+1} = 3$ 成立時，求 $a+b$ 之值

【代碼】c11b03m2



(4) 左、右極限：

①**左極限**：當 $x \rightarrow a^-$ 時(即 $x < a$ 且 $x \rightarrow a$)，則稱 $f(x)$ 在 a 的左極限，記作 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 。

右極限：當 $x \rightarrow a^+$ 時(即 $x > a$ 且 $x \rightarrow a$)，則稱 $f(x)$ 在 a 的右極限，記作 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 。

若 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

若 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在



老師講解

試求下列的極限值：

$$(1) f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \geq 1 \\ x^2+1, & x < 1 \end{cases}, \text{ 則 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 4x+1, & x > 2 \\ 3, & x = 2 \\ x^2+1, & x < 2 \end{cases}, \text{ 則 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$$



學生練習

試求下列的極限值：

$$(1) f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases}, \text{ 則 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > 1 \\ 5, & x = 1 \\ x^2, & x < 1 \end{cases}, \text{ 則 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

【代碼】c11a02m2

2. 函數的連續：

(1) 設 a 為函數 $f(x)$ 定義上一點，若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ，則函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處連續。

即函數 $f(x)$ 的圖形在 $x = a$ 時是連續不斷的。

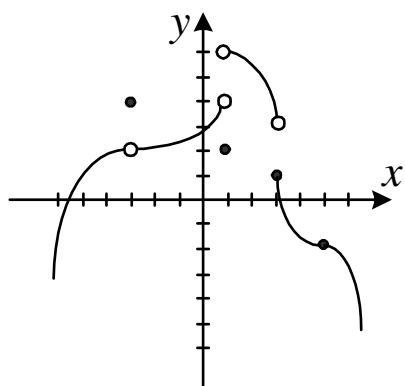
(2) 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 處連續，則 $f(x)$ 在 $x = a$ 必滿足

$f(a)$ 有意義 ② $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在 ③ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



老師講解

根據 $f(x)$ 的圖形，試求下列各式之值：

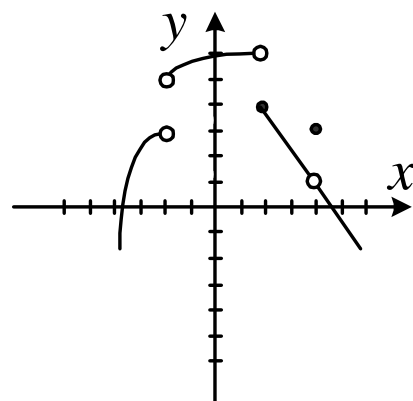


- (1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $f(1)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $f(3)$
- (3) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$, $f(-3)$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$, $f(5)$



學生練習

根據 $f(x)$ 的圖形，試求下列各式之值：



- (1) $f(-2)$ (2) $f(2)$ (3) $f(4)$
- (4) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ (5) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ (6) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

【代碼】c11a02m3



老師講解

$$\text{若 } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases},$$

則 $f(x)$ 在 $x = 2$ 時連續，求 $a = ?$



學生練習

$$\text{若 } f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x > -1 \\ a, & x = -1 \\ x^3, & x < -1 \end{cases},$$

則 $f(x)$ 在 $x = -1$ 時連續，求 $a = ?$

【代碼】c11a02m4

【學生練習答案】

1. (1) 7 (2) 0	2. 1	3. $-\frac{1}{2}$	4. $\frac{1}{4}$
5. $\frac{1}{2}$	6. 9	7. (1) 4 (2) 不存在	
8. (1) 不存在 (2) 4 (3) 3 (4) 不存在 (5) 不存在 (6) 1			9. $a = -1$



回家功課

() 1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 4x + 3}$ 等於 (A)0 (B)-1 (C)-2 (D)-3 。

代碼：c11089k1

() 2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 4} =$ (A)0 (B) ∞ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{3}{4}$ 。

代碼：c11205m1

() 3. $\lim_{x \rightarrow 2} (\frac{x^2 + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}) =$ (A) $\frac{13}{4}$ (B) $-\frac{7}{4}$ (C)4 (D)0 。

代碼：c11209m1

() 4. 求極限 $\lim_{x \rightarrow 2} (\frac{x}{x-2} - \frac{4x}{x^2 - 4}) = ?$ (A)-3 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D)3 。

代碼：c11093k1

() 5. 極限值 $\lim_{t \rightarrow 0} (\frac{\sqrt{4+3t} - \sqrt{4+t}}{t}) =$ (A)0 (B)1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$ 。

代碼：c11211m1

() 6. 試求 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x - 4} =$ (A) $-\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C)0 (D)不存在 。

代碼：c11087g1

() 7. 若 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + 3x + b}{x - 1} = 7$ ，則 $a + b$ 之值為
(A)3 (B)-3 (C)2 (D)-2 。

代碼：c11088z1

() 8. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x > 2 \\ 5, & x = 2 \\ x^2 + x + 1, & x < 2 \end{cases}$ ， $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$
(A)1 (B)2 (C)5 (D)7 。

代碼：c11215m1

() 9. 若 $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 1 \\ ax+b, & 1 \leq x < 2 \\ x+1, & x \geq 2 \end{cases}$ 為連續函數，則 $2b - 3a$ 之值為
(A)3 (B)4 (C)5 (D)6 。

代碼：c11086z1

答案：BDACC ABDD

主題二 多項函數的導數與導函數

1. 導數的定義：

- (1) 設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續，若極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ 存在。

則 $f(x)$ 在 $x=a$ 時的導數定義為 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

- (2) 令 $x - a = h$ ，則 $x \rightarrow a \Rightarrow h \rightarrow 0$ ，則得 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

- (3) 若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處之導數存在，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，
若不存在，則函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處不可微。

- (4) 函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，表示 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續

但若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處不一定可微分。

2. 導函數：

- (1) 對函數 $f(x)$ 定義域中的每一個數 a ，導數值 $f'(a)$ 均存在，則稱此 $f(x)$ 為可微分函數，

則稱 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ 為 $f(x)$ 的導函數

- (2) ①設 $y = f(x)$ ，則其一階導函數可表示為 $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = y'$

②設 $y = f(x)$ ，則其在 $x=a$ 處之導數可表示為 $f'(a)$ 或 $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}$



老師講解

設 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)}$ ，求 $f'(3) = ?$



學生練習

設 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)}$ ，求 $f'(2) = ?$

【代碼】c13b04m2



3. 微分公式：設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為可微分函數， C 為常數

- (1) $(C)' = 0$
- (2) $(x^n)' = nx^{n-1}$
- (3) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- (4) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x)g'(x)$
- (5) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- (6) $[(f(x))^n]' = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$ (連鎖規則)



老師講解

試解出下列各式：

- (1) 設 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ ，求 $f'(x)$
- (2) 設 $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 4x$ ，求 $f'(8)$



學生練習

試求下列各式之值：

- (1) 設 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ ，求 $f'(1)$
- (2) 設 $f(x) = \sqrt{x} + 2x - 1$ ，求 $f'(9)$

【代碼】c13a02m2



老師講解

設 $f(x) = (2x^2 + x - 1)(x^5 + 2x^3 + 2x)$ ，
求 $f'(1) = ?$



學生練習

$f(x) = (1 - x^2)(x^2 - 3x + 1)$ ，求 $f'(2) = ?$

【代碼】c13a02m3



老師講解

設 $y = \frac{2x-3}{x^2+1}$ ，求 $\frac{dy}{dx} = ?$



學生練習

設 $f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$ ，求 $f'(1) = ?$

【代碼】c13a02m4

5

老師講解

設 $f(x) = (2x^2 + 3x - 1)^5$ ，求 $f'(-2) = ?$

5

學生練習

設 $f(x) = (x^3 + 2x)^2$ ，求 $f'(2) = ?$

【代碼】c13a03m2

6

老師講解

設 $f(x) = \frac{1}{(x+3)^{10}}$ ，求 $f'(-1) = ?$

6

學生練習

設 $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 6x}$ ，求 $f'(4) = ?$

【代碼】c13b01m1

7

老師講解

設 $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ ，求 $f'(x) = ?$

7

學生練習

設 $f(x) = \sqrt{(x-2)^3}$ ，求 $f'(3)$ 之值。

【代碼】c13b01m2

8

老師講解

設 $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+3}}$ ，求 $f'(6)$ 之值。

8

學生練習

設 $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$ ，求 $f'(\sqrt{3})$ 之值。

【代碼】c13b02m2



老師講解

設 $f(x) = x^3 - 3$ ，求下列各式之值：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+5h) - f(2+3h)}{h}$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h) - f(2-h)}{2h}$$



學生練習

設 $f(x) = x^2 - 2$ ，求下列各式之值：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+5t) - f(2+2t)}{2t}$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-2h)}{3h}$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+4h) - f(2)}{2h}$$

【代碼】c13b03m2

4. 高階導函數：

(1) 二階導函數：

設函數 $y = f(x)$ 可微分，且 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 也可微分，

則 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$ 稱為 $f(x)$ 在 $x = a$ 的二階導函數，

$$\text{記為 } \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = f''(x) = y''$$

(2) 三階導函數：

$f''(x)$ 的導函數稱為 $y = f(x)$ 的三階導函數，

$$\text{記為 } \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{d^3}{dx^3} f(x) = f'''(x) = y'''$$

(3) n 階導函數：

$f^{(n-1)}(x)$ 的導函數稱為 $y = f(x)$ 的 n 階導函數，

$$\text{記為 } \frac{d^{(n)} f(x)}{dx^{(n)}} = \frac{d^{(n)}}{dx^{(n)}} f(x) = f^{(n)}(x) = y^{(n)}$$



老師講解

設 $f''(x)$ 為函數 $f(x)$ 的二階導函數，若 $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ ，則 $f''(x) = 0$ 之解為何？



學生練習

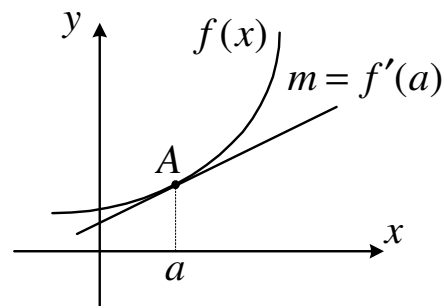
設 $f''(x)$ 為函數 $f(x)$ 的二階導函數，若 $f(x) = x(x+1)(x+2)$ ，求 $f''(1)$ 之值。

【代碼】c13a04m2

5. 導數的幾何意義：

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

表示曲線 $y = f(x)$ 在切點 $P(a, f(a))$ 上切線的斜率。



老師講解

試求函數 $f(x) = y = x^2$ 圖形上以 $(2, 4)$ 為切點之切線方程式。



學生練習

試求函數 $y = \sqrt{x}$ 圖形上以 $(4, 2)$ 為切點之切線方程式。

【代碼】c14a01m2



老師講解

設曲線 $y = x^2 + 4x + 3$ ，試求在 $x = 1$ 之切線方程式。



學生練習

設曲線 $y = x^2 - 4x + 5$ ，試求在 $x = -2$ 之切線方程式。

【代碼】c14a01m3



老師講解

若 $y = x^2$ 在點 (a, b) 之切線與直線 $6x - y + 1 = 0$ 平行，求 $a + b = ?$



學生練習

設函數 $f(x) = x^3 + ax + 1$ ，若 $P(-2, 7)$ 在此函數上，求過 P 之切線方程式。

【代碼】c14b01m2

6. 導數的物理意義：

- (1) 設某物體位移與時間的函數為 $S(t)$ ，則 $S'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{S(t) - S(a)}{t - a}$ 表示此物體在時刻 a 的瞬時速度
- (2) 設某物體速度與時間的函數為 $V(t)$ ，則 $V'(a) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{V(t) - V(a)}{t - a}$ 表示此物體在時刻 a 的瞬時加速度



老師講解

設某質點在直線上運動，
其在時間 t 的距離為 $S(t)=t^3-2t$ ，
試求 $t=2$ 的的瞬時速度與瞬時加速度。



學生練習

GT 賽車中，車子的位置與時間 t 的關係
為 $S(t)=t^3-3t^2+7t$ ，則其
求 $t=3$ 之瞬時速度與瞬時加速度。
【代碼】c14a02m2

【學生練習答案】

1. $-\frac{1}{12}$	2. (1)1 (2) $\frac{13}{6}$	3. 1	4. -2
5. 336	6. $\frac{5}{6}$	7. $\frac{3}{2}$	8. $\frac{7}{2}$
9. (1)4 (2)6 (3)4 (4)8			10. 12
11. $x-4y+4=0$	12. $8x+y-1=0$	13. $5x-y+17=0$	14. 12



回家功課

- () 1. 設 a 與 b 為實數，且 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 分別表示函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的導函數，若 $f(x) = ax$ 與 $g(x) = ax^2 - bx + 3$ 滿足 $f(2) = g(2)$ 及 $f'(2) = g'(2)$ ，則 $a + b = ?$ (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 。 代碼：c13094k1
- () 2. 設 $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ ，則 $f(x)$ 之導函數為
(A) $\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)}$ (B) $\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$ (C) $\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)}$ (D) $\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$ 。 代碼：c13202m1
- () 3. 設 $f''(x)$ 為 $f(x)$ 的二階導函數，若 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ ，則 $f''(x) = 0$ 之解為何？ (A) 2 (B) $\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) 9 。 代碼：c13097k1
- () 4. 設 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$ ，則 $y'(4) = ?$ (A) $-\frac{2}{25}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $-\frac{4}{125}$ (D) $\frac{1}{25}$ 。 代碼：c13215m1
- () 5. 設 $f(x) = x\sqrt{4x^2+1}$ 則 $f(x)$ 在 $x = 0$ 處之導數 $f'(0) = ?$
(A) -1 (B) $-\frac{1}{4}$ (C) 0 (D) 1 。 代碼：c13092k1
- () 6. 設 $f'(x)$ 為函數 $f(x)$ 的導函數，若 $f'(x) = 2x^2$ ，
則 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(2+\theta) - f(2)}{2\theta} = ?$ (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16 。 代碼：c13097k2
- () 7. 若 $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$ ，求 $\lim_{x \rightarrow \sqrt{7}} \frac{f(x) - f(\sqrt{7})}{x - \sqrt{7}} =$
(A) $\frac{\sqrt{7}}{6}$ (B) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $\frac{\sqrt{7}}{12}$ 。 代碼：c13206m1
- () 8. 設 $f(x) = \frac{2x+1}{3-x}$ ，則此函數圖形在點 $P(2,5)$ 的切線方程式為
(A) $7x + y - 19 = 0$ (B) $x - 7y + 33 = 0$
(C) $x + 7y - 37 = 0$ (D) $7x - y - 9 = 0$ 。 代碼：c14201m1
- () 9. 設 $f(x) = x^3 + ax^2 + 4$ ，其中 a 為實數，若 $P(2,4)$ 為此函數圖形上一點，則以 P 為切點的切線方程式為何？
(A) $x - 4y = -14$ (B) $x + 4y = 18$ (C) $4x - y = 4$ (D) $4x + y = 12$ 。 代碼：c14092k1
- () 10. 設某質點在直線上運動，其在時間 t 的速度為 $V(t) = t^2 - \frac{1}{2}\sqrt{t}$ ，其中距離單位為公尺，時間單位為秒。試求當 $t = 4$ 時，其加速度為多少公尺/秒²？ (A) $\frac{59}{2}$ (B) $\frac{23}{4}$ (C) $\frac{63}{8}$ (D) 15 。 代碼：c14090k1

答案：BBACD BADCC

主題三 導數的應用

1. 函數的遞增與遞減：

(1) 遞增函數：

- ① 若 $x_2 > x_1$ ，恆使得 $f(x_2) \geq f(x_1)$ ，則稱函數 $y = f(x)$ 為遞增函數。
- ② 在區間 (a, b) 內，若 $f'(x) \geq 0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 (a, b) 為遞增函數。

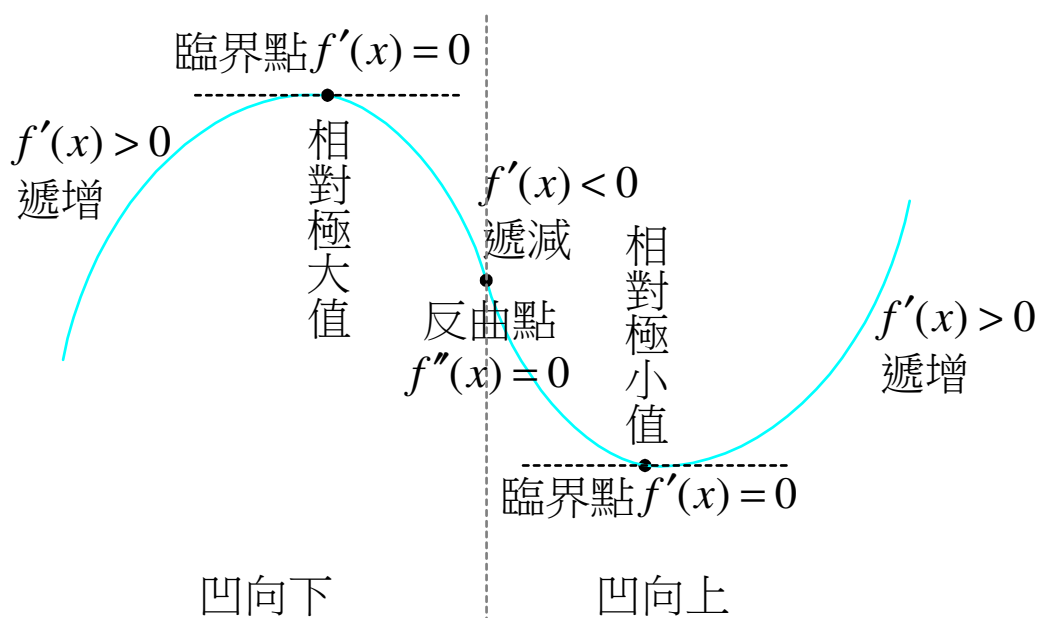
(2) 遞減函數：

- ① 若 $x_2 > x_1$ ，恆使得 $f(x_2) \leq f(x_1)$ ，則稱函數 $y = f(x)$ 為遞減函數。
- ② 在區間 (a, b) 內，若 $f'(x) \leq 0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 (a, b) 為遞減函數。

(3) $f'(x) = 0$ 為臨界點發生處：若 $f'(a) = 0$ ，則臨界點為 $(a, f(a))$ 。

2. 函數圖形的極值：

相對極值必發生在臨界點處，即 $f'(x) = 0$ 。



3. 函數圖形的凹向與反曲點：

- (1) 若 $f'(x)$ 在區間 (a, b) 為遞增函數，即 $f''(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 (a, b) 的圖形為凹口向上
- (2) 若 $f'(x)$ 在區間 (a, b) 為遞減函數，即 $f''(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 (a, b) 的圖形為凹口向下
- (3) $f''(x) = 0$ 為反曲點發生處：若 $f''(a) = 0$ ，則反曲點為 $(a, f(a))$ 。



老師講解

設 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ，試求 $f(x)$ 的
(1)遞增、遞減區間 (2)相對極值
(3)圖形凹向性 (4)反曲點 (5)繪出圖形。



學生練習

設 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ ，試求 $f(x)$ 的
(1)遞增、遞減區間 (2)相對極值
(3)圖形凹向性 (4)反曲點 (5)繪出圖形。

【代碼】c15a01m2



老師講解

設 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 6$ ，試求 $f(x)$ 的

- (1) 遞增、遞減區間
- (2) 相對極值
- (3) 圖形凹向性
- (4) 反曲點
- (5) 與 x 軸交點個數。



學生練習

對函數 $f(x) = -x^3 + 12x + 4$ 之圖

- 形而言，試求 $f(x)$ 的
- (1) 遞增、遞減區間
 - (2) 相對極值
 - (3) 圖形凹向性
 - (4) 反曲點
 - (5) 與 x 軸交點個數

【代碼】c15a02m2



老師講解

設 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ，且 $0 \leq x \leq 4$ ，
求 $f(x)$ 之絕對極大值與絕對極小值。



老師講解

一正方形鋁片，邊長為 24 公分，今從四角各截去一小正方形以摺成無蓋之盒子，
求此盒子之最大體積。



學生練習

設 $f(x) = x^3 - 12x + 2$ ，且 $-3 \leq x \leq 5$ ，
若 $f(x)$ 之絕對極大值為 M 、絕對極小值
為 m ，求 $M + 3m = ?$

【代碼】c15b01m2



學生練習

有一長 8 公寸，寬 5 公寸的長方形紙板，
今從四角截去邊長為 x 公寸的四個小正
方形，以便摺成一個無蓋的紙盒，若
欲使紙盒有最大容積，則 $x = ?$

【代碼】c15b03m2



老師講解

設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ 在 $x = 1$ 與 $x = 3$ 時均有極值，求 a 、 b 之值。



學生練習

設 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$ 在 $x = 1$ 與 $x = 2$ 時均有極值，求 $a + b = ?$

【代碼】c15a03m2



老師講解

若曲線 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 之反曲點為 $(1, 6)$ ，求 $b - a = ?$



學生練習

設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 之反曲點為 $(1, 8)$ ，求 $a - b = ?$

【代碼】c15b02m2

【學生練習答案】

1. (1)遞增區間為 $(-\infty, 0)$ 或 $(2, \infty)$ 、遞減區間為 $(0, 2)$ (2)相對極大值為 $f(0) = 2$ 、相對極小值為 $f(2) = -2$ (3)凹向上區間為 $(1, \infty)$ 、凹向下區間為 $(-\infty, 1)$ (4)反曲點為 $(1, 0)$			
2. (1)遞增區間為 $(-2, 2)$ 、遞減區間為 $(-\infty, -2)$ 或 $(2, \infty)$ (2)相對極大值為 $f(2) = 20$ 、相對極小值為 $f(-2) = -12$ (3)凹向上區間為 $(-\infty, 0)$ 、凹向下區間為 $(0, \infty)$ (4)反曲點為 $(0, 4)$ (5)交三點			
3. 25	4. 1	5. 3	6. -12



回家功課

- () 1. 若 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ 的相對極大值為 M ，相對極小值為 m ，則 $M - m = ?$
(A) 2 (B) 15 (C) 17 (D) 32。
- () 2. 設 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8$ 圖形上的反曲點的座標為
(A) $(-1, 13)$ 及 $(0, 8)$ (B) $(-1, 13)$ 及 $(1, 5)$
(C) $(0, 8)$ 及 $(2, -8)$ (D) $(1, 5)$ 及 $(2, -8)$ 。
- () 3. 設 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ ，當 $x = 3$ 時， $f(x)$ 有極小值 -9 ，則 $a + b$ 等於
(A) -18 (B) -9 (C) 9 (D) 18 。
- () 4. 設 a, b 為實數，若函數 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$ 之圖形的反曲點為 $(1, 0)$ ，則 $a - b = ?$
(A) 1 (B) 5 (C) 9 (D) 13。

代碼：c15094k1

代碼：c15087s1

代碼：c15205m1

代碼：c15096k1

答案：DCCA

歷屆試題

- () 1. 若 $f(x) = (x-1)^5$ ，且 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 的一階導函數，
則 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f'(2)}{x-2} = ?$ (A) 0 (B) 1 (C) 5 (D) 20。
代碼：c13100k1
(100 年統測 C)
- () 2. 若函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x) = x^2 - 6x$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x-6}$ 之值為何？
(A) 0 (B) 1 (C) 6 (D) 不存在。
代碼：c13101k1
(101 年統測 C)
- () 3. 設拋物線 $y = ax^2 + bx$ 在 $x = 1$ 處之切線方程式為 $y - 2 = 4(x - 1)$ ，則
 $3a - 2b$ 之值為何？ (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8。
代碼：c14101k1
(101 年統測 C)
- () 4. 已知多項式 $f(x) = (x^2 - x + 1)^2 - 1$ 。求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - f(0)}{2h}$ 之值
(A) -3 (B) -2 (C) 2 (D) 3。
代碼：c13102s1
(102 年統測 B)
- () 5. 設 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$ ，則下列哪一個方程式為 $f(x)$ 圖形的切線
(A) $x + y + 5 = 0$ (B) $x + y + 3 = 0$ (C) $x + y = 5$ (D) $x + y = 8$ 。
代碼：c14102s1
(102 年統測 B)
- () 6. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{5x^2 - 2x - 3}, & x \neq 1 \\ C, & x = 1 \end{cases}$ 。若 f 在 $x = 1$ 處連續，則 $C = ?$
(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1。
代碼：c11102k1
(102 年統測 C)
- () 7. 已知 a 、 b 為實數， $f(x) = (ax + b)^3$ 。若 $f(2) = 1$ 且 $f'(2) = 6$ ，
則 $a - b = ?$ (A) -2 (B) -1 (C) 3 (D) 5。
代碼：c13102k1
(102 年統測 C)
- () 8. 設 $f(x) = (x^2 + 2)^2$ ，求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = ?$
(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12。
代碼：c13103s1
(103 年統測 B)
- () 9. 設 $f(x) = \frac{x(x-1)(x-4)}{(x+1)(x+2)}$ ，則導數 $f'(0)$ 之值為何？
(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 2。
代碼：c13103k1
(103 年統測 C)



- () 10. 函數 $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3$ 在 $x=1$ 之導數為何？
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 。 代碼：c13104s1
(104 年統測 B)
- () 11. 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2-h}}{h} = ?$ (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。 代碼：c13104k1
(104 年統測 C)
- () 12. 已知 a, b 為實數，若過函數 $f(x) = ax^2 + bx$ 圖形上一點 $P(1, 5)$ 的切線斜率為 3，則 $f'(2) = ?$ (A)-3 (B)-1 (C)1 (D)3 。 代碼：c14104k1
(104 年統測 C)
- () 13. 若 $f(x) = (x^2 + 3x - 1)^2(x^3 - 5x^2)$ ，則 $f'(1)$ 為何？
(A)-183 (B)-87 (C)-57 (D)-36 。 代碼：c13105s1
(105 年統測 B)
- () 14. 已知 $f(x) = \frac{x(2x-1)(13x+2)^4}{\sqrt{27x+9}}$ ，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 的導數 $f'(0)$ 之值。
(A) $-\frac{16}{3}$ (B) $-\frac{8}{3}$ (C) $-\frac{4}{3}$ (D) $-\frac{1}{3}$ 。 代碼：c13105k1
(105 年統測 C)
- () 15. 求函數 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x - 2}$ 在 $x=1$ 的導數
(A)-9 (B)-8 (C)-7 (D)-6 。 代碼：c13106s1
(106 年統測 B)
- () 16. 已知 a, b 為實數，且 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 13$ 。若 $f'(-1) = 1$ 且 $f'(0) = 2$ ，則 $a + b = ?$ (A)-1 (B)0 (C)3 (D)4 。 代碼：c13106k1
(106 年統測 C)
- () 17. 若 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$ 的相對極大值為 a ，相對極小值為 b ，則 $a + b = ?$ (A) $\frac{-27}{2}$ (B) $\frac{-3}{2}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) $\frac{27}{2}$ 。 代碼：c15106k1
(106 年統測 C)
- () 18. 若 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < -1 \\ 2, & x = -1 \\ 6 - 3x^2, & x > -1 \end{cases}$ ，則 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = ?$ (A)0 (B)1 (C)2 (D)3 代碼：c11106k1
(106 年統測 C)
- () 19. 在坐標平面上，函數 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$ 的圖形於切點 $(2, 1)$ 的切線斜率為何？ (A)0 (B)1 (C)2 (D)3 。 代碼：c14107s1
(107 年統測 B)

- () 20. 若 $f(x) = \frac{-3(x+1)}{x^4 + x^2 + 1}$ ，則 $f'(-1)$ 之值為何？
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。
- 代碼：c13107s1
(107 年統測 B)
- () 21. 若 $f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1} (x \neq \pm 1)$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 之值為何？
(A) 不存在 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1。
- 代碼：c11107s1
(107 年統測 B)
- () 22. 若直線 L 過點 $(9, 5)$ ，且與函數 $y = f(x)$ 的圖形相切於點 $(3, 1)$ ，
則 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = ?$ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) 3。
- 代碼：c14107k1
(107 年統測 C)
- () 23. 設函數 $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ 。試問 $f'(1) + f''(1)$ 之值為何？
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6。
- 代碼：c13108s1
(108 年統測 B)
- () 24. 已知函數 $f(x)$ 的導函數為 $g(x) = x^2 - 4x + 2$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ?$
(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2。
- 代碼：c13108k1
(108 年統測 C)
- () 25. 小明設計了一款迴力鏢，已知將此迴力鏢擲出後，迴力鏢過了時間 t 秒後與小明的距離為 $f(t) = \frac{100t}{t^2 + 9}$ 公尺，若在 t_0 秒時，迴力鏢離小明最遠，則 $t_0 = ?$ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。
- 代碼：c15108k1
(108 年統測 C)
- () 26. 若 $f(x) = x + \pi^2$ ，其中 π 為圓周率，則 $f'(x) = ?$
(A) 1 (B) $1 + \pi$ (C) $1 + 2\pi$ (D) $1 + \pi^2$ 。
- 代碼：c13109s1
(109 年統測 B)
- () 27. 關於下列各極限，何者錯誤？ (A) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt[3]{x-2} = 0$ (B) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x-2} = 0$
(C) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[3]{x-2} = 0$ (D) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0$ 。
- 代碼：c11109k1
(109 年統測 C)
- () 28. 設 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$ 在閉區間 $[-3, 3]$ 內的最大值與最小值分別為 m 、 n ，則 $m - n = ?$ (A) 90 (B) 98 (C) 100 (D) 108。
- 代碼：c15109k1
(109 年統測 C)
- () 29. 設 $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 2 \\ x^2-2x+3, & x \leq 2 \end{cases}$ ，則 $f'(2) = ?$
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 不存在。
- 代碼：c13109k1
(109 年統測 C)



- () 30. 已知兩多項式函數 $g(x)$ 及 $h(x)$ 之導函數分別為 $g'(x)$ 及 $h'(x)$ ，
且 $h(x) = 4g(x) - 7x + 9$ 。若 $g'(0) = 3$ ，則 $h'(0) = ?$
(A)5 (B)9 (C)14 (D)21。

代碼：110tcb11
(110 年統測 B)

- () 31. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(3+h)+2} - \frac{1}{3+2}}{h} = ?$ (A) $-\frac{1}{25}$ (B) $-\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{25}$ 。

代碼：110tcc05
(110 年統測 C)

- () 32. 已知函數 $f(x) = x^3 + \frac{12}{x}$ 圖形在切點 (a, b) 的切線斜率為 9。若 $a > 0$ ，
則 $a + b = ?$ (A)-8 (B)11 (C)14 (D)16。

代碼：111tcc18
(111 年統測 C)

- () 33. 若函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+a}{x^2-2x-3}, & x > 3 \\ \frac{x-5}{x-b}, & x \leq 3 \end{cases}$ 在 $x=3$ 處連續，則 $a+b = ?$
(A)-3 (B)-1 (C)1 (D)3。

代碼：111tcc25
(111 年統測 C)

答案：DABAC BDDDB DBAAA DCDDA CBDDB ABCBA ADC

綜合練習

() 1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} \left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+2} \right) = ?$ (A) 0 (B) -2 (C) 2 (D) 不存在。

代碼：c11088y1

() 2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{x-4} =$ (A) $-\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $-\frac{1}{16}$ (D) $\frac{1}{16}$ 。

代碼：c11088s1

() 3. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x-2}{|x-2|} + |x| \right) - \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x-2}{|x-2|} + |x| \right) = ?$
(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) -2。

代碼：c11222m1

() 4. 若 $f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。

代碼：c11092k1

() 5. 關於函數的導函數，下列何者正確？
(A) $f(x) = (4x+5)(6x+7)$ ，則 $f'(x) = 24$
(B) $f(x) = \sqrt[3]{x^7} + 4x$ ，則 $f'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} + 4$
(C) $f(x) = (4x+5)^2$ ，則 $f'(x) = 2(4x+5)$
(D) $f(x) = \frac{4x+4}{x+1}$ ，則 $f'(x) = 4$ 。

代碼：c13099k1

() 6. $f(x) = (1-x^2)^2(x^2-3x+1)^3$ ，則 $f'(2)$ 之值為
(A) 51 (B) 21 (C) -18 (D) 3。

代碼：c13209m1

() 7. 若 $f(x) = (x^2-3x+3)^4$ ，則 $f''(2) = ?$
(A) 15 (B) 20 (C) 28 (D) 32。

代碼：c13235m1

() 8. 設 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 的導函數，若 $f(x) = x + |x|$ ，則 $f'(1) + f'(-1) = ?$
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4。

代碼：c14094k1

() 9. 函數 $f(x) = |x| + |x+1| + |x+5|$ ，則 $f(x)$ 在 $x = -3$ 處的導數 $f'(-3)$ 為
(A) 1 (B) -3 (C) 3 (D) -1。

代碼：c14083s1

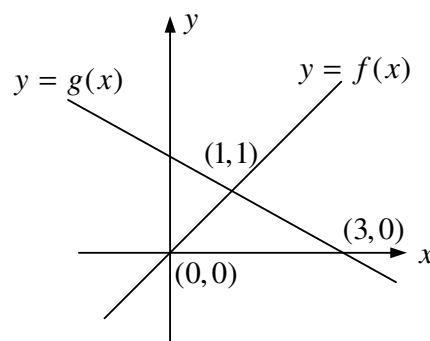


() 10. 設 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ 2x-1, & x < 1 \end{cases}$ ，求 $f'(1) = ?$ (A)1 (B)2 (C)3 (D)不存在。 代碼：c14216m1

() 11. 設函數 $f(x) = \begin{cases} 3x-6, & x \leq -1 \\ ax^2+x, & x > -1 \end{cases}$ 是連續函數且 $f'(-\frac{1}{4}) = b$ ，則 $a+b = ?$ 代碼：c14085s1
(A)-3 (B)-2 (C)-1 (D)0。

() 12. 下列各曲線中，何者再 $x=1$ 處的切線斜率為12？ 代碼：c14098k1
(A) $y = (x^2+1)^3$ (B) $y = (2x+1)(4x^2-3)$
(C) $y = \frac{x-47}{x+1}$ (D) $y = (3x+1)^2$ 。

() 13. 設函數 $y = f(x)$ 的圖形為過 $(0,0)$ 與 $(1,1)$ 二點之直線，函數 $y = g(x)$ 的圖形為過 $(1,1)$ 與 $(3,0)$ 兩點之直線，若 $u(x) = f(x) \cdot g(x)$ ，則 $u(x)$ 在 $x=1$ 的導函數 $u'(1) = ?$ 代碼：c14091k1
(A)-1 (B)-0.5 (C)0.5 (D)1。



() 14. 在直線軌道上的電車，煞車後在 t 秒間走的距離為 x 公尺， $x(t) = 30t - 5t^2$ ，則電車需在進站前幾公尺就必須踩煞車，才能正確停在旅客上下車之位置？ 代碼：c14088x1
(A)35 公尺 (B)40 公尺 (C)45 公尺 (D)50 公尺。

() 15. 設 $0 \leq x \leq 30$ ，若 $f(x) = \frac{x^2+300}{x+10}$ ，則 $f(x)$ 之最小值為何？ 代碼：c15097k1
(A)4 (B)8 (C)12 (D)20。

() 16. 已知函數 $f(x) = x^2 - 3x + 5$ 與函數 $g(x) = |2x+1|$ 圖形相交於兩點，而其 x 坐標分別為 a 與 b ，其中 $a < b$ 。若 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值分別為 m_1 與 m_2 ，則 $m_1 + m_2 = ?$ (A)-2 (B)-1 (C)0 (D)1。 代碼：c14099k1

答案：BCDBB DBCDB ACCCD D

單元 15 積分及其應用

主題一 無窮數列的極限與無窮等比級數

1. 無窮數列極限的概念：

- (1) 設 $\langle a_n \rangle$ 為一無窮數列，當 n 趨近於無窮大時 ($n \rightarrow \infty$)， a_n 的值趨近於定值 α ，則稱數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限為 α ，記作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$

若無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限存在， $\langle a_n \rangle$ 稱為收斂數列

$$\text{例：} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$$

若無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 的極限不存在， $\langle a_n \rangle$ 稱為發散數列

$$\text{例：} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \text{不存在}$$

(2) 數列極限的四則運算：

設 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 皆為收斂數列，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ ， k 為常數，則

$$\textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \alpha$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \pm \beta$$

$$\textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n) = \alpha \beta$$

$$\textcircled{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{其中 } b_n \neq 0, \beta \neq 0)$$

(3) 無窮數列極限的求法：

分式型：設 $f(n)$ 與 $g(n)$ 皆為 n 的多項式，其領導係數分別為 α 、 β ，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0 & , \deg f(n) < \deg g(n) \\ \frac{\alpha}{\beta} & , \deg f(n) = \deg g(n) \\ \text{不存在} & , \deg f(n) > \deg g(n) \end{cases}$$

根式型：當 $n \rightarrow \infty$ 時，出現 $\frac{\infty}{\infty}$ 、 $\infty - \infty$ 或 $0 \cdot \infty$ 時，先將根式部分有理化，再求極限。

$$\text{等比型：} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} \infty & , |r| > 1 \\ 0 & , |r| < 1 \\ 1 & , r = 1 \\ \text{不存在} & , r = -1 \end{cases}$$



夾擠定理(三明治定理)：

設 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle x_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ 為三無窮數列，且滿足 $a_n \leq x_n \leq b_n$ ，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ ，
則 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$



老師講解

試求下列的極限值：

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{3x^2-x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+4x}{3x^2-2x}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x-1}{5x^2-2}$$



學生練習

試求下列的極限值：

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+3}{2x^2-1} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-4}{x^3-3}$$

【代碼】c12a01m2



老師講解

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{3x+4} - \frac{3x-2}{5x+1} \right)$ 之值。



學生練習

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{2x-1} + \frac{2x}{3x+1} \right)$ 之值。

【代碼】c12a02m2



老師講解

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3}{n+1} - \frac{n^2 - 2}{n} \right)$ 之值。



學生練習

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n+2} - \frac{n^2 + 1}{n} \right)$ 之值。

【代碼】c12a02m3



老師講解

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$ 之值。



學生練習

求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{4x^2 - 3} - 2x)$ 之值。

【代碼】c12a02m4



老師講解

試求下列的極限值：

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{999}{1000} \right)^n$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1001}{1000} \right)^n$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + (0.9)^n}{5 - 2(0.99)^n}$



學生練習

試求下列的極限值：

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{317}{125} \right)^n$

【代碼】c12a02m5



老師講解

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n+1} + 7^{n+1} + 520}{492 + 7^n + 3^{2n-1}}$ 之值。



學生練習

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n-1} - 3^n + 49}{3^{n+1} + 4^{n+2} - 2015}$ 之值。

【代碼】c12b01m2

2. 無窮等比級數：

設 $S = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ ，則

(1) 當 $|r| < 1$ 時，其和 $S = \frac{a}{1-r}$ (收斂級數)

(2) 當 $|r| \geq 1$ 時，其和 S 不存在(發散級數)

【基本練習】

試求下列各無窮級數之總和：

(1) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$

(2) $2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \cdots$



老師講解

若無窮級數 $0.77 + 0.0707 + 0.007007 + \cdots$
化成最簡分數為 $\frac{q}{p}$ ，試求 $q - 3p$ 之值。



學生練習

試求級數 $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32}$
 $+ \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \cdots$ 之和。

【代碼】a53a02m2



老師講解

試求無窮級數 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5^k}$ 之和。



學生練習

試求無窮級數 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k+1}}$ 之和。

【代碼】a53a02m3



老師講解

試求無窮級數 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k - 2^{k+1}}{5^k}$ 之和。



學生練習

試求無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^{n+1}}{4^n}$ 之和。

【代碼】a53b01m2



老師講解

若一球由高 90 公尺之地方落下，每次著地後反躍之高度為原高之 $\frac{2}{3}$ ，試求此球靜止前所經之距離為多少公尺？



學生練習

若一球由高 60 公尺之地方落下，每次著地後反躍之高度為原高之 $\frac{1}{3}$ ，試求此球靜止前所經之距離為多少公尺？

【代碼】a53b02m2



老師講解

將下列循環小數化為最簡分數：

- (1) $0.\overline{7}$ (2) $0.\overline{341}$
(3) $0.5\overline{26}$ (4) $2.45\overline{68}$



學生練習

將下列循環小數化為最簡分數：

- (1) $0.\overline{34}$ (2) $0.10\overline{24}$
【代碼】 a53b03m2

【學生練習答案】

1. (1) $\frac{5}{2}$ (2) 0	2. $\frac{13}{6}$	3. -2	4. $-\frac{3}{4}$
5. (1) 0 (2) ∞ (不存在)	6. $\frac{1}{64}$	7. $\frac{10}{7}$	8. $\frac{1}{6}$
9. -8	10. 120	11. (1) $\frac{34}{99}$ (2) $\frac{169}{1650}$	

回家功課

- () 1. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n})$ 之值？ (A)不存在 (B)0 (C)1 (D)-1 。 代碼：c12087y1
- () 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) =$ (A)0 (B) $\frac{1}{2}$ (C)1 (D) ∞ 。 代碼：c12209m1
- () 3. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - n}{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-n}} = ?$ (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C)2 (D)4 。 代碼：c12094k1
- () 4. 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3^n-1}{2^n-3^n} + \frac{3n^2+2n}{5n^2+1}) =$ (A) $-\frac{2}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $-\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$ 。 代碼：c12213m1
- () 5. 設 $x = \frac{1}{5}$ 時， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n-5}{x^n+5} = a$ ；設 $x = -5$ 時， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n-2}{x^n+2} = b$ ，則 $a+2b = ?$ (A)-1 (B)1 (C)2 (D)3 。 代碼：c12214m1
- () 6. 無窮級數 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k+1}} + \dots = ?$ (A) $\frac{41}{24}$ (B) $\frac{59}{24}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$ 。 代碼：a53099k1
- () 7. $\sum_{k=1}^{\infty} k(\frac{2}{3})^k$ 之值為 (A)2 (B)4 (C)6 (D)8 。 代碼：a53208m1
- () 8. 若無窮等比級數 $x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + \dots = \frac{2}{3}$ ，則 $x = ?$ (A) $\frac{2}{7}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{3}{5}$ 。 代碼：a53098s1
- () 9. 試求無窮級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n} = ?$ (A) $\frac{2}{3}$ (B)8 (C) $\frac{21}{2}$ (D) ∞ 。 代碼：a53097s1
- () 10. 無窮級數 $\frac{3}{5} + \frac{5}{5^2} + \frac{9}{5^3} + \dots + \frac{2^n+1}{5^n} + \dots$ 的和為多少？ (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{11}{12}$ 。 代碼：a53093s1

答案：DBAAB ACACD



主題二 積分與其應用

1. 不定積分：

(1) 反導函數：設 $F(x)$ 的導函數為 $f(x)$ ，則 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數。

(2) 不定積分：

① 若 $F = x^2 + x$ 、 $F_1 = x^2 + x + 2$ 、 $F_2 = x^2 + x + \sqrt{3}$ ，則 F, F_1, F_2 的導函數都是 $2x + 1$ ，

故 F, F_1, F_2 都是 $2x + 1$ 的反導函數，也就是 $F + c$ (c 為常數) 皆為 $2x + 1$ 的反導函數。

② 設 c 為常數，若 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數，則 $F(x) + c$ 稱為 $f(x)$ 的不定積分，

以符號 $\int f(x) dx$ 表示，記作 $\int f(x) dx = F(x) + c$ (c 為常數)，

其中 $\int$ 為積分符號， $f(x)$ 稱為被積分函數。

(3) 不定積分的公式：

$$\textcircled{1} \int k dx = kx + c \quad (k \text{ 為常數})$$

$$\textcircled{2} \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\textcircled{3} \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\textcircled{4} \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$



老師講解

求下列各不定積分：

$$(1) \int (x^2 + 2x - 3) dx \quad (2) \int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$$



學生練習

求下列各不定積分：

$$(1) \int (2x^3 - 3x^2 + 4x + 1) dx \quad (2) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

【代碼】c21a01m2



老師講解

求下列各不定積分：

$$(1) \int (x+2)(x-1) dx \quad (2) \int \frac{x^3+1}{x^2} dx$$



學生練習

求下列各不定積分：

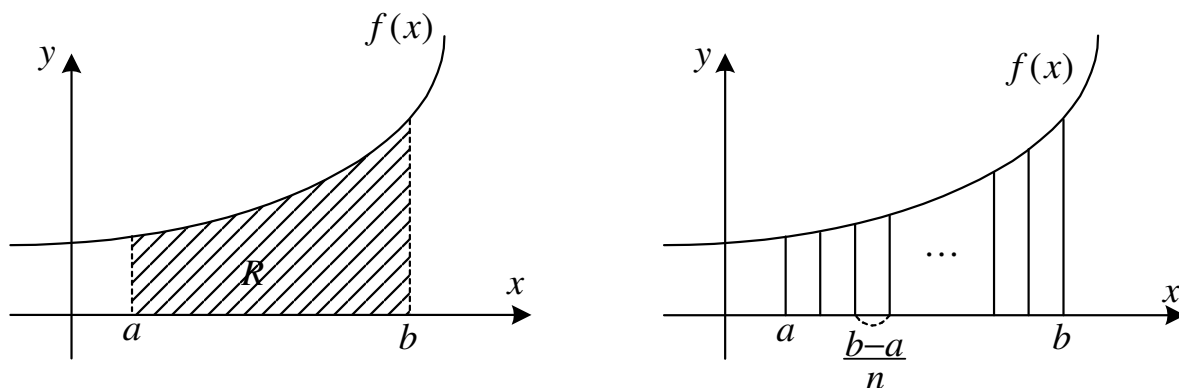
$$(1) \int (3x+1)^2 dx \quad (2) \int \frac{3x^3 - 2x^2 + x}{x} dx$$

【代碼】c21a01m3

2. 定積分：

(1) 黎曼和與定積分：

設函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 之間為連續函數，且 $f(x) \geq 0$ ，則函數 $f(x)$ 與 x 軸、 $x=a$ 、 $x=b$ 所圍成的區域 R 的面積，可由下列步驟求得：

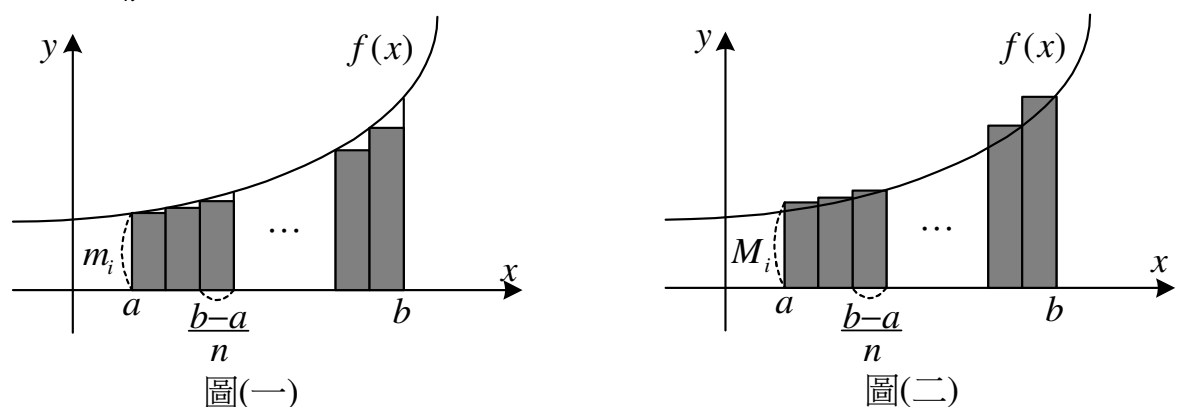


① 將 $\overline{ab}$ 分成 n 等分，每一等分長為 $\frac{b-a}{n}$

② 在每一等分中取 $f(x)$ 之最大值 M_i 及最小值 m_i

③ 如下圖(一)之矩形面積總和稱為下和(L_n)，下圖(二)之矩形面積總和稱為上和(M_n)，

且 $L_n \leq R \leq M_n$ 。



④ 當 $n \rightarrow \infty$ 時， $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n \leq R \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ ，此時 $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ 所求得的極限值相同，

故 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ ，此極限值 R 即 $f(x)$ 與 x 軸、 $x=a$ 、 $x=b$ 所圍成的區域面積，稱為

函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定積分，記作 $\int_a^b f(x) dx$ ，其中 a 、 b 分別表定積分的下限和上限。

⑤ 若 $f(x) > 0$ ， $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 與 x 軸所圍成面積為 $\int_a^b f(x) dx$

(2) 定積分性質：

設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為多項式函數， k 為常數

$$\textcircled{1} \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\textcircled{2} \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$\textcircled{3} \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\textcircled{4} \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\textcircled{5} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{其中 } a < c < b)$$

(3) 定積分計算：

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 為連續函數，且 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數，即 $F'(x) = f(x)$ ，

則 $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ 。



老師講解

求定積分 $\int_{-1}^2 (x-1)(x+1)dx$ 之值。



學生練習

求定積分 $\int_{-1}^2 x(4-3x)dx$ 之值。

【代碼】c21a02m2



老師講解

求定積分 $\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})dx$ 之值。



學生練習

求定積分 $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ 之值。

【代碼】c21a02m3



老師講解

求定積分 $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$ 之值。



學生練習

求定積分 $\int_1^3 \frac{x^4 + 3x^2 - 3}{x^4}dx$ 之值。

【代碼】c22b01m2

(4) 代換積分法：

令 $u = g(x)$ ，則 $du = g'(x)dx$ ，故 $\int [f(g(x)) \times g'(x)] dx = \int f(u) du$



6

老師講解

求下列定積分之值：

(1) $\int_0^2 (2x-3)(x^2-3x+3)^2 dx$

(2) $\int_1^3 (2x-3)^3 dx$

(3) $\int_1^{\sqrt{5}} x\sqrt{2x^2-1} dx$

(4) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+3)^2} dx$



6

學生練習

求下列定積分之值：

(1) $\int_0^1 (x^3+2)^3 3x^2 dx$ (2) $\int_{-3}^2 (x+3)^4 dx$

(3) $\int_0^2 \frac{x+1}{(x^2+2x-5)^3} dx$ (4) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

【代碼】 c22b02m2



(5) 定積分的幾何意義與面積關係：

①若多項式 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 區間內，函數 $f(x) \geq 0$ 恆成立，

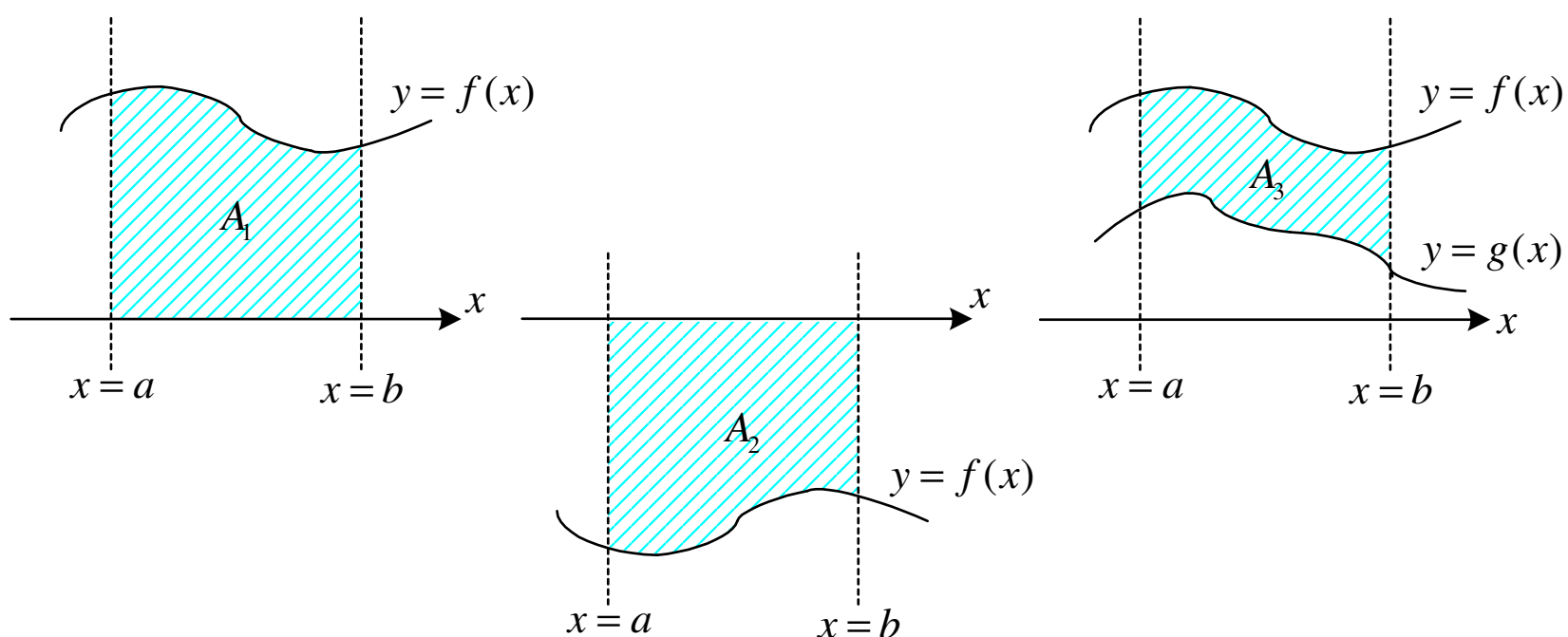
則 $f(x)$ 的圖形與 x 軸， $x = a$ ， $x = b$ ，所圍成的面積為 $\int_a^b f(x) dx$ (如下圖 A_1)

②若多項式 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 區間內，函數 $f(x) \leq 0$ 恆成立，

則 $f(x)$ 的圖形與 x 軸， $x = a$ ， $x = b$ ，所圍成的面積為 $-\int_a^b f(x) dx$ (如下圖 A_2)

③在 $[a, b]$ 區間內，若 $f(x)$ 恆大於或等於 $g(x)$ ，

則 $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 在 $[a, b]$ 區間內所圍成面積為 $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ (如下圖 A_3)



老師講解

利用幾何圖形的面積求定積分 $\int_{-1}^2 |x| dx$ 。



學生練習

利用圖形面積求定積分 $\int_{-1}^3 |x-1| dx$ 。

【代碼】 c22a01m2

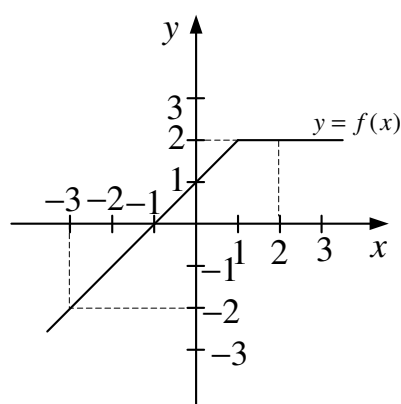


老師講解

函數 $f(x)$ 的圖形如右所示，
求下列各式之值。

(1) $\int_{-3}^2 |f(x)| dx$

(2) $\int_{-3}^2 f(x) dx$

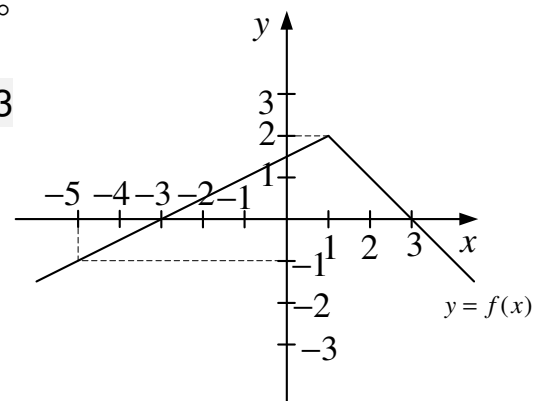


學生練習

函數 $f(x)$ 的圖形如右所示，

求 $\int_{-5}^3 f(x) dx$ 之值。

【代碼】c22a01m3



老師講解

已知 $\int_1^2 f(x) dx = 5$ ， $\int_2^5 f(x) dx = 4$ ，

$\int_1^8 g(x) dx = 2$ ， $\int_8^5 g(x) dx = 3$ ，

求 $\int_1^5 [2f(x) + 3g(x)] dx$ 之值。



學生練習

已知 $\int_1^6 f(x) dx = 9$ ， $\int_6^4 f(x) dx = 2$ ，

求 $\int_1^4 f(x) dx$ 之值。

【代碼】c22a01m4



老師講解

求 $f(x) = y = 4x + x^2$ 與 x 軸所圍面積。



學生練習

求 $f(x) = y = x^2 - x$ 與 x 軸所圍面積。

【代碼】 c22a02m3



老師講解

求 $y = -x^2 + 1$ 與 $y = 0$ 、 $x = 0$ 、 $x = 1$ ，
所圍成之面積。



學生練習

求直角坐標平面上之 $y = x^2$ ， $x = 1$ ，
 $x = 3$ ， $y = 0$ 所圍成之面積。

【代碼】 c22a02m2



老師講解

求 $y = x^2 - 1$ 與 $y = x + 1$ 所圍圖形面積。



學生練習

求 $y = x^2$ 與 $y = 2x + 3$ 所圍面積。

【代碼】c22a03m2

【學生練習答案】

1. (1) $\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + x + c$ (2) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$		2. (1) $3x^3 + 3x^2 + x + c$ (2) $x^3 - x^2 + x + c$	
3. -3	4. 2	5. $\frac{82}{27}$	
6. (1) $\frac{65}{4}$ (2) 625 (3) $-\frac{4}{225}$ (4) 1		7. 4	8. 5
9. 11	10. $\frac{1}{6}$	11. $\frac{26}{3}$	12. $\frac{32}{3}$



回家功課

() 1. 求 $\int_{-1}^1 (2x+1)(x+1)dx = ?$ (A) $\frac{4}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{10}{3}$ (D) 5 。

代碼：c21093k1

() 2. 試求 $\int_1^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = ?$ (A) 3 (B) 6 (C) 8 (D) 12 。

代碼：c21096k1

() 3. 定積分 $\int_1^4 \frac{x^2+4}{\sqrt{x}} dx$ 的值等於
(A) $\frac{10}{3}$ (B) $\frac{34}{5}$ (C) $\frac{58}{5}$ (D) $\frac{102}{5}$ 。

代碼：c21205m1

() 4. 試求定積分 $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx =$
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

代碼：c21091k1

() 5. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx = ?$ (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 。

代碼：c21092k1

() 6. 試求 $\int_{-1}^1 |x^3| dx = ?$ (A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 。

代碼：c21095k1

() 7. 已知 $\int_1^2 f(x)dx = 1$, $\int_2^4 f(x)dx = 3$, $\int_1^2 g(x)dx = 2$, $\int_2^4 g(x)dx = 5$,
試求 $\int_1^4 (2f(x) + g(x))dx = ?$
(A) 13 (B) 15 (C) 17 (D) 23 。

代碼：c22097k1

() 8. 平面上曲線 $y = x^2$ 與直線 $y = 1$ 所圍成的區域面積為何？
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{4}{3}$ 。

代碼：c22091k1

() 9. 若 S 為拋物線 $y = x^2 + 4x - 5$ 與 x 軸所圍成的封閉區域，則 S 的面積為何？
(A) 24 (B) 27 (C) 32 (D) 36 。

代碼：c22092k1

() 10. 在坐標平面上由拋物線 $y = x(2-x)$ 與 x 軸所圍成的區域面積為何？
(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{8}{3}$ (C) 2 (D) 4 。

代碼：c22096k1

答案：CDDAA CBDDA

歷屆試題

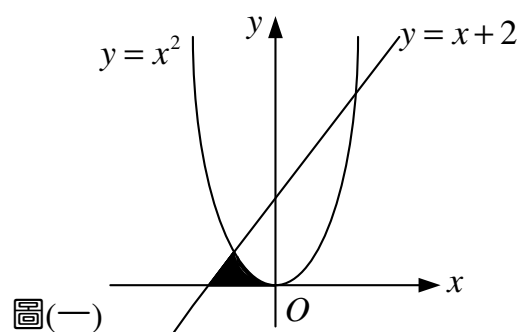
- () 1. 若無窮等比級數 $(0.4) + (0.4)^2 + (0.4)^3 + \cdots + (0.4)^n + \cdots$ 的和為 a ，
無窮等比級數 $(0.2) + (0.2)^2 + (0.2)^3 + \cdots + (0.2)^n + \cdots$ 的和為 b ，則 $\frac{a}{b} = ?$
(A) $\frac{4}{3}$ (B) 2 (C) $\frac{8}{3}$ (D) 4。

代碼：a53100k1
(100 年統測 C)

- () 2. 設 $f(x) = \sqrt{2x-1}$ ，且 $f''(x)$ 為 $f(x)$ 的二階導函數，則 $\int_1^5 f''(x)dx = ?$
(A) $-\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$ 。

代碼：c21100k1
(100 年統測 C)

- () 3. 求圖(一)陰影部分之面積為何？
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) 1 (D) $\frac{4}{3}$ 。



代碼：c22100k1
(100 年統測 C)

- () 4. 求無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{2})^{n+1}$ 之和？ (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{6}$ 。

代碼：a53101s1
(101 年統測 B)

- () 5. 若函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x) = 3x^2 + 6x$ 且 $f(1) = 3$ ，則 $\int_0^2 f(x)dx$ 之
值為何？ (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 20。

代碼：c21101k1
(101 年統測 C)

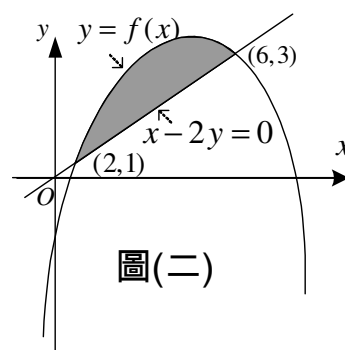
- () 6. 已知無窮等比級數 $10 + \frac{10}{1.001} + \frac{10}{1.001^2} + \cdots + \frac{10}{1.001^n} + \cdots$ 之和為 P ，
則 P 之值為何？ (A) 10000 (B) 10010 (C) 10100 (D) 11000。

代碼：a53102s1
(102 年統測 B)

- () 7. 求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3})dx = ?$ (A) $\frac{97}{36}$ (B) $\frac{49}{18}$ (C) $\frac{17}{6}$ (D) $\frac{26}{9}$ 。

代碼：c21102k1
(102 年統測 C)

- () 8. 已知 $y = f(x)$ 與 $x - 2y = 0$ 相交於 $(2,1)$ 、 $(6,3)$ 兩點，
如圖(二)若陰影部份的面積為 $\frac{16}{3}$ 且 $\int_0^2 f(x)dx = -\frac{13}{3}$ ，
則 $\int_0^6 f(x)dx = ?$ (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10。



代碼：c22102k1
(102 年統測 C)



- () 9. 已知循環小數 $0.\bar{9} = 0.9999\ldots$ ，令 $a = 0.\bar{9} \times 0.9$ ，則下列何者正確？
(A) $a < 0.8\bar{9}$ (B) $a = 0.8\bar{9}$ (C) $a < 0.9$ (D) $a > 0.9$ 。

代碼：a53103s1
(103 年統測 B)

- () 10. 求定積分 $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} (\pi^2 x + \pi) dx = ?$ (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{9}{2}$ (D) $\frac{11}{2}$ 。

代碼：c21103s1
(103 年統測 B)

- () 11. 設 $f(x) = 2x^2 - 3$ ， $g(x) = 3 - x^2$ ，則定積分 $\int_{-3}^3 [f(x) - g(x)] dx$ 之值為何？ (A) 0 (B) 18 (C) 42 (D) 54。

代碼：c21103k1
(103 年統測 C)

- () 12. 曲線 $y = f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ 在 $x = 1$ 、 $x = 3$ 之間與 x 軸所圍成之區域的面積為何？ (A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 36。

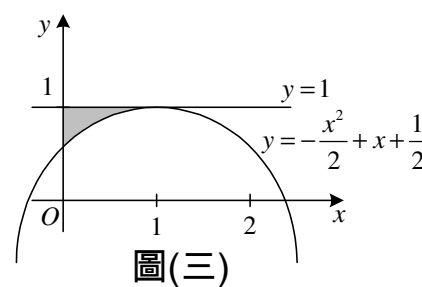
代碼：c22104s1
(104 年統測 B)

- () 13. 求 $\int_{-3}^3 (1 - 2x)(1 + 2x) dx = ?$ (A) -66 (B) -33 (C) 33 (D) 66。

代碼：c21104k1
(104 年統測 C)

- () 14. 由 $y = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$ ， $y = 1$ 和 $x = 0$ 所圍成的區域，如圖(三)陰影部分，則此區面積可由下列何式求得？

(A) $\int_0^1 (-\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}) dx$ (B) $\int_0^1 (\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}) dx$
(C) $\int_0^1 (-\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}) dx$ (D) $\int_0^1 (\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}) dx$ 。



代碼：c22104k1
(104 年統測 C)

- () 15. 試求曲線 $y = -x^2 + 1$ 在 $x = -1$ 、 $x = 2$ 之間與 x 軸所圍成區域的面積。
(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{7}{3}$ (D) $\frac{8}{3}$ 。

代碼：c22105s1
(105 年統測 B)

- () 16. 試求定積分 $\int_{-1}^3 |2x - 1| dx$ 之值 = ? (A) $\frac{15}{2}$ (B) $\frac{17}{2}$ (C) $\frac{19}{2}$ (D) $\frac{21}{2}$ 。

代碼：c21105k1
(105 年統測 C)

- () 17. 設 $f(x) = x^3 + 3x^2$ 、 $g(x) = 4$ ，則兩函數 $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 之圖形所圍成的封閉區域面積為何？ (A) $\frac{11}{4}$ (B) $\frac{27}{4}$ (C) $\frac{91}{4}$ (D) $\frac{221}{4}$ 。

代碼：c22105k1
(105 年統測 C)

() 18. 求定積分 $\int_0^2 6x(x^2-1)^2 dx$ 之值 (A) 24 (B) 26 (C) 28 (D) 30。

代碼：c21106s1
(106 年統測 B)

() 19. 設 $f(x)$ 為多項式函數，若 $\int_1^3 f(x) dx = 1$ 、 $\int_2^5 f(x) dx = 4$ 且 $\int_2^3 f(x) dx = 2$ ，則 $\int_1^5 f(x) dx = ?$ (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7。

代碼：c22106k1
(106 年統測 C)

() 20. $\int_{-4}^0 |2x+5| dx = ?$ (A) $\frac{17}{2}$ (B) 8 (C) $\frac{17}{4}$ (D) 4。

代碼：c22107k1
(107 年統測 C)

() 21. 若函數 $f(x)$ 的導函數 $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ ，且 $f(0) = 6$ ，則 $f(x)$ 的相對極小值為何？ (A) -5 (B) -4 (C) -3 (D) -2。

代碼：c21107k1
(107 年統測 C)

() 22. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (4x-1)^3 dx = ?$ (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ 。

代碼：c21107k2
(107 年統測 C)

() 23. 在理想環境下，將一球自離地面 30 公尺處垂直落下，球只會上下垂直來回彈跳。若每次反彈高度為前一次高度的 $\frac{2}{5}$ ，則此球靜止前所經過的路程為多少公尺？ (A) 50 (B) 60 (C) 70 (D) 80。

代碼：a53108s1
(108 年統測 B)

() 24. 設函數 $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ 。試問曲線 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 及 $x=2$ 之間與 x 軸所包圍之區域的面積為何？ (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11。

代碼：c22108s1
(108 年統測 B)

() 25. 計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n}) = ?$ (A) $\frac{3}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{8}$ 。

代碼：c12108k1
(108 年統測 C)

() 26. 已知 $F(x) = \frac{d}{dx} [\int_1^x (t^2 + 1) dt]$ ，則 $F(1) = ?$
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。

代碼：c21108k1
(108 年統測 C)

() 27. 求 $\int_{-2}^2 (30x^5 - 16x^7 - 20x^3) dx = ?$
(A) -192 (B) -6 (C) 0 (D) 192。

代碼：c21109s1
(109 年統測 B)



- () 28. 設 $g(x) = 2x - 1$ ，已知在閉區間 $[-1, 1]$ 上 $f(x) \geq 1$ 且 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 5$ ，則此兩曲線 $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 在閉區間 $[-1, 1]$ 所圍成區域的面積為何？
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7。
- () 29. 若 $f(x) = (x^2 + 1)^{100}$ ，則 $\int_0^1 [2x + f(x)] dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^0 f(x) dx = ?$
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。
- () 30. $\int_1^3 (3x - 2)^{110} dx = ?$
(A) $\frac{7^{111} - 1}{333}$ (B) $\frac{3^{111} - 1}{333}$ (C) $\frac{7^{110} - 1}{330}$ (D) $\frac{7^{111} - 1}{111}$ 。
- () 31. $\int_1^4 (x + \frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x} - \frac{1}{x}) dx = ?$ (A) $\frac{57}{5}$ (B) $\frac{77}{5}$ (C) $\frac{87}{5}$ (D) $\frac{107}{5}$ 。
- () 32. 不定積分 $\int \frac{x+3}{2\sqrt{x}} dx = ?$ (A) $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{-1}{2}} + C$ (B) $\frac{\frac{x^3}{2} + 3x}{\frac{3}{x^2}} + C$
(C) $\frac{\frac{x^2}{2} + 3x}{\frac{4}{\frac{3}{x^2}}} + C$ (D) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + C$ 。
- () 33. 小明計畫由基隆沿國道一號開車南下高雄渡假。早上 8:00 經過中興隧道 0 公里處的起點，經紀錄儀錶板上車速變化，在 8:00 開始後，時間 t (小時) 的速度函數為 $v(t) = -1.5t^2 + 6t + 90$ (公里 / 小時)。若依此速度變化，則 11:00 時小明應該最接近哪一個服務區？
(A) 泰安服務區 (158 公里處) (B) 西螺服務區 (229 公里處)
(C) 新營服務區 (284 公里處) (D) 仁德服務區 (335 公里處)。

代碼：c22109k1
(109 年統測 C)

代碼：110tcb23
(110 年統測 B)

代碼：110tcc17
(110 年統測 C)

代碼：110tcc23
(110 年統測 C)

代碼：111tcc19
(111 年統測 C)

代碼：111tcc20
(111 年統測 C)

答案：CABDA BDCBA BDADD BBCBA CACDA DCDBA ADC

綜合練習

- () 1. 關於下列各極限，何者正確？ (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n} = 1$
 (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n+9}{n^2+5n-1} = 0$ (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0.01n}{5n-1} = 0$ (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} n - \sqrt{n^2 - 1} = 1$ 。

代碼：c12099k1

- () 2. 試求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(1+2+3+\cdots+n)}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ ？ (A) 0 (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$ 。

代碼：c12095k1

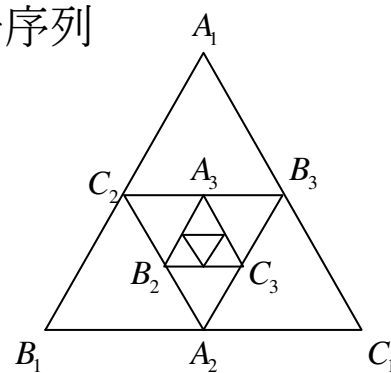
- () 3. 無窮等比級數 $2 - \frac{3}{2} + \frac{9}{8} - \frac{27}{32} + \cdots$ 的和為多少？
 (A) $\frac{4}{7}$ (B) $\frac{8}{7}$ (C) $\frac{7}{2}$ (D) 8。

代碼：a53092s1

- () 4. 求無窮等比級數 $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{3+\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}+3} + \cdots = ?$
 (A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

代碼：a53099s1

- () 5. 已知正三角形 $\Delta A_1 B_1 C_1$ 的邊長為 10 公分，以此三角形各邊中點為頂點之 $\Delta A_2 B_2 C_2$ 也是正三角形，如此繼續下去，得到一序列的正三角形 $\Delta A_1 B_1 C_1$ ， $\Delta A_2 B_2 C_2$ ， $\Delta A_3 B_3 C_3$ ， $\cdots$ ，求這些正三角形 $\Delta A_1 B_1 C_1$ ， $\Delta A_2 B_2 C_2$ ， $\Delta A_3 B_3 C_3$ ， $\cdots$ 的面積和



代碼：a53211m1

- (A) $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 。

- () 6. 無限級數 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2}$ 之和為 (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) 2。

代碼：a54201m1

- () 7. 試求無窮級數 $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \cdots$ 之和 (A) 1 (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{25}{16}$ (D) $\frac{5}{16}$ 。

代碼：a53240m1

- () 8. 設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 為一無窮數列，若 $a_n = \frac{2^n + (-1)^n}{5^n}$ ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ?$

代碼：a53094s1

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{5}{6}$ 。



- () 9. $\int_0^2 |x^2 - 1| dx$ 之值為 (A) $\frac{8}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{3}$ 。 代碼：c21204m1
- () 10. 已知 $f(x)$ 的導函數 $f'(x) = 9x^2 - 8x + 5$ 且 $f(1) = 3$ ，求 $f(2) = ?$
(A) 5 (B) 17 (C) 11 (D) 4 。 代碼：c21203m1
- () 11. 已知 $\int_a^b f(x)dx = 6$ ， $\int_a^b g(x)dx = 12$ ， $\int_a^b h(x)dx = 4$ ，
且 $\int_a^b (mf(x) + ng(x))dx = 13$ ， $\int_a^b (mg(x) - nh(x))dx = 5$ ，則 $6m + 8n = ?$
(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 。 代碼：c22098k1
- () 12. 已知 $\int_0^x f(t)dt = x^2$ 與 $\int_1^x g(t)dt = 2x - 2$ ，則 $f(x) + g(x) = ?$
(A) $2x + 2$ (B) $x^2 - 2x$ (C) $x^2 + 2x - 2$ (D) $x^3 + x^2 - 2x$ 。 代碼：c21093k2
- () 13. 求曲線 $y = \sqrt{x-1}$ ，直線 $x = 5$ 與 x 軸所圍成的封閉區域面積為何？
(A) 2 (B) $\frac{8}{3}$ (C) $\frac{10}{3}$ (D) $\frac{16}{3}$ 。 代碼：c22093k1
- () 14. 函數 $f(x) = 1 - x^2$ 的圖形與 x 軸在區間 $[0, 2]$ 所圍區域面積為何？
(A) $-\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) 2 。 代碼：c22098k2
- () 15. 設 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上為一連續函數，其中 $a < b$ ，則下列敘述何者錯誤？
(複選，有 2 個答案) 代碼：c21099k1
(A) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
(B) $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ ，其中 k 為任意常數
(C) 若 $a < b < c$ ，則 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
(D) $\int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$ ，其中 n 為任意常數。

答案：BDBDB BCBCB CADD 第 15 題(CD)