單元 1　坐標系與函數圖形

主題一　數與數系

1. 有理數的定義與運算：

(1) 定義：

凡是能化成 $\frac{q}{p}$（p，q 皆為整數，且 $p \neq 0$）形式的數，稱為有理數。

(2) 有理數化成小數：

一個分數(有理數)必可化成整數、有限小數、循環小數。反之整數、有限小數、循環小數都可以化成分數。

(3) 封閉性：

任意兩個有理數對加、減、乘、除(分母 $\neq 0$)四則運算後，仍為有理數。
設 a,b,c,d 均為整數，$a \neq 0$、$c \neq 0$，則

① $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}$　② $\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{ac}$　③ $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$　④ $\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{bc}{ad}$　$(d \neq 0)$

(4) 稠密性：

任兩相異有理數之間，至少可以找到一個有理數，即有理數在數線上的分布可以說是密密麻麻，到處都是。

老師講解 1

下列何者可化爲有限小數？

(A) $\frac{53}{88}$　(B) $\frac{73}{256}$　(C) $\frac{161}{560}$　(D) $\frac{149}{40\times12}$　(E) $\frac{77}{25^7}$

學生練習 1

試判斷下列哪個分數可化爲有限小數？

(A) $\frac{54321}{180}$　(B) $\frac{3678}{375}$　(C) $\frac{324}{52}$　(D) $\frac{909}{525}$

【代碼】f11a02m3

2 老師講解

設 $\frac{4}{7}$ 化爲小數後，

$f(n)$ 表小數點以下第 n 位的數字，求

(1) $f(33)=$？

(2) $f(2015)=$？

(3) $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(100)=$？

2 學生練習

設 $\frac{5}{13}$ 化爲小數後，

設小數點以下第 n 位的數字爲 $f(n)$，求

(1) $f(1000)=$？

(3) $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(50)=$？

【代碼】f11a02m4

2. 無理數的定義與運算：

(1) ① 在實數中不是有理數的數稱為無理數。

② 不循環的無限小數稱為無理數，

如：$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、π、…。

小數	有限小數	有理數
	無限小數	有循環…有理數
		不循環…無理數

(2) 若 a,b 為有理數，$\sqrt{c}$ 為無理數，若 $a+b\sqrt{c}=0$，則 $a=b=0$

若 a,b,c,d 為有理數，$\sqrt{p}$ 為無理數，若 $a+b\sqrt{p}=c+d\sqrt{p}$，則 $a=c$，$b=d$。

3 老師講解

設 a 與 b 都是有理數，
且 $\sqrt{5}(a+\sqrt{5})+b(1-2\sqrt{5})=2+4\sqrt{5}$，
求 $a+b$ 之值。

3 學生練習

設 x 與 y 都是有理數，
且 $(3+\sqrt{2})x+(4-3\sqrt{2})y=10-\sqrt{2}$，
求 $x+y$ 之值。

【代碼】f11a04m2

(3) 平方根與立方根：

若 a 為一個正實數，若 $x^2=a$，則 x 為 a 的平方根，記作 $x=\pm\sqrt{a}$

若 b 為一個實數，若 $x^3=b$，則 x 為 b 的立方根，記作 $x=\sqrt[3]{b}$

(4) 根式運算：

根式的加減法：須先將根式化簡後，再將同類根式作加減計算。

例：$x\sqrt{3}+y\sqrt{3}-z\sqrt{3}=(x+y-z)\sqrt{3}$

根式的乘除法：必須是同次根式才可以作乘除的計算。

例：$x\sqrt{a}\cdot y\sqrt{b}=xy\sqrt{ab}$

4 老師講解

試化簡下列各式：

(1) $8\sqrt{3}+6\sqrt{12}-7\sqrt{48}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

(3) $5\sqrt[3]{7}-3\sqrt[3]{-56}+2\sqrt[3]{189}$

4 學生練習

試化簡下列各式：

(1) $\sqrt{3}+2\sqrt{12}-4\sqrt{48}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

(3) $7\sqrt[3]{-16}+5\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}$

【代碼】f11a13m2

3.算幾不等式：

算術平均數不小於其幾何平均數，設 a_1 ， a_2 ， $a_3 \cdots\cdots a_n$ ，皆為正數

則 $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}$ （“=”成立於 $a_1=a_2=a_3\cdots=a_n$ 時)

(1) $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ （$a,b>0$，當 $\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ 時 $a=b$）

(2) $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ （$a,b,c>0$，當 $\dfrac{a+b+c}{3}=\sqrt[3]{abc}$ 時 $a=b=c$）

5 老師講解

設 x 、 $y>0$，已知 $3x+2y=12$，
試求 xy 之最大值。

5 學生練習

已知 x 、 y 均為正實數，且 $x+3y=6$，
試求 xy 之最大值。

【代碼】a32a01m2

6 老師講解

設 $x+y=6$，且 x 、 y 為正實數，
求 x^2y 的最大值為____。

6 學生練習

設 $x+y+z=8$，求 x^2yz 的最大值為？

【代碼】a32b01m2

7 老師講解

設 x 、 $y>0$，已知 $xy=8$，
試求 $2x+y$ 之最小值。

7 學生練習

已知 x 、 y 均爲正實數，且 $xy=18$，
試求 $x+2y$ 之最小值。

【代碼】a32a01m3

8 老師講解

設 $x>-2$，且 $f(x)=3+x+\dfrac{4}{x+2}$，
則 $f(x)$ 最小值爲_____。

8 學生練習

設 $x>3$，若 $g(x)=x+5+\dfrac{9}{x-3}$，
求 $g(x)$ 的最小值爲？

【代碼】a32b02m2

【加強題】

已知一扇形的周長爲16，求此扇形面積的最大值爲_____。

【學生練習答案】

1. (B)	2. (1) 6　(2) 227		3. 3
4. (1) $-11\sqrt{3}$　(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　(3) $6\sqrt[3]{2}$		5. 3	6. 64
7. 12	8. 14		

回家功課

( ) 1. 設 x 爲 $0\sim9$ 的整數，若 $\dfrac{688x6}{45}$ 可化爲有限小數，則 x 值爲 (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 。 代碼：f11b02m1

( ) 2. 設 $\dfrac{15}{a}$ 爲最簡分數且 $\dfrac{15}{a}$ 可化爲有限小數，若 $\dfrac{15}{a}$ 介於 $\dfrac{3}{4}$ 與1之間，則 $a=$ (A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20 。 代碼：f11b05m2

( ) 3. $\sqrt{\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{4^2}+1}$ 等於 (A) $\dfrac{19}{20}$ (B) $\dfrac{21}{20}$ (C) $\dfrac{23}{20}$ (D) $\dfrac{25}{20}$ 。 代碼：f11101c1

( ) 4. 設 k 爲一整數。已知 $\dfrac{k}{3}<\sqrt{31}<\dfrac{k+1}{3}$，則 $k=$ (A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20 。 代碼：f11102c1

( ) 5. 設 x 、 y 、 z 均爲正整數，若 $x+2y+3z=9$，則 xyz 的最大值爲 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 。 代碼：a32203m1

( ) 6. 若 $xy=16$，且 x 、 y 皆爲正數，則 $4x+y$ 之極小值爲 (A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 32 。 代碼：a32202m1

( ) 7. 若 $x>-2$， $g(x)=4+x+\dfrac{1}{x+2}$，則 $g(x)$ 的最小值爲 (A) 6 (B) 4 (C) 2 (D) 1 。 代碼：a32204m1

( ) 8. 一長爲 20 的線段，繞成一長方形，此長方形面積最大爲 (A) 24 (B) 25 (C) 21 (D)以上皆非 。 代碼：a32206m1

( ) 9. 設 x 、 y 爲正數，且 $x+y=3$，則 x^2y 之最大值爲 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：a32213m1

答案：CBBBB CBBD

主題二　數線上的幾何

1. 距離與分點公式：

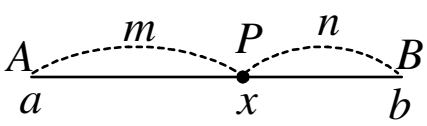
(1) 兩點距離：

設 A 、 B 為數線上相異兩點，其坐標分別為 a 、 b ，則 A 與 B 的距離 $\overline{AB}=|a-b|$

註：若 O 是原點，則 $\overline{AO}=|a-0|=|a|$ 。

(2) 分點公式：

設 A 、 B 為數線上相異兩點，其坐標分別為 a 、 b ，若 P 在 $\overline{AB}$ 上， m,n 為正實數，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$ ，則 P 點坐標為 $\dfrac{na+mb}{m+n}$ 。



老師講解

設數線兩點 $A(-10)$ 、 $B(6)$ ，若 $P(x)$ 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:5$ ，求 $x=$_____。

學生練習

設數線兩點 $A(5)$ 、 $B(-9)$ ，若 $P(x)$ 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:4$ ，求 $x=$_____。

【代碼】f12a01m3

【加強題】

設數線兩點 $A(-4)$, $B(10)$ ，若 $P(x)$ 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 直線上，且 $2\overline{AP}=5\overline{BP}$ ，則 $x=$_____。

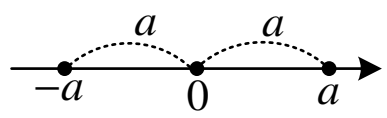
2. 含絕對值的一次方程式與不等式：

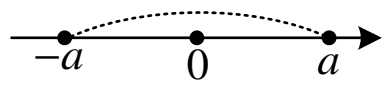
若 a 爲正數：

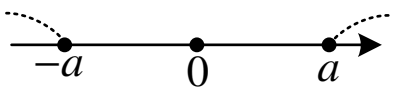
(1) $|x|=a \Rightarrow x=a,-a$，如(圖一)

(2) $|x|<a \Rightarrow -a<x<a$，如(圖二)

(3) $|x|>a \Rightarrow x<-a, x>a$，如(圖三)

(圖一)


(圖二)


(圖三)


2 老師講解

試解下列各式：

(1) $|x-2|=5$　　(2) $|x-1|<3$

(3) $|3x+4|\geq 5$　　(4) $|5-2x|\leq 3$。

2 學生練習

(1) 試解不等式 $|x+2|>3$ 的範圍

(2) 試求 $|2x-3|\leq 4$ 的正整數解有幾個。

【代碼】a31a05m2

3 老師講解

(1) $1<|2x-3|<5$

(2) $3\leq|5-2x|<11$。

3 學生練習

(1) 解不等式 $1<|2x-5|\leq 7$

【代碼】f12a03m2

(2) 滿足 $7\leq|2-3x|<13$ 的整數 x 有幾個。

【代碼】f12a03m3

4 老師講解

(1) 若$|2x-a|<b$之x範圍爲$-1<x<7$，求a、b。
(2) 若$|ax+1|<b$之x範圍爲$-3<x<7$，求a、b。
(3) 若$|ax+1|>b$之x範圍爲$x<-1$或$x>9$，求a、b。

4 學生練習

(1) 設$a,b\in R$且不等式$|ax+1|<b$之解為$-2<x<3$，求a、b。
【代碼】f12a04m2
(2) 滿足不等式$|ax+2|\geq b$之x範圍為$x\geq 30$或$x\leq -10$，求a、b。
【代碼】f12a04m3

【學生練習答案】

1. -1	2. (1) $x<-5$，$x>1$　(2) 3	3. (1) $3<x\leq 6$ 或 $-1\leq x<2$　(2) 4
4. (1) $a=-2$、$b=5$　(2) $a=-\frac{1}{5}$、$b=4$		

回家功課

( ) 1. 數線上，$A(-2)$ 、 $B(8)$ ，有一點 P 使 $3\overline{AP}=2\overline{BP}$ ，則 P 之坐標爲 代碼：f12a01m5
(A) -22 (B) -23 (C) 3 (D) 4 。

( ) 2. 若 $a<b$，$a,b\in Q$，且 $A=\dfrac{3a+2b}{5}$、$B=\dfrac{a+4b}{5}$、$C=\dfrac{3a+b}{4}$、$D=\dfrac{a+3b}{4}$， 代碼：f12b01m2
試比較 A,B,C,D 之大小次序。 (A) $B>D>C>A$
(B) $C>A>D>B$ (C) $B>D>A>C$ (D) $D>B>A>C$ 。

( ) 3. 不等式 $|3x-5|<9$ 的解為整數者共有多少個？ 代碼：a31093s1
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 。

( ) 4. $|-3x+5|\le 7$ 之解為 代碼：a31214m1
(A) $-4\le x\le\dfrac{2}{3}$ (B) $x\ge 4$ 或 $x\le-\dfrac{2}{3}$
(C) $-\dfrac{2}{3}\le x\le 4$ (D) $x\ge\dfrac{2}{3}$ 或 $x\le-4$ 。

( ) 5. 不等式 $2\le|x+1|<6$ 的解為整數者，共有 代碼：a31218m1
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 個 。

( ) 6. 設 $k\in R$ ，若 $|2x+1|<k$ 的解爲 $-2<x<1$ ，則 $k=$ 代碼：f12405m1
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 。

( ) 7. 不等式 $|-2x+a|>b$ 之解爲 $x>4$ 或 $x<-1$ ，則求 $a+b=$ 代碼：f12406m1
(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 。

答案：ACDDB AC

主題三　平面坐標系

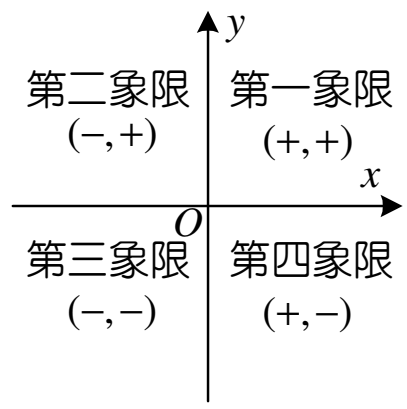
1.直角坐標：

(1) 作兩條互相垂直而且有共同原點的數線，這兩條數線所在的平面。

① x 軸(橫軸)：水平的數線；向右爲正向，左爲負向。

② y 軸(縱軸)：鉛垂的數線；向上爲正向，下爲負向。

③ 原點：x 軸與 y 軸的交點；通常以英文大寫字母 O 來表示。

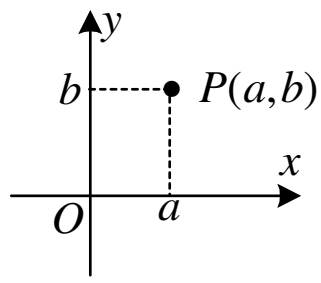


(2) 坐標平面上，x 軸與 y 軸，將坐標平面分成四個象限。

(3) 坐標平面上，任意一點 P 所對應的數對 (a,b)，稱爲 P 點的坐標。

① a 稱爲 P 點的 x 坐標(橫坐標)

② b 稱爲 P 點的 y 坐標(縱坐標)



老師講解

若 a、b 爲實數，點 $A(ab,a-b)$ 在第二象限，則點 $B(\frac{a}{b},ab^2)$ 在第幾象限？

學生練習

已知 a、b 爲實數，點 $P(a+b,a)$ 在第四象限，則點 $Q(ab,b-a)$ 在第幾象限？

【代碼】g11a01m2

2. 兩點距離：

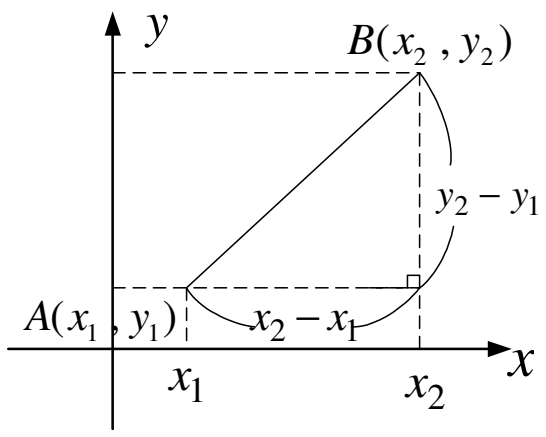
(1) 數線上的兩點距離：

數線上兩點 $P(a)$ 、 $Q(b)$ 的距離為 $\overline{PQ}=|a-b|$

(2) 坐標平面上的兩點距離：

設 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$ 為平面上兩點；

則 A 、 B 兩點之距離 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 。



2 老師講解

以 $A(2,3)$ ， $B(-3,2)$ ， $C(1,-2)$ 爲頂點的三角形形狀爲何？

2 學生練習

設 $A(-3,2)$ ， $B(1,8)$ ， $C(3,-2)$ 爲 ΔABC 的三頂點，則 ΔABC 爲

(A)直角三角形　(B)正三角形

(C)鈍角三角形　(D)等腰直角三角形。

【代碼】g11a01m4

3 老師講解

設 $A(3,-1)$ ， $B(-2,4)$ ，已知 P 爲 x 軸上一點，且 $\overline{AP}=\overline{BP}$ ，則求 P 點坐標爲何？

3 學生練習

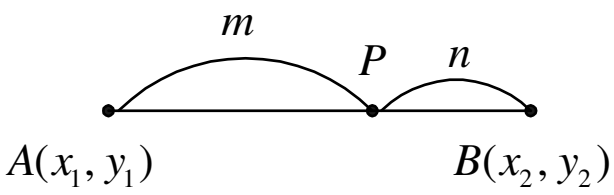
設 $A(-1,-7)$ ， $B(1,3)$ ，已知 Q 爲 y 軸上一點，且 $\overline{QA}=\overline{QB}$ ，則求 Q 點坐標。

【代碼】g11b01m2

3. 分點公式：

已知 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，設點 $P(x, y)$ 為 $\overline{AB}$ 上一點，

且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$ ，則 $P:\begin{cases} x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n} \\ y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n} \end{cases}$



4 老師講解

已知一線段 $\overline{AB}$ 中， $A(-2,4)$ 、 $B(7,-2)$ ， $P\in\overline{AB}$ ，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$ ，求 P 點坐標爲何？

4 學生練習

設 $A(11,7)$ 、 $B(1,2)$ ， $P\in\overline{AB}$ ，且 $\overline{AB}:\overline{AP}=5:2$ ，求 P 點坐標爲何？

【代碼】g11a02m2

4. 中點公式：

設 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$ ，則 $\overline{PQ}$ 之中點 M 為 $(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2})$ 。

5 老師講解

設 $P(-1,a)$ 與 $Q(b,5)$ 爲一圓直徑上之兩端點，且圓心爲 $(2,-3)$ ，求 $a+b$ 之值。

5 學生練習

若一直徑兩端點爲 $(-6,7)$ ， $(10,x)$ 且圓心坐標爲 $(y,5)$ ，求 $x+y$ 之值。

【代碼】g11a02m3

6 老師講解

設平行四邊形 $ABCD$ 的三個頂點分別為 $A(3,4)$ 、 $B(2,-1)$ 、 $C(5,0)$ ，則求第四個頂點 D 的坐標為何？

6 學生練習

已知平行四邊形 $ABCD$ 的三個頂點為 $A(1,-2)$ 、 $B(5,4)$ 、 $C(7,1)$ ，求第四個頂點 D 的坐標為何？

【代碼】g11a02m4

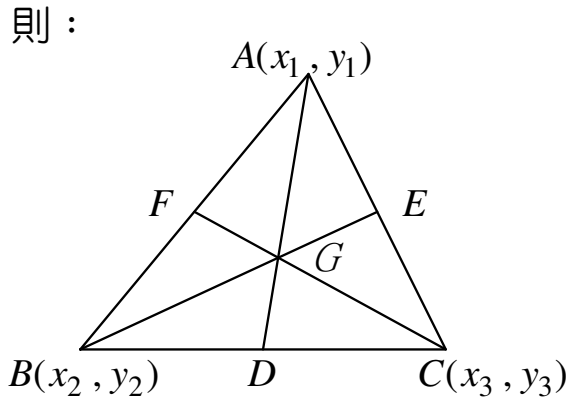
5. 重心公式：

ΔABC 中，設三頂點為 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$ 、 $C(x_3,y_3)$ ，則：

(1) ΔABC 之重心 $G(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3})$

(2) 重心性質：(三中線之交點)

$\Delta ABG=\Delta BCG=\Delta CAG=\dfrac{1}{3}\Delta ABC$ 。



7 老師講解

已知 ΔABC 中， $A(5,-3)$ 、 $B(7,4)$ 、 $C(3,5)$ ，則其重心坐標為何？

7 學生練習

已知 ΔABC 三頂點為 $A(2,15)$ 、 $B(4,-3)$ 、 $C(6,9)$ ，且其三邊中點分別為 D,E,F ，試求 ΔDEF 之重心坐標。

【代碼】g11a03m2

8 老師講解

ΔABC 中， $A(3,-1)$ ，若 $\overline{AB}$ 之中點爲 $M(2,3)$ ，重心 $G(3,4)$ ，則求 C 點坐標。

8 學生練習

ΔABC 中， $A(3,7)$ ，若 $\overline{AB}$ 之中點爲 $M(-1,1)$ ，重心 $G(2,-2)$ ，則求 C 點坐標。

【代碼】g11b04m2

6. 面積公式：

設 ΔABC 中，已知 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $C(x_3, y_3)$ ，則 ΔABC 之面積

$$\Delta ABC=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3\right|$$

9 老師講解

設三角形三頂點爲 $A(4,-1)$ 、 $B(2,2)$ 、 $C(-1,-3)$ ，求三角形面積爲何？

9 學生練習

設三角形三頂點爲 $A(-2,-1)$ 、 $B(3,2)$ 、 $C(4,-1)$ ，求三角形面積爲何？

【代碼】g11a03m3

【學生練習答案】

1. Q 在第二象限	2. (D)	3. $Q(0,-2)$	4. $P(7,5)$
5. $x+y=5$	6. $D(3,-5)$	7. $(4,7)$	8. $C(8,-8)$
9. 9			

回家功課

( ) 1. 若點 $A(a+b,a)$ 在第二象限，則點 $P(ab,b)$ 在第幾象限？ 代碼：g11093s1
(A)一 (B)二 (C)三 (D)四 。

( ) 2. 已知點 M 為 A 、 B 兩點的中點，若 M 及 B 的坐標分別為 $(2,1)$ 及 $(-1,3)$ ，則點 A 到點 $(3,0)$ 的距離為何？ 代碼：g11096s1
(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{6}$ 。

( ) 3. 設 $A(2,3)$，$B(0,-1)$，$C(-1,k)$。若 C 為線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上之點，則 k 為何？ (A) -3 (B) -2 (C) 1 (D) 2 。 代碼：g11101p2

( ) 4. 設 $A(-1,-3)$ 與 $B(6,4)$ 為座標平面上之兩點。若點 C 在線段 $\overline{AB}$ 上，且 $4\overline{AC}=3\overline{BC}$ ，則 $\overline{BC}=$？ (A) $\sqrt{2}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{2}$ (D) $5\sqrt{2}$ 。 代碼：g11099w1

( ) 5. 設 $P(1,4)$ 、 $Q(4,-2)$ ，若 R 在 $\overline{PQ}$ 外，且 $2\overline{PR}=5\overline{QR}$ ，求 R 點坐標爲 代碼：g11b02m1
(A) $(\frac{13}{7},\frac{16}{7})$ (B) $(7,-5)$ (C) $(6,-6)$ (D) $(-5,8)$ 。

( ) 6. 若平行四邊形 $ABCD$ 之頂點 $A(-1,7)$ ， $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$, $D(4,-6)$ 且兩對角線之交點坐標爲 $(9,11)$ ，則 $x_1+x_2+y_1+y_2=$？ 代碼：g11252m1
(A) 74 (B) 76 (C) 78 (D) 80 。

( ) 7. 若以 $P(5,9)$, $Q(-1,-5)$ 爲一圓直徑的兩端點，則圓心坐標爲 (a,b) ，此圓的半徑爲 r，求 $a+b+r^2=$？ (A) 62 (B) 64 (C) 66 (D) 68 。 代碼：g11253m1

( ) 8. 若在座標平面上的平行四邊形 $ABCD$ 中，點 A 、 B 、 C 的坐標分別為 $(5,2)$ 、 $(1,3)$ 、 $(-4,3)$ ，則 D 點之坐標為何？ 代碼：g11096h1
(A) $(1,8)$ (B) $(0,2)$ (C) $(2,7)$ (D) $(3,9)$ 。

( ) 9. 設 $A(0,6)$，$B(-12,-24)$，$C(24,12)$ 爲 ΔABC 三頂點，若 P 在 ΔABC 內，$\Delta PAB=\Delta PBC=\Delta PCA$ ，求 P 點坐標爲 代碼：g11251m1
(A) $(4,-2)$ (B) $(6,-3)$ (C) $(12,-6)$ (D) $(3,-2)$ 。

( )10. 設 ΔABC 三邊中點坐標分別為 $D(-3,-1)$ ， $E(-2,4)$ ， $F(3,2)$ ，則 ΔABC 的面積為 (A) 16 (B) 54 (C) $\frac{27}{2}$ (D) $\frac{81}{2}$ 。 代碼：g11203m1

( )11. 設 $A(2,1)$ ， $B(-4,4)$ ， $C(4,5)$ ， $\angle BAC$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D ，求 D 點的坐標爲 (a,b)，求 $a+2b=$ (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 。 代碼：g11254m1

答案：CCDCC BABAB C

主題四　函數圖形

1. 函數定義：

對於每一個 x 值(自變數)已知時，就有一個且只有一個 y 值(應變數)與之對應，
這就是函數的觀念。

1 老師講解

設 $f(x)=\begin{cases}2x+5 & ,\ x>8\\ x^2-|x| & ,\ -8\le x\le 8\\ x-4 & ,\ x<-8\end{cases}$，

試求下列各式之值。

(1) $f(3)$　(2) $f(12)$　(3) $f(-8)$　(4) $f(f(5))$

1 學生練習

設 $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & ,\ x>2\\ 3x+5 & ,\ -1<x\le 2\\ 6 & ,\ x\le -1\end{cases}$，

試求 $f(3)+f(1)+f(-1)$ 之值。

【代碼】a61a01m2

2 老師講解

已知函數 $f(\frac{x}{x+1})=2x+5$，求 $f(\frac{3}{4})$ 之值。

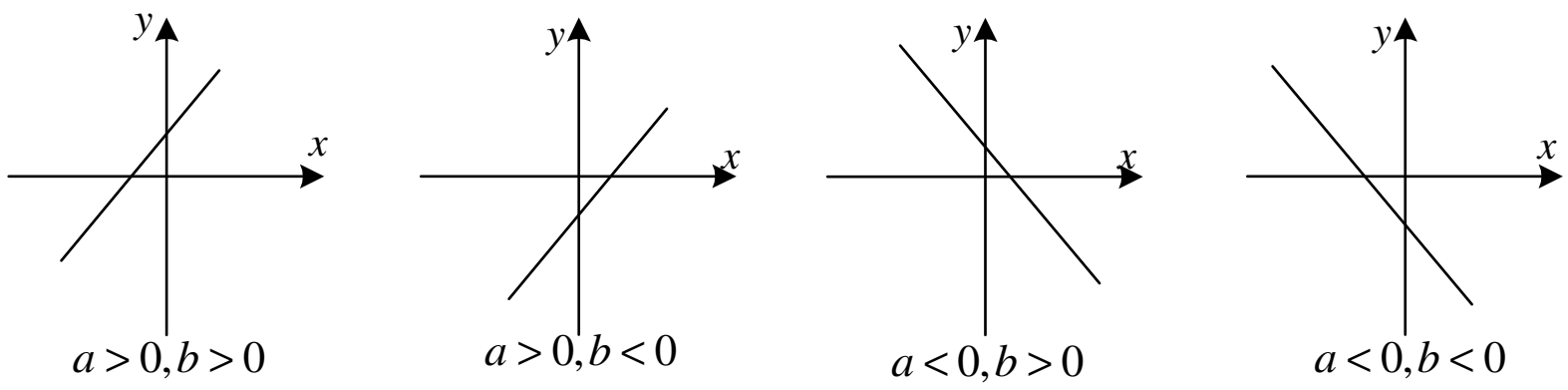
2 學生練習

設 $f(2x+1)=2x+5$，則求 $f(-5)$ 之值。

【代碼】a61a01m3

2. 線型函數：

可化為 $y=f(x)=ax+b$ 形式的函數，稱為線型函數，其圖形為一直線



(1) 若 $a=0$，$y=f(x)$ 稱為常數函數，其圖形表平行 x 軸的水平直線，例如：$f(x)=3$。

(2) 若 $a\neq 0$，$y=f(x)$ 為一次函數，其圖形為一條直線，例如：$f(x)=2x+3$

3 老師講解

若 $f(x)$ 爲一次函數，$f(3)=5$，$f(5)=9$，求函數 $f(x)$。

3 學生練習

若 $f(x)$ 爲一次函數，$f(2)=3$，$f(3)=5$，求函數 $f(x)$。

【代碼】a62a01m2

4 老師講解

若 $y=ax+b$ 之圖形通過一、二、四象限，試判斷 a、b 之正負。

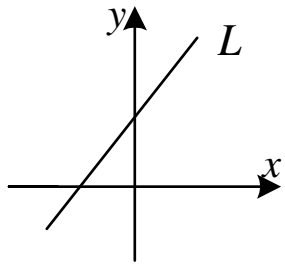
4 學生練習

若 $y=ax+b$ 之圖形通過一、三、四象限，試判斷 a、b 之正負。

【代碼】a62a01m3

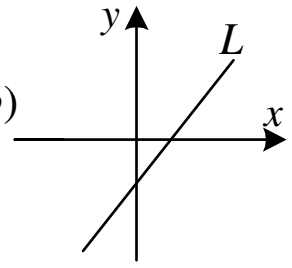
5 老師講解

若直線 $L: ax+by+c=0$ 的圖形如圖，則點 $P(ab,\frac{a}{c})$ 在第幾象限？



5 學生練習

若直線 $L: ax+by+c=0$ 的圖形如圖，則點 $P(ac,ab)$ 在第幾象限？

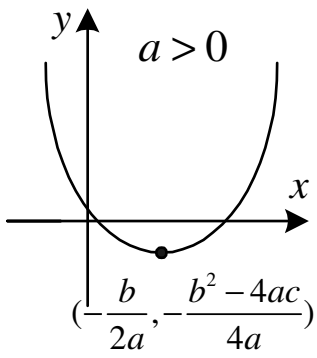


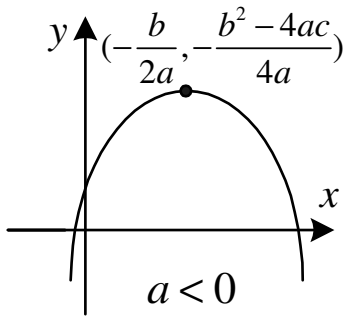
【代碼】a62a01m4

3. 二次函數：

$y=ax^2+bx+c$ (其中 $a\neq 0$)，稱為二次函數，其圖形為拋物線。

(1) $\begin{cases} a>0 \Rightarrow \text{開口朝上} \\ a<0 \Rightarrow \text{開口朝下} \end{cases}$





(2) 利用頂點求極值：

配方法求頂點：

$y=a(x-h)^2+k$ $\Rightarrow$ 頂點 (h,k) $\Rightarrow$ 當 $x=h$ 時，y 有極值 k

公式法求頂點：

$y=ax^2+bx+c$ $\Rightarrow$ 頂點 $(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{b^2-4ac}{4a})$ $\Rightarrow$ 當 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 時，y 有極值 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

【註】配方法與公式法求頂點，請見【代碼】a63a01m1

6 老師講解

設 $f(x)=-2x^2+12x+5$，
求 $f(x)$ 之極大值。

6 學生練習

設 $f(x)=-2x^2-4x+3$，
則 $x=a$，$f(x)$ 有極大值 b，求 $a+b$ 之值。

【代碼】a63a02m3

7 老師講解

設 $y=x^2-4x+5$，

(1) 當 $-2\le x\le 1$，則

當 $x=$_____，y 有極大值_____。

當 $x=$_____，y 有極小值_____。

(2) 當 $-1\le x\le 3$，則

當 $x=$_____，y 有極大值_____。

當 $x=$_____，y 有極小值_____。

7 學生練習

(1) 設 $f(x)=3x^2-6x+8$，且 $-3\le x\le 4$，若 $f(x)$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，求 $M-8m$ 之值。

(2) 設 $y=x^2-4x+3$，且 $4\le x\le 6$，則求其極小值。

【代碼】a63b01m2

8 老師講解

已知二次函數 $f(x)=ax^2-bx+11$，則當 $x=2$ 時，有極小值 3，求 $a+b$ 之值。

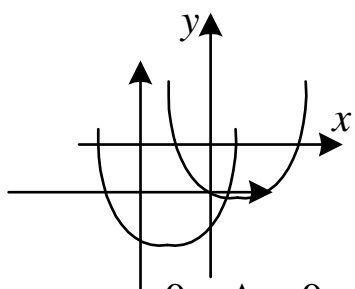
8 學生練習

已知二次函數 $f(x)=3x^2+ax+b$，則當 $x=1$ 時，有極小值 4，求 $a+b=$？

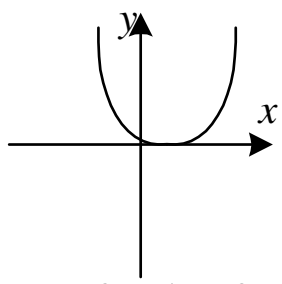
【代碼】a63a02m4

(3) 與 x 軸交點：

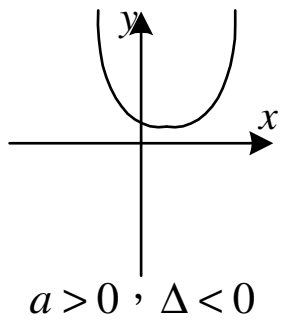
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \text{與 } x \text{ 軸交兩點} \\ \Delta = 0 \Rightarrow \text{與 } x \text{ 軸交一點} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{與 } x \text{ 軸沒交點} \end{cases} \quad (\Delta = b^2 - 4ac)$$



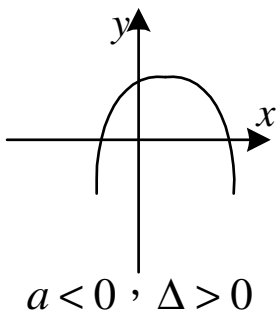
$a > 0$，$\Delta > 0$



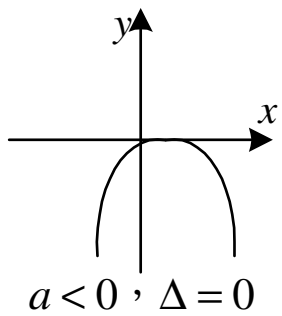
$a > 0$，$\Delta = 0$



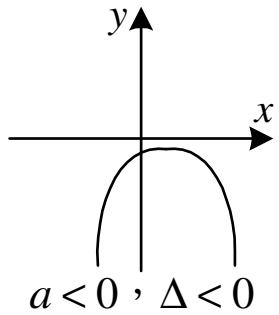
$a > 0$，$\Delta < 0$



$a < 0$，$\Delta > 0$



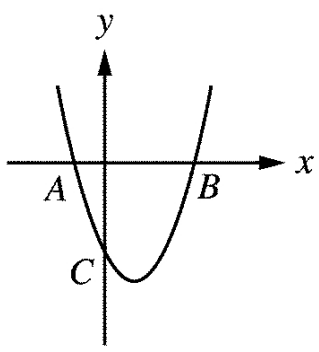
$a < 0$，$\Delta = 0$



$a < 0$，$\Delta < 0$

9 老師講解

設 $f(x) = x^2 - 2x - 3$，
其圖形如右，
求 A、B、C 三點坐標。

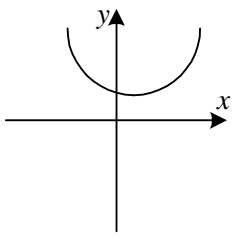


9 學生練習

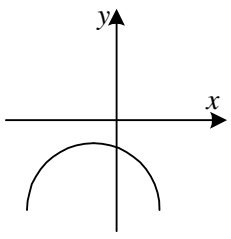
已知 $f(x) = 2x^2 - x - 10$，
求圖形與 x 軸交點。

【代碼】a63a03m2

(4) ax^2+bx+c 恆正、恆負：

恆正⇒ 

$\Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

②恆負⇒ 

$\Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

10 老師講解

若 $kx^2+(k+1)x+k$ 之值恆正，
則求 k 的範圍？

10 學生練習

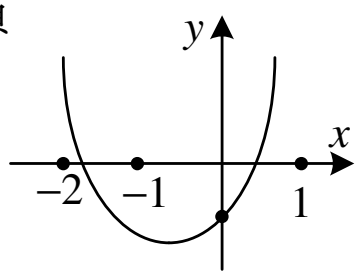
設 $k\neq 0$，$kx^2+(k-1)x+k$ 之值恆負，
則 k 的範圍？

【代碼】a63b03m2

11 老師講解

二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如下，
試判斷下列各式之正、負

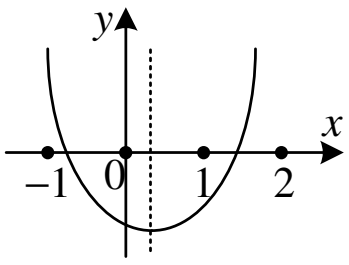
(1) a　(2) b
(3) c　(4) b^2-4ac
(5) $a+b+c$　(6) $a-b+c$
(7) $4a-2b+c$



11 學生練習

右圖中，$y=ax^2+bx+c$，
試判斷下列各式之值
何者為正：(複選)

(A) b　(B) c
(C) b^2-4ac　(D) $a-b+c$
(E) $2a+b$



【代碼】f21a14m2

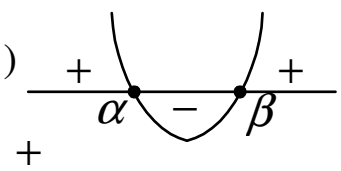
4. 一元二次不等式：

設 $a,b,c\in R$ 且 $a\neq 0$，則 $ax^2+bx+c\geq 0$、$ax^2+bx+c>0$、$ax^2+bx+c\leq 0$、$ax^2+bx+c<0$ 均稱為一元二次不等式。

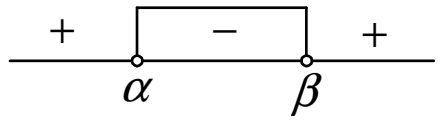
註： 解一元二次不等式可先限制 $a>0$。

若 $a<0$ 可將不等式兩邊同乘以 -1，使二次項係數為正。以下討論均假定 $a>0$。

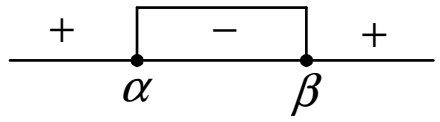
(1) 當 $b^2-4ac>0$ 時 $\Rightarrow$ ax^2+bx+c 可分解化為 $a(x-\alpha)(x-\beta)$ (其中 $\alpha<\beta$)



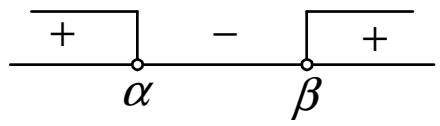
① $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ 之解為 $\alpha<x<\beta$



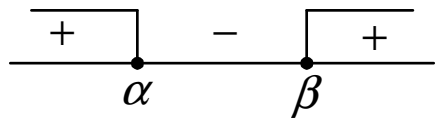
② $(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$ 之解為 $\alpha\leq x\leq\beta$



③ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 之解為 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$



④ $(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$ 之解為 $x\leq\alpha$ 或 $x\geq\beta$



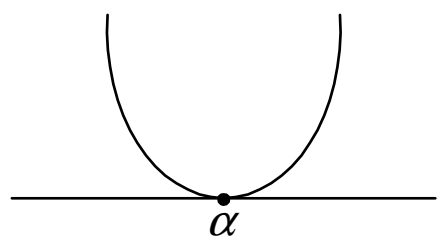
(2) 當 $b^2-4ac=0$ 時 $\Rightarrow$ ax^2+bx+c 可分解化為 $a(x-\alpha)^2$

① $(x-\alpha)^2<0$ $\Rightarrow$ x 無解

② $(x-\alpha)^2\leq 0$ $\Rightarrow$ $x=\alpha$

③ $(x-\alpha)^2>0$ $\Rightarrow$ $x\in R$，但 $x\neq\alpha$

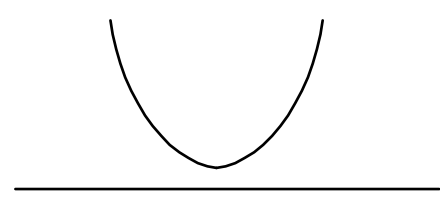
④ $(x-\alpha)^2\geq 0$ $\Rightarrow$ $x\in R$



(3) 當 $b^2-4ac<0$ 時 $\Rightarrow$ ax^2+bx+c 恆為正數

① $ax^2+bx+c>0$、$ax^2+bx+c\geq 0$ $\Rightarrow$ $x\in R$

② $ax^2+bx+c<0$、$ax^2+bx+c\leq 0$ $\Rightarrow$ x 無解



註：對任意實數 x

(1) ax^2+bx+c 恆為正數 $\Rightarrow$ $ax^2+bx+c>0$ 恆成立 $\Rightarrow$ $a>0$、$b^2-4ac<0$

(2) ax^2+bx+c 恆為負數 $\Rightarrow$ $ax^2+bx+c<0$ 恆成立 $\Rightarrow$ $a<0$、$b^2-4ac<0$

12 老師講解

試求下列各不等式的範圍：

(1) $2x^2-5x-12<0$ (2) $3x-2\leq 3x^2-2x$

12 學生練習

試求下列各不等式的範圍：

(1) $2x^2+15x+18\leq 0$

(2) $x^2-5x+6>0$

【代碼】a31a02m2

13 老師講解

試求不等式 $x^2-4x-1\le 0$ 之範圍。

13 學生練習

試求 $2-x^2\ge -4x$ 之整數解有幾個？

【代碼】a31a03m2

14 老師講解

試求下列各不等式的範圍：

(1) $x^2+6x+9\ge 0$　(2) $x^2+6x+9>0$

(3) $x^2+6x+9<0$　(4) $x^2+6x+9\le 0$

14 學生練習

試求下列各不等式的範圍：

(1) $x^2-4x+4\ge 0$　(2) $x^2-4x+4>0$

(3) $x^2-4x+4<0$　(4) $x^2-4x+4\le 0$

【代碼】a31a03m3

15 老師講解

試解下列不等式：

(1) $x^2+4x+5>0$　(2) $-2x^2+5x-4>0$

15 學生練習

試求不等式 $x+x^2<2x^2+9$ 的解。

【代碼】a31a03m4

16 老師講解

試求不等式 $3x+4<x^2\le 4x+12$ 之解。

16 學生練習

試求不等式 $6-5x>x^2\ge x+2$ 之解。

【代碼】a31b01m2

17 老師講解

若 a 、b 均爲實數，且 $ax^2+bx-5<0$ 之解爲 $-5<x<\frac{2}{3}$ ，求 $a+b$ 之值。

17 學生練習

設 a 、b 爲實數，若 $ax^2-4x+b<0$ 之解爲 $-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$ ，求 $a+b$ 之值。

【代碼】a31a02m3

18 老師講解

若 $k\in R$ ，二次不等式 $kx^2-2kx+2k-3>0$ 無實數解，則 k 之範圍爲_____。

18 學生練習

不論 x 爲何值，$(a-2)x^2+2(2a-3)x+(5a-6)>0$ 無解，則 a 範圍爲_____。

【代碼】f24404m1

5. 分式不等式：

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0 \Rightarrow f(x)g(x)>0 \quad (g(x)\neq 0)$

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0 \Rightarrow f(x)g(x)<0 \quad (g(x)\neq 0)$

19 老師講解

解不等式 $\dfrac{2x+3}{x+2}\geq 1$。

19 學生練習

求不等式 $\dfrac{5x-16}{x-2}\leq 4$ 的範圍。

【代碼】a31a06m2

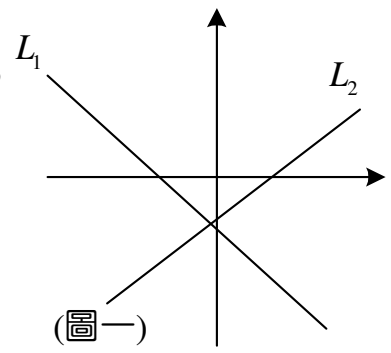
【學生練習答案】

1. 25	2. -1	3. $f(x)=2x-1$	4. $a>0, b<0$
5. 第三象限	6. $a+b=4$	7. (1)13 (2)3	8. $a+b=1$
9. $(\frac{5}{2},0)$、$(-2,0)$	10. $k<-1$	11. (C)(D)(E)	
12. (1) $-6\leq x\leq -\frac{3}{2}$ (2) $x>3$，$x<2$		13. 5	
14. (1) $x\in R$ (2) $x\in R$，但 $x\neq 2$ (3) x 無解 (4) $x=2$			
15. $x\in R$	16. $-6<x\leq -1$	17. $-\frac{1}{2}$	18. $a\leq 1$
19. $2<x\leq 8$			

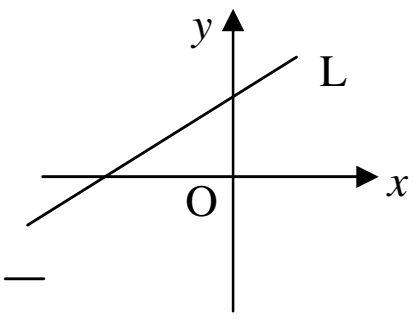
回家功課

( ) 1. 已知函數 $f(x)=\begin{cases}-3x^2+5 & ，x\ge 2\\ 4x-8 & ，-1<x<2\\ 2 & ，x\le -1\end{cases}$，則 $ff(-2)$ 之值為
(A) -7 (B) -6 (C) -5 (D) -4 。 代碼：f21a02m3

( ) 2. 設 $f(x)$ 為一函數，若 $f(2x-1)=\dfrac{2x}{3x+1}$，則 $f(3)=?$
(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{4}{7}$ (C) $\dfrac{3}{5}$ (D) $\dfrac{8}{13}$ 。 代碼：a61094w1

( ) 3. 已知直線 $L_1: y=m_1x+b_1$ 及直線 $L_2: y=m_2x+b_2$，如圖(一)所示，下列敘述何者正確？
(A) $m_1<0$ 且 $b_1>0$ (B) $m_1>0$ 且 $b_1<0$
(C) $m_2<0$ 且 $b_2>0$ (D) $m_2>0$ 且 $b_2<0$


(圖一)
代碼：a62099w1

( ) 4. 若直線 $L: ax+by+c=0$ 的圖形如圖(一)，則點 $P(ac,ab)$ 在第幾象限？
(A)一 (B)二 (C)三 (D)四 。


圖一
代碼：a62093k1

( ) 5. 若 $ab<0$ 且 $bc>0$，$L: ax+by+c=0$ 不通過幾象限。
(A)一 (B)二 (C)三 (D)四 。 代碼：a62221m1

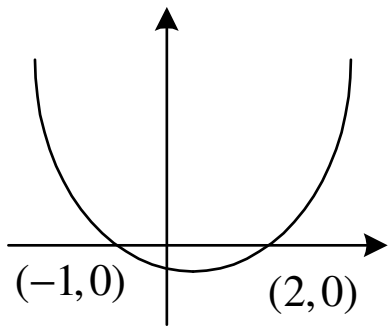
( ) 6. 二次函數 $y=-2x^2+12x-5$，當 $2\le x\le 5$ 時，求 y 之最大值與最小值之和＝？ (A)18 (B)12 (C)11 (D)10 。 代碼：a63201m1

( ) 7. $a,b\in R$，已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+a^2+1$ 在 $x=1$ 時有最大值 7，求 $a+b=$？ (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2 。 代碼：f21a13m2

( ) 8. 設 a 為實數，若函數 $f(x)=a(x+3)^2-9a+2$ 在 $x=-3$ 時有最大值 20，則 $a=$？
(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2 。 代碼：a63097h1

( ) 9. 設二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 圖形的頂點為 $(1,3)$ 且交 y 軸於點 $(0,1)$，則下列 a、b 之值，何者正確？
(A) $a=-2, b=4$ (B) $a=-1, b=2$
(C) $a=1, b=-2$ (D) $a=2, b=4$ 。 代碼：a63101p1

( )10. 設 a,b 為實數，若坐標平面上的拋物線 $y=x^2+ax+b$ 的圖形與 x 軸的交點為 $(-1,0)$ 、 $(2,0)$ ，如圖所示，則 $a+b=$ ？
(A) 2 (B) 3 (C) -2 (D) -3 。



代碼：a63096k1

( )11. 不等式 $(x-1)(1-2x)\ge 0$ 之解為 (A) $\{x\mid x\ge 1\}$ (B) $\{x\mid \frac{1}{2}\le x\le 1\}$
(C) $\{x\mid x\le \frac{1}{2}\}$ (D) $\{x\mid x\le \frac{1}{2}$ 或 $x\ge 1\}$ 。

代碼：a31088x1

( ) 12. 不等式 $6+x\le x^2<-2x+3$ 之解為
(A) $-3<x\le -2$ (B) $-3\le x<-2$ (C) $-3\le x<2$ (D) $-2<x\le 3$ 。

代碼：a31204m1

( ) 13. 解不等式 $|\frac{2x-1}{x-1}|<3$ 之範圍爲 $x>a$ 或 $x<b$ ，求 $a+5b=$ ？
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 。

代碼：a31a06m3

答案：ABDDB ADAAD BAD

歷屆試題

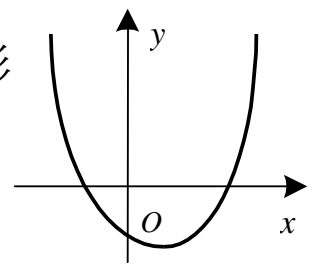
( ) 1. 已知 $A(a,0)$ 與 $B(3,b)$ 兩點，線段 $\overline{AB}$ 的中點爲 $M(-1,2)$，則點 A 到 y 軸的距離與點 B 到 x 軸的距離之和爲何？
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12。
代碼：g11100s1 (100 年統測 B)

( ) 2. 已知 $A(1.38,0.4162)$ 與 $B(1.39,0.4177)$ 兩點，若點 P 落在線段 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:3$，則 P 點之 y 坐標爲何？
(A) 0.4165 (B) 0.4168 (C) 0.4171 (D) 0.4174。
代碼：g11100s2 (100 年統測 B)

( ) 3. 已知 $f(x)=-2x+1$，則此函數的圖形不會經過哪一象限？
(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限。
代碼：a62100s1 (100 年統測 B)

( ) 4. 若直線 $24x-7y=53$ 與二直線 $x=0$、$x=7$ 分別交於 A、B 二點，則線段 $\overline{AB}$ 的長度爲何？ (A) $\frac{24}{7}$ (B) $\frac{53}{7}$ (C) 25 (D) 53。
代碼：g12100k1 (100 年統測 C)

( ) 5. 設 a,b,c 爲實數，且二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如圖所示，則點 $P(b^2-4ac,abc)$ 在第幾象限？
(A)一 (B)二 (C)三 (D)四。



代碼：a63100k1 (100 年統測 C)

( ) 6. 設 a、b 爲實數，若一元二次不等式 $ax^2+x+b>0$ 的解集合爲 $\{x\mid -\frac{1}{5}<x<\frac{2}{3}, x\text{爲實數}\}$，則 $2a+b=$？ (A) -5 (B) -4 (C) 4 (D) 5。
代碼：a31100k1 (100 年統測 C)

( ) 7. 設直角坐標平面上四點 $A(-2,1)$，$B(b_1,b_2)$，$C(c_1,c_2)$，$D(4,3)$ 在同一直線上，依序爲 A、B、C、D，且 B、C 兩點將線段三等份，則點 C 之坐標 (c_1,c_2) 爲何？
(A) $(2,\frac{7}{3})$ (B) $(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$ (C) $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ (D) $(0,\frac{5}{3})$。
代碼：g11101s1 (101 年統測 B)

( ) 8. 已知函數 $f(x)=a(x+1)^2-2$ 的圖形不會經過第四象限，則 a 之值可能爲下列哪一數？ (A) -1 (B) 0.4 (C) 1.8 (D) 3.2。
代碼：a63101s1 (101 年統測 B)

( ) 9. 在 xy 平面上，P 和 Q 爲拋物線 $y=x^2$ 上的兩點，若 P 和 Q 的 x 坐標分別是 -1 和 2，則 P 和 Q 的距離爲何？ (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) $3\sqrt{2}$。
代碼：g11101k1 (101 年統測 C)

( )10. 下列何者爲不等式 $3x^2-3x\le 6$ 之解？ (A) $x\le -2$ 或 $x\ge 1$ (B) $-2\le x\le 1$ (C) $-1\le x\le 2$ (D) $x\le -1$ 或 $x\ge 2$ 。 代碼：a31101k1 (101 年統測 C)

( )11. 已知 x 、 y 、 z 均爲正實數。若 x 、 y 、 z 滿足 $2x+3y+z=12$ ，則下最何者爲眞？ (A) xyz 的最大值爲 12 (B) x^2y^3z 的最大值爲 32 (C) xyz^2 的最大值爲 48 (D) xy^2z 的最大值爲 18 。 代碼：a32102s1 (102 年統測 B)

( )12. 不等式 $\dfrac{3}{5x+10}<\dfrac{x}{5}$ 的解爲下列何者？ (A) $x<-2$ 或 $x>1$ (B) $x<-2$ 或 $x>3$ (C) $x<-3$ 或 $x>1$ (D) $-3<x<-2$ 或 $x>1$ 。 代碼：a31103s1 (103 年統測 B)

( )13. 設 x,y,z 皆爲正實數，且 $xy+yz+zx=27$ ，則 xyz 之最大值爲何？ (A) $12\sqrt[3]{2}$ (B) 18 (C) 27 (D) $27\sqrt[3]{2}$ 。 代碼：a32103s1 (103 年統測 B)

( )14. 設 $A(0,0)$ ， $B(2,2)$ 爲平面上兩點，點 $P(m,n)$ 在線段 $\overline{AB}$ 上， $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$ ，則 $m+n$ 之值爲何？ (A) 2 (B) 2.5 (C) 3 (D) 3.5 。 代碼：g11103k1 (103 年統測 C)

( )15. 設 $x>0$ ， $y>0$ ， $x+y=6$ ，則 xy^2 之最大值爲何？ (A) 16 (B) 18 (C) 25 (D) 32 。 代碼：a32103k1 (103 年統測 C)

( )16. 若想要利用一條繩子圍出一個面積至少爲 25 平方公尺的矩形花園，則所需要的繩子總長度至少須爲多少公尺？ (A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 24 。 代碼：a32104s1 (104 年統測 B)

( )17. 下列何者與 $x^2-6x-16<0$ 有完全相同的解？ (A) $(x-2)(x+8)<0$ (B) $-3<x-5<3$ (C) $(x-3)^2<25$ (D) $-x^2+6x+16<0$ 。 代碼：a31104s1 (104 年統測 B)

( )18. 下列方程式所對應的圖形中，何者恆在 x 軸的上方? (A) $y=5x^2-3x+1$ (B) $y=3x^2+5x-1$ (C) $y=x^2-5x+3$ (D) $y=3x^2+x-5$ 。 代碼：a63104k1 (104 年統測 C)

( )19. 已知 a,b 爲實數，若不等式 $x^2+ax\le b$ 之解爲 $-5\le x\le 3$ ，則 $a+b=$ ？ (A) -17 (B) -13 (C) 13 (D) 17 。 代碼：a31104k1 (104 年統測 C)

( )20. 已知 ΔABC 的三頂點爲 $A(-1,2)$ 、 $B(-3,-3)$ 、 $C(3,-1)$ ，則 $\overline{AB}$ 邊上的中線長爲何？ (A) $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{71}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{101}}{2}$ (D) $\sqrt{26}$ 。 代碼：g11105s1 (105 年統測 B)

( ) 21. 已知拋物線 $y=ax^2+4bx+4a$ 與 x 軸有兩相異交點，且頂點在第一象限，則下列敘述何者正確？ (A) $a<0$，$a^2<b^2$ (B) $a<0$，$a^2>b^2$ (C) $a>0$，$a^2<b^2$ (D) $a>0$，$a^2>b^2$。 代碼：a63105s1 (105 年統測 B)

( ) 22. 已知 $ax^2+2x+c>0$ 的解爲 $-1<x<3$，則 $a+c$ 之值爲何？ (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4。 代碼：a31105s1 (105 年統測 B)

( ) 23. 若一元二次不等式 $x^2-2x-3<0$ 的解爲 $a<x<b$，則 $a+b=$？ (A) -3 (B) -1 (C) 2 (D) 3。 代碼：a31106s1 (106 年統測 B)

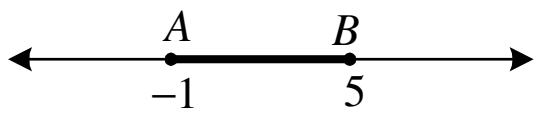
( ) 24. 設直線 $2x+y=11$ 與拋物線 $y=x^2-4$ 在第二象限的交點爲 A，在第一象限的交點爲 B，若線段 $\overline{AB}$ 上一點 P 滿足 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$，則 P 點坐標爲何？ (A) $(\frac{1}{3},\frac{31}{3})$ (B) $(-2,26)$ (C) $(-1,13)$ (D) $(\frac{-7}{3},\frac{47}{3})$。 代碼：g11106k1 (106 年統測 C)

( ) 25. 設 a、b 爲實數，且不等式 $-x^2+6x+b>0$ 與不等式 $|x+a|<5$ 的解完全相同，則 $a+b=$？ (A) -13 (B) -7 (C) 7 (D) 13。 代碼：a31106k1 (106 年統測 C)

( ) 26. 若一元二次不等式 $ax^2+bx-6\geq 0$ 的解爲 $2\leq x\leq 3$，則數對 (a,b) 爲下列何者? (A) $(-1,-5)$ (B) $(-1,5)$ (C) $(1,-5)$ (D) $(1,5)$。 代碼：a31107s1 (107 年統測 B)

( ) 27. 若拋物線 $y=ax^2+b$ 之開口向上且與 x 軸沒有交點，則下列敘述何者正確? (A) $a>0$，$b>0$ (B) $a>0$，$b<0$ (C) $a<0$，$b>0$ (D) $a<0$，$b<0$。 代碼：a63108s1 (108 年統測 B)

( ) 28. 若點 A 與點 B 在數線上的坐標分別是 -1 與 5，則線段 $\overline{AB}$ (包含兩端點，如圖(一)所示)是下列哪一個不等式之解的圖形？ (A) $|x-1|\leq 4$ (B) $|x+1|\leq 5$ (C) $x^2-4x-5\leq 0$ (D) $x^2+6x+5\leq 0$。 代碼：a31109s1 (109 年統測 B)



( ) 29. 已知 A、B、C 三家某知名商店，B 店位於 A 店往西 240 公尺往北 120 公尺處，而 C 店位於 B 店往東 180 公尺往南 40 公尺位置。求 A 店與 C 店的距離爲多少公尺？ (A)100 (B)120 (C)140 (D)160 。 代碼：110tcb19 (110 年統測 B)

( ) 30. 若 x 爲實數，則 $x^2-2+\frac{9}{x^2+2}$ 的最小值爲何？ (A)2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{13}{2}$ (D)6 。 代碼：110tcc20 (110 年統測 C)

(　　) 31. 若不等式 $|7x-a|<28$ 之解爲 $b<x<5$，則點 (b,a) 屬於哪一象限？
(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限　。
代碼：111tcb03
(111 年統測 B)

(　　) 32. 若函數 $f(x)=x^2+ax+4$ 之圖形頂點爲 $(3,b)$，則函數 $f(x)$ 之最小值爲何？(A) -6　(B) -5　(C) -4　(D) -3　。
代碼：111tcb11
(111 年統測 B)

(　　) 33. 身高 170 公分的小游去做健康檢查，醫師說：「你的 BMI 要介於 $18.5(\text{kg/m}^2)$ 到 $24(\text{kg/m}^2)$ 之間才符合健康體位，你現在的體重太重了，必須再減 5 公斤才會符合健康體位」。
已知計算公式爲 $\text{BMI}=\dfrac{\text{體重(kg)}}{\text{身高}^2(\text{m}^2)}$，則小游現在體重可能爲幾公斤？
(A)74　(B)75　(C)76　(D)77　。
代碼：111tcb24
(111 年統測 B)

(　　) 34. 公益文教基金會調查技術型高中三年級學生每天手機使用時間介於 3.1 小時至 4.9 小時之間（含）。若 x（單位：小時）爲其中一位參與調查的技術型高中學生每天手機使用時間，且將上述使用時間範圍用 $|x-a|\le b$ 來表示，則 $ab=$？
(A)3.2　(B)3.6　(C)3.8　(D)4.2　。
代碼：111tcc03
(111 年統測 C)

(　　) 35. 不等式 $5x-4<x^2<x+2$ 的解爲何？
(A) $-1<x<1$　(B) $-1<x<2$　(C) $-2<x<1$　(D) $0<x<4$　。
代碼：111tcc08
(111 年統測 C)

答案：ABCCA　BADDC　DDCCD　CCADC　ACCAD　BACAA　BBABA

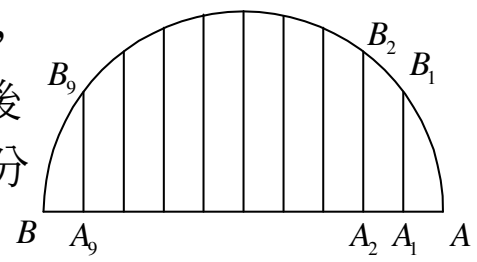
綜合練習

( ) 1. 試問有多少個正整數 n 使得 $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{10}{n}$ 爲整數？ 代碼：f11092c1
(A)1個 (B)2個 (C)3個 (D)4個。

( ) 2. 若實數 a，b，c 滿足 $abc>0$，$ab+bc+ca<0$，$a+b+c>0$，$a>b>c$，則下列敘述何者爲眞？ 代碼：f11091ck
(A)$b>0$ (B)$c>0$ (C)$|a|>|b|$ (D)$a^2<c^2$。

( ) 3. 關於下列不等式，請選出正確的選項。 (A)$\sqrt{13}<3.6$ 代碼：f11103ck
(B)$\sqrt{13}-\sqrt{3}>\sqrt{10}$ (C)$\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$ (D)$\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$。

( ) 4 如圖，有一圖形拱橋，橋面位置恰爲直徑 $\overline{AB}$，爲了慶祝活動的裝飾，計劃將橋面 $\overline{AB}$ 十等分後(也就是 $\overline{AA_1}=\overline{A_1A_2}=\cdots\overline{A_8A_9}=\overline{A_9B}$)，在每個等分點豎立一個鋼住，$\overline{A_1B_1},\overline{A_2B_2},\cdots,\overline{A_9B_9}$，已知 $\overline{AB}=10$ 公尺，試求 $\overline{A_3B_3}=$ (A)$\sqrt{21}$ (B)$2\sqrt{6}$ (C)4 (D)3 公尺。 代碼：f11421m1



( ) 5. 若 $p=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$，求 $p^3-3p=$ 代碼：f11414m1
(A)$\sqrt[3]{6}$ (B)$\sqrt[3]{18}$ (C)4 (D)3。

( ) 6. 已知 $x\in R$，則 $x^2+5+\frac{4}{x^2+2}$ 之最小值爲 代碼：a32205m1
(A)7 (B)8 (C)9 (D)10。

( ) 7. 若實數函數 $y=f(x)=3^x+3^{-x}+2$，則其值域爲 代碼：a32223m1
(A)$\{\ y\mid y>2\ \}$ (B)$\{\ y\mid y\geq 4\ \}$
(C)$\{\ y\mid y\geq 5\ \}$ (D)$\{\ y\mid 2\leq y\leq 8\ \}$。

( ) 8. 設 $x+y+z=12$，且 $x>0$、$y>0$、$z>0$，求 x^2yz 的最大值？ 代碼：a32214m1
(A)100 (B)256 (C)324 (D)432。

(　　) 9. 若 $\log_3 x+\log_3 y=2$，求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 之最小值？ (A) 0　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) 1。 代碼：a32095h1

(　　)10. 一農夫想用 66 公尺長之竹籬圍成一長方形菜圃，並在其中一邊正中央留著寬 2 公尺的出入口，如右圖所示。此農夫所能圍成的最大面積爲多少平方公尺。
(A) 256　(B) 289　(C) 295　(D) 343。 代碼：f11095b1

(　　)11. 坐標平面上一矩形的四個頂點分別在原點、x 軸正向、y 軸正向及直線 $x+2y=6$ 上，當此矩形有最大面積時，其周長爲何?
(A) 8　(B) 9　(C) 10　(D) 11。 代碼：a32091k1

(　　)12. 請問滿足絕對值不等式 $|4x-12|\le 2x$ 的實數 x 所形成的區間，其長度爲下列哪個選項？　(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4 代碼：f12103c1

(　　)13. 求函數 $f(x)=4|x+1|+3|2x-1|$ 的最小值？
(A) 3　(B) 4　(C) 6　(D) 9　。 代碼：a31096k2

(　　)14. 已知點 $P(a-b,ab)$ 在坐標平面的第四象限，則下列敘述何者正確？ 代碼：g11101p1
(A) $A(a,-b)$ 在第一象限　(B) $B(|ab|,\frac{a}{b})$ 在第二象限
(C) $C(\frac{a}{b},-b)$ 在第三象限　(D) $D(\frac{a}{b},b-a)$ 在第四象限。

(　　)15. 設 $A(-1,2)$，$B(2,6)$ 爲坐標平面上兩點，且 C 爲線段 $\overline{AB}$ 上一點，$2\overline{AC}=3\overline{BC}$，求 A 與 C 兩點間之距離爲何？
(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4。 代碼：g11099s1

(　　)16. 坐標平面中 $A(a,3)$，$B(16,b)$，$C(19,12)$ 三點共線。已知 C 不在 A，B
(A) 15　(B) 17　(C) 19　(D) 21。 代碼：f12102c1

(　　)17. 平面上三點 $A(2,-3)$、$B(-5,7)$、$C(9,11)$。下列何者可與 A、B、C 三點連成平行四邊形？
(A) $(2,21)$　(B) $(-11,-7)$　(C) $(2,5)$　(D) $(16,2)$。 代碼：g11103p3

(　　)18. 在坐標平面上，若 ΔABC 之三頂點坐標分別爲 $A(2,0)$、$B(4,0)$ 與 $C(4,3)$，則 ΔABC 之三邊上共有多少點與原點的距離恰爲整數值？
(A) 2 個　(B) 4 個　(C) 6 個　(D) 8 個。 代碼：g11099k1

(　　)19. 設 $A(5,8)$、$B(7,0)$、$C(-3,-2)$ 是三角形 ABC 的三頂點，若 D、E、F 分別是 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 的中點，則三角形 DEF 的重心坐標爲下列何者？ (A) $(-2,3)$ (B) $(2,-3)$ (C) $(2,3)$ (D) $(3,2)$。 代碼：g11101w1

(　　)20. 設函數 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，則下列何者恆爲正確？ (A) $f(x)=f(-x)$ (B) $f(x)=-f(x)$ (C) $f(x)=f(\dfrac{1}{x})$ (D) $f(x)=\dfrac{1}{f(x)}$。 代碼：a61091s1

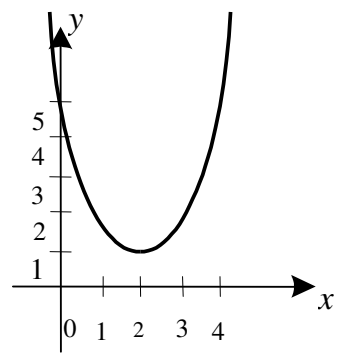
(　　)21. 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 爲二函數，若 $f(x)=x^3+x^2+x+1$，$g(x)=f(x^2+1)$，且 $g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$，則 $a_4=$？ (A) 4 (B) 5 (C) 8 (D) 10。 代碼：a61095w1

(　　)22. 設 a,b,c 爲實數。直線 $ax+by+c=0$ 通過第一、二、三象限，則點 $P(ab,ac)$ 落在第幾象限？ (A)一 (B)二 (C)三 (D)四。 代碼：a62103w1

(　　)23. 設 a 爲實數，且直線 $(3a-1)x-2y=a+1$ 沒有通過第一象限，則 a 的可能範圍爲何？ (A) $a<-1$ (B) $-1\le a\le\dfrac{1}{3}$ (C) $\dfrac{1}{3}<a<1$ (D) $a\ge 1$。 代碼：a62096k1

(　　)24. 根據果農之種植經驗，若每畝種植16棵柿子樹時，則每棵樹平均可產200個柿子；但每畝增加種植一棵柿子樹，則每棵會減產10個柿子。問若欲達到最大收成的條件下，每畝應種植幾棵爲最佳？ (A) 16 (B) 17 (C) 18 (D) 19。 代碼：a63095s1

(　　)25. 設右圖爲函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 之圖形，則下列何者正確？ (A) $a<0$ (B) $b<0$ (C) $c<0$ (D) $a+b+c<0$。 代碼：a63099p1



(　　)26. 試判斷下列各式之值，何者爲恆正？ (A) x^2+3x+1 (B) x^2+4x+4 (C) $-x^2+3x-5$ (D) x^2+3x+5。 代碼：a63211m1

(　　)27. 若二次函數 $y=kx^2+(k+3)x+(k+1)$ 的圖形恆在 $y=2x+1$ 圖形的上方，則 k 之範圍爲 (A) $k>1$ (B) $k>1$ 或 $k<-\dfrac{1}{3}$ (C) $k<-\dfrac{1}{3}$ (D) $k>\dfrac{1}{3}$ 代碼：f21b08m2

(　　)28. 若不等式 $ax^2+bx+c<0$ 之解爲 $1<x<2$，則不等式 $bx^2+cx+a\ge 0$ 的整數解有幾個？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。 代碼：a31094s1

(　　)29. 下列何者與不等式$|x-4|<8$的解相同？　(A)$(x+4)(x-12)>0$　(B)$(x-4)(x+12)>0$　(C)$(x+4)(x-12)<0$　(D)$(x-4)(x+12)<0$。　代碼：a31095k1

(　　)30. 已知$4<(2x-3)^2<25$，試求x的範圍爲何？　(A)$-1<x<\frac{5}{2}$　(B)$\frac{-3}{2}<x<-1$或$\frac{5}{2}<x<4$　(C)$-1<x<4$　(D)$-1<x<\frac{1}{2}$或$\frac{5}{2}<x<4$。　代碼：a31091s1

答案：DCCAC　ABCCB　BDCAC　CACDC　ABBCB　DABCD

單元 2　三角函數

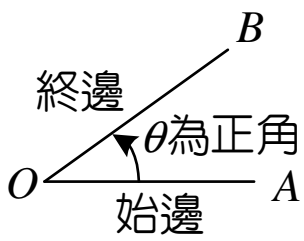
主題一　有向角及其度量

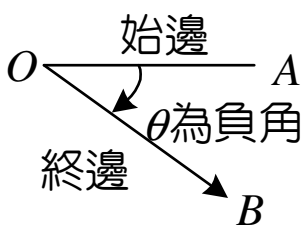
1. 有向角：

以 O 點為中心，將 $\overline{OA}$ 旋轉至 $\overline{OB}$ 所夾的角 θ，稱為有向角。

其中 $\overline{OA}$ 稱為始邊，$\overline{OB}$ 稱為終邊，O 稱為頂點

(1) 正向角 $\Rightarrow$ 逆時針方向旋轉





(2) 負向角 $\Rightarrow$ 順時針方向旋轉

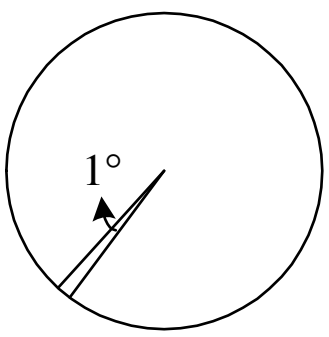
2. 角的度量：

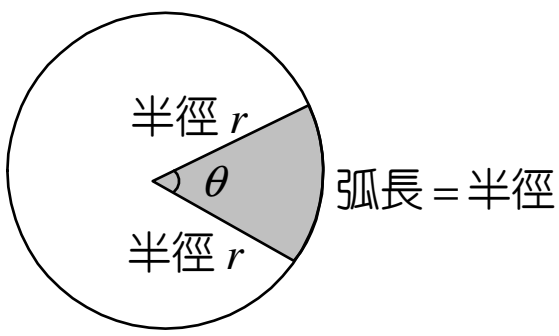
(1) 六十分制：

將圓周分成 360 等分，每一等分所對應的圓心角稱為一度，記作 $1°$。

(2) 弧度制(弳度制)：

一圓之弧長等於半徑時，則此弧所對應的圓心角稱為 1 弧度(或 1 弳)，1(弳) $\fallingdotseq 57.3°$。





(3) 換算：

一周角 $=360°=2\pi \Rightarrow \pi=180°$

$\pi=180° \Rightarrow$ 兩邊同除以 $\pi \Rightarrow 1=\dfrac{180°}{\pi}$

$\pi=180° \Rightarrow$ 兩邊同除以 180 $\Rightarrow 1°=\dfrac{\pi}{180}$

老師講解

$a=\pi°$，$b=\dfrac{\pi}{3}$，$c=1$，

試比較 a,b,c 大小關係。

學生練習

下列角度何者較大？

(A) $\dfrac{\pi}{3}$　(B) $45°$　(C) 1(弳)　(D) $\pi°$。

【代碼】t11a01m2

2 老師講解

將下列角度化爲弧度制：
(1) $60°$　　(2) $315°$

2 學生練習

將下列角度化爲弧度制：
(1) $300°$　　(2) $15°$

【代碼】t11a01m3

3 老師講解

將下列角度化爲 60 分制：
(1) $\frac{7}{6}\pi$　　(2) $\frac{3}{4}\pi$

3 學生練習

將下列角度化爲 60 分制：
(1) $\frac{5\pi}{4}$　　(2) $\frac{11}{6}\pi$

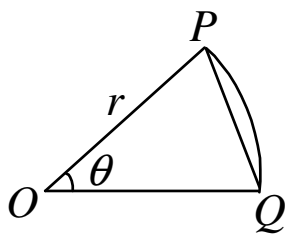
【代碼】t11a01m4

3. 弧長與扇形面積：

設 S ，r ，θ 分別表弧長，半徑，圓心角(弳度量)，則：

(1) 弧長 $S = r\theta$　　(2) 扇形面積 $A = \frac{1}{2}rS = \frac{1}{2}r^2\theta$ 。

(3) 扇形周長 $= 2r + S$　　(4) $\Delta OPQ = \frac{1}{2}r^2 \sin\theta$



4 老師講解

已知一扇形半徑爲 6，圓心角爲 $60°$，求：
(1)弧長
(2)扇形周長
(3)扇形面積

4 學生練習

已知一扇形半徑爲 5，圓心角爲 $36°$，
則扇形面積爲何？

【代碼】t11a02m2

5 老師講解

一圓弧長 4π，所對圓心角 $240°$，
則所對之扇形面積爲何？

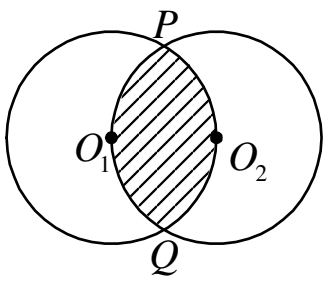
5 學生練習

扇形的弧長爲 5π，面積爲 15π，
則其圓心角爲何？

【代碼】t11a02m3

6 老師講解

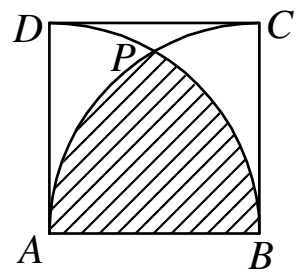
如右圖，圓 O_1 與圓 O_2 皆爲半徑爲 2 的圓，且交於 P、Q 兩點，若此兩圓心距離 $\overline{O_1O_2}=2$，試求此斜線部分面積。



6 學生練習

如右圖，$ABCD$ 是邊長爲1的正方形，今以 A、B 爲圓心，邊長1爲半徑，分別畫圓弧相交於 P，試求此斜線部分面積。

【代碼】t11251m1



4. 同界角：

(1) 標準位置角：

在坐標平面上，將有向角 θ 的頂點置於原點，且始邊與 x 軸正向重合，則稱為標準位置角。

若標準位置角的終邊落在第一(二、三、四)象限內，則稱為第一(二、三、四)象限角。

若標準位置角的終邊落在坐標軸上，則稱為象限角。

(2) 同界角：

兩個有向角，若始邊、終邊均相同的角互稱為同界角。

若 θ_1、θ_2 為同界角 $\Rightarrow$ $\theta_1-\theta_2=360°\times k$ 或 $\theta_1-\theta_2=2\pi\times k$。($k$ 為整數)

7 老師講解

求下列各角之最小正同界角與最大負同界角：

(1) $780°$　(2) $-\frac{33}{7}\pi$

7 學生練習

求下列各角之最小正同界角與最大負同界角：

(1) $1020°$　(2) $-\frac{76}{11}\pi$

【代碼】t11a03m2

8 老師講解

下列何者不為 $\frac{3\pi}{7}$ 的同界角？

(A) $\frac{31\pi}{7}$　(B) $-\frac{11\pi}{7}$　(C) $\frac{38\pi}{7}$　(D) $-\frac{39\pi}{7}$。

8 學生練習

下列何者不為 $\frac{7}{3}\pi$ 的同界角？

(A) $\frac{85}{3}\pi$　(B) $-\frac{62}{3}\pi$　(C) $-\frac{71}{3}\pi$　(D) $-300°$。

【代碼】t11a03m3

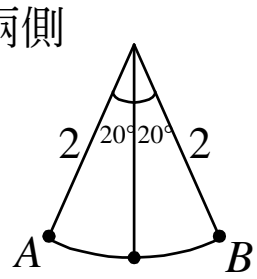
【學生練習答案】

1. (A)	2. (1) $\frac{5}{3}\pi$　(2) $\frac{\pi}{12}$	3. (1) $225°$　(2) $330°$	4. $\frac{5\pi}{2}$
5. $\frac{5}{6}\pi$		6. $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$	
7. (1)最小正同界角 $300°$、最大負同界角 $-60°$　(2)最小正同界角 $\frac{12}{11}\pi$、最大負同界角 $-\frac{10}{11}\pi$			
8. (B)			

回家功課

( ) 1. 已知一有向角$\theta=12$弧度。若其頂點與直角坐標的原點重合，始邊與x軸正向重合。試問其終邊落在第幾象限？ 代碼：t11103p1
(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限 。

( ) 2 有一鐵鏈長度爲2公尺的鞦韆，若一小朋友於鉛直方向兩側擺動圓心角各$20°$至A、B二點如圖，則線段$\overline{AB}$長爲多少公尺？ 代碼：t12106w1
(A) $4\sin 20°$ (B) $2\sin 40°$ (C) $4\cos 20°$ (D) $2\cos 40°$

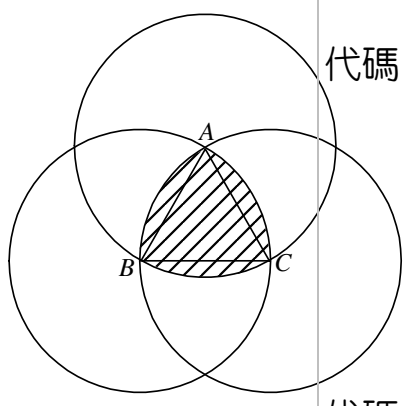


( ) 3. 扇形圓心角$45°$，面積2π，則此圓半徑長為 代碼：t11209m1
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1 。

( ) 4. 若一圓弧長為10π，其所對圓心角為$150°$，則該圓心角所對扇形面積為 (A) 24π (B) 56π (C) 60π (D) 72π 。 代碼：t11232m1

( ) 5. 設某扇形之弧長爲a公分且其面積爲b平方公分，若$2a=b$，則此扇形之半徑為多少公分？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：t11106w1

( ) 6. 如右圖，設ΔABC爲一正三角形且邊長爲1，若分別以A,B,C三頂點爲圓心，邊長爲半徑，各畫一圓，則此三圓共同部分的面積爲 代碼：t11252m1
(A) $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ 。



( ) 7. 試求$-\frac{19}{3}\pi$之最大負同界角為 代碼：t11216m1
(A) $-\frac{2\pi}{3}$ (B) $-\frac{5\pi}{3}$ (C) $-\frac{\pi}{3}$ (D) $-\frac{4\pi}{3}$ (E) $-\frac{7\pi}{3}$ 。

( ) 8. 下列何者是$-\frac{22}{3}\pi$的同界角 代碼：t11099p1
(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{3}$ 。

答案：DACCD ACB

主題二　三角函數的定義

1. 銳角三角函數：

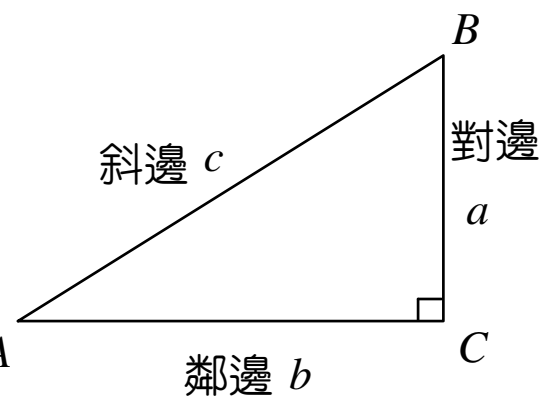
(1) 定義：

在 ΔABC 中，$\angle C=90^\circ$，則 $\angle A$ 的六個三角函數為：

$\sin A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}$　　$\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}=\dfrac{c}{a}$

$\cos A=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{b}{c}$　　$\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{c}{b}$

$\tan A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{a}{b}$　　$\cot A=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}=\dfrac{b}{a}$



1 老師講解

直角 ΔABC 中，$\angle C$ 爲直角，$\overline{BC}=3$，$\overline{AC}=4$，求 $\angle B$ 之各三角函數值。

1 學生練習

直角 ΔABC 中，$\angle B$ 爲直角，$\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=5$，求 $\angle A$ 之各三角函數值。

【代碼】t12a02m2

2 老師講解

在 ΔABC 中，$\angle B=90^\circ$，$\tan A=\dfrac{24}{7}$，$\overline{AB}=14$，試求：

(1) $\cos A$　(2) $\overline{AC}$　(3) $\sin C$ 之值。

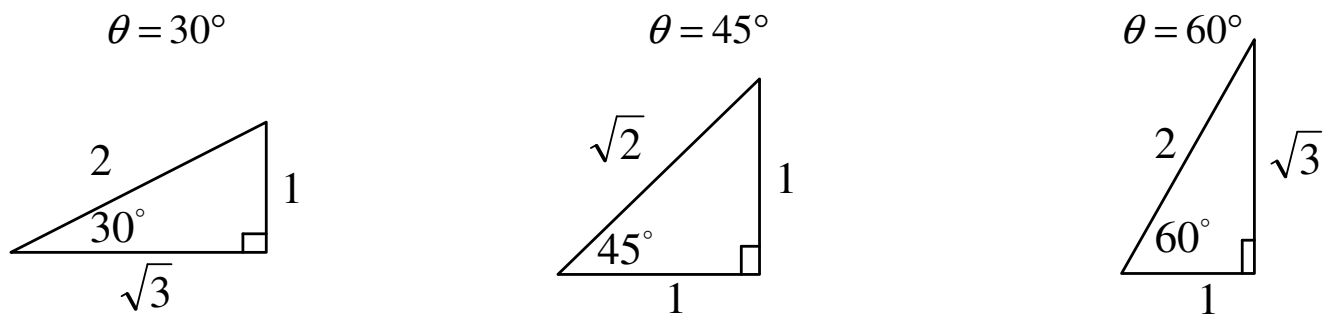
2 學生練習

在 ΔABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\overline{AC}=12$，試求：

(1) $\sec B$　(2) $\overline{AB}$　(3) $\tan A$ 之值。

【代碼】t12a02m3

(2) 特別角的三角函數值：



互為倒數　　互為倒數　　互為倒數

函數 / 角度	sin 正弦	csc 餘割	cos 餘弦	sec 正割	tan 正切	cot 餘切
30°	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	2	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

3 老師講解

求出下列各式之值：

(1) $\sin 30° \cos 45° \tan 45° \sec 30° \cot 60°$

(2) $\sin^2 60° + \cos^2 45° - \tan^2 60°$

3 學生練習

求出下列各式之值：

(1) 求 $\sin 45° \cos 60° + \sin 30° \cos 45°$

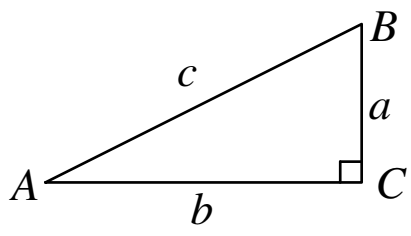
(2) $(\tan\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4})(\cot\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{3})$

【代碼】t12a03m2

(3) 餘角關係：

$A + B = 90°$

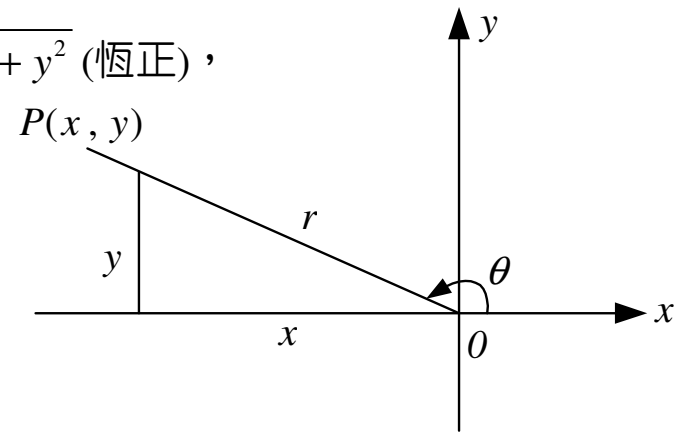
$\sin A = \cos B$　　$\tan A = \cot B$　　$\sec A = \csc B$



2.廣義角三角函數：

(1) 定義：

設 $P(x, y)$ 為標準位置角 θ 終邊上的一點，$\overline{OP} = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (恆正)，
則定義角 θ 的六個三角函數值。



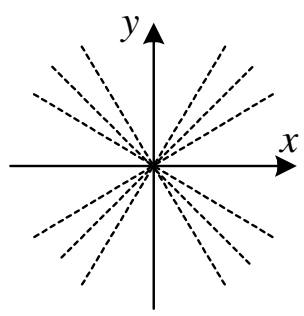
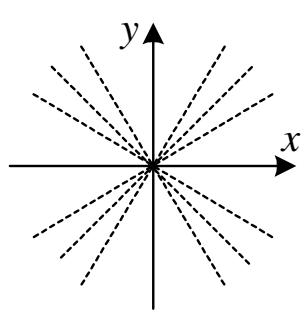
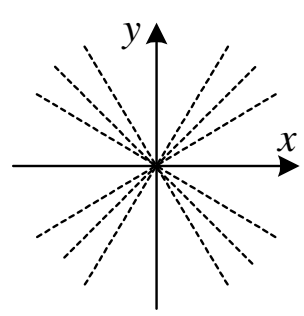
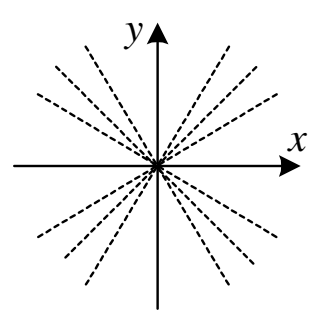
$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$　　$\csc\theta = \dfrac{r}{y}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$　　$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$　　$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

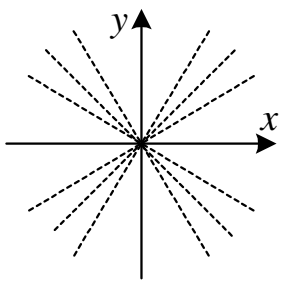
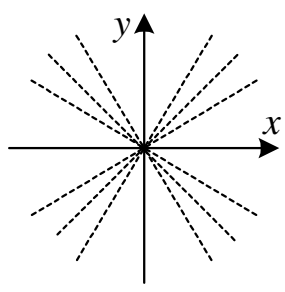
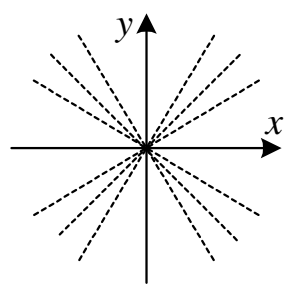
4 老師講解

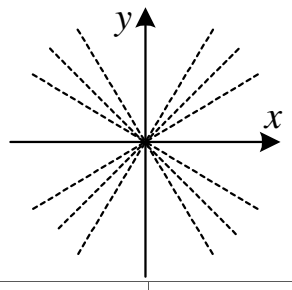
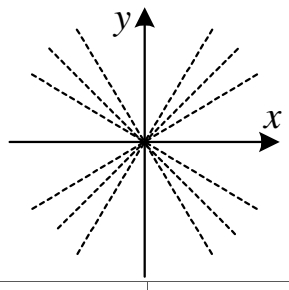
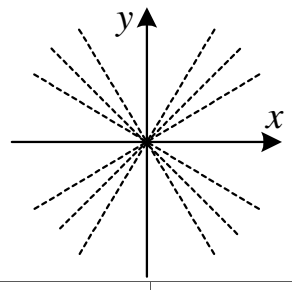
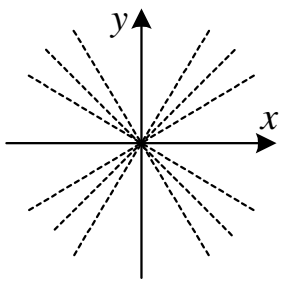
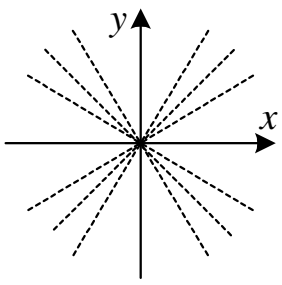
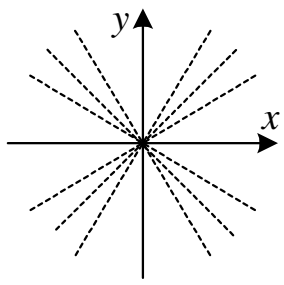
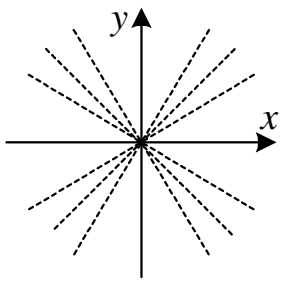
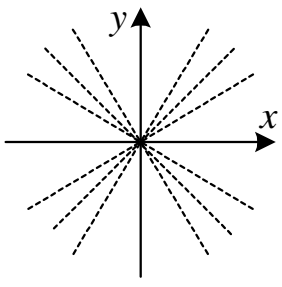
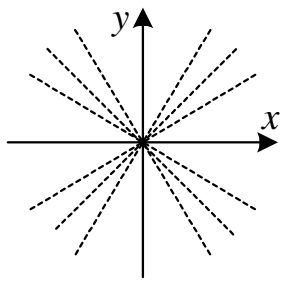
求出下列各角度之三角函數值，並填入下列各空格。

① $\theta = 60°$		② $\theta = 150°$		③ $\theta = 930°$		④ $\theta = -45°$	
							
$\sin\theta =$	$\csc\theta =$	$\sin\theta =$	$\csc\theta =$	$\sin\theta =$	$\csc\theta =$	$\sin\theta =$	$\csc\theta =$
$\cos\theta =$	$\sec\theta =$	$\cos\theta =$	$\sec\theta =$	$\cos\theta =$	$\sec\theta =$	$\cos\theta =$	$\sec\theta =$
$\tan\theta =$	$\cot\theta =$	$\tan\theta =$	$\cot\theta =$	$\tan\theta =$	$\cot\theta =$	$\tan\theta =$	$\cot\theta =$

4 學生練習

求出下列各角度之三角函數值，並填入下列各空格。【代碼】t12a04m2

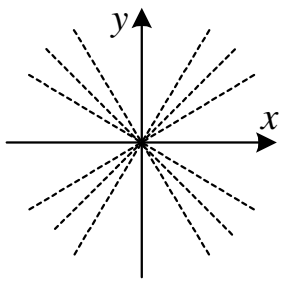
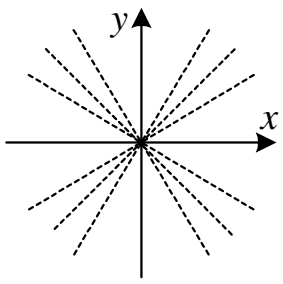
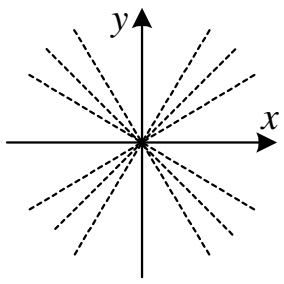
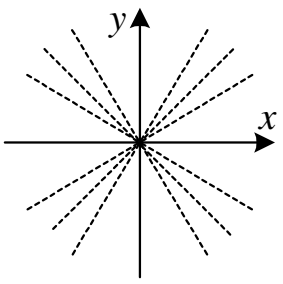
(1) $\theta = 30°$		(2) $\theta = 45°$		(3) $\theta = 60°$	
					
$\sin\theta =$	$\csc\theta =$	$\sin\theta =$	$\csc\theta =$	$\sin\theta =$	$\csc\theta =$
$\cos\theta =$	$\sec\theta =$	$\cos\theta =$	$\sec\theta =$	$\cos\theta =$	$\sec\theta =$
$\tan\theta =$	$\cot\theta =$	$\tan\theta =$	$\cot\theta =$	$\tan\theta =$	$\cot\theta =$

(4) $\theta=120°$		(5) $\theta=135°$		(6) $\theta=150°$	
					
$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$
$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$
$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$
(7) $\theta=210°$		(8) $\theta=225°$		(9) $\theta=240°$	
					
$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$
$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$
$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$
(10) $\theta=300°$		(11) $\theta=315°$		(12) $\theta=330°$	
					
$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$
$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$
$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$

(2) 象限角的三角函數值：

5 老師講解

求出下列各角度之三角函數值，並填入下列各空格。

① $\theta=0°$		② $\theta=90°$		③ $\theta=180°$		④ $\theta=270°$	
							
$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$
$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$
$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$

6 老師講解

$\sin 420°\cos(-510°)+\cos 1380°\cos 180°=$

6 學生練習

求出下列各式之值：

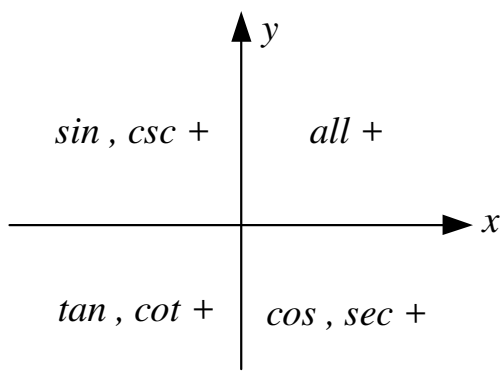
(1) $\sin 870°\cos(-1140°)$

(2) $\sin 90°+\sec 180°+\cot 270°+\cos 360°$

【代碼】t12a06m2

(3) 三角函數正負情形：

	一	二	三	四
$\sin\theta,\csc\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta,\sec\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta,\cot\theta$	+	−	+	−



7 老師講解

試判斷下列各函數值之正負號？

(1) $\sin 2030°$　　(2) $\cos(-1900°)$

(3) $\tan\frac{23}{5}\pi$　　(4) $\sin(-\frac{38}{7}\pi)$

7 學生練習

試判斷下列各函數值之正負號？

(1) $\sin 863°$　　(2) $\csc(-310°)$

(3) $\cot 2115°$　　(4) $\tan(-811°)$

【代碼】t12a05m2

8 老師講解

若角 $\theta\in$ 第三象限，則

點 $P(\tan\theta\cos\theta,\sec\theta\sin\theta)$ 在第幾象限？

8 學生練習

若角 $\theta\in$ 第二象限，

點 $P(\sin\theta\cos\theta,\cos\theta\cot\theta)$ 在第幾象限？

【代碼】t12b06m2

9 老師講解

若 $P(-3,-4)$ 爲角 θ 終邊上之一點，

求 θ 角的六個三角函數值。

9 學生練習

若 $P(-12,5)$ 爲角 θ 終邊上之一點，

求 $\sin\theta+\cos\theta$ 之值。

【代碼】t12b02m2

10 老師講解

已知 $\tan\theta=-\dfrac{12}{5}$，且 $\sin\theta<0$，
求 $\cot\theta+\csc\theta$ 之值。

10 學生練習

已知 $\cos\theta=-\dfrac{5}{13}$，且 $\sin\theta>0$，
求 $\tan\theta+\sec\theta$ 之值。

【代碼】t12b04m2

3. 化任意角為銳角：

(1) 餘函數：

$\sin \Leftrightarrow \cos$　　($\sin$, $\cos$ 彼此互餘)
$\tan \Leftrightarrow \cot$　　($\tan$, $\cot$ 彼此互餘)
$\sec \Leftrightarrow \csc$　　($\sec$, $\csc$ 彼此互餘)

(2) 化銳角：

$$\text{遇}\begin{cases}\text{整數}\pi(180^\circ,360^\circ)\Rightarrow\text{原函數不變}\\ \dfrac{\text{奇數}\pi}{2}(90^\circ,270^\circ)\Rightarrow\text{改餘函數}\end{cases}$$

外加原函數之正、負

【註】：不管 θ 實際大小均以“銳角”視之。

$$\begin{cases}\tan120^\circ=\tan(180^\circ-60^\circ)=-\tan60^\circ=-\sqrt{3}\\ \tan120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\cot30^\circ=-\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin225^\circ=\sin(180^\circ+45^\circ)=-\sin45^\circ=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin225^\circ=\sin(270^\circ-45^\circ)=-\cos45^\circ=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos330^\circ=\cos(270^\circ+60^\circ)=\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

(3) $-\theta$ 函數的變換：

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　　$\csc(-\theta)=-\csc\theta$
$\cos(-\theta)=\cos\theta$　　$\sec(-\theta)=\sec\theta$
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$　　$\cot(-\theta)=-\cot\theta$

例：$\begin{cases}\sin(-30^\circ)=-\sin30^\circ=-\dfrac{1}{2}\\ \cos(-30^\circ)=\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \tan(-30^\circ)=-\tan30^\circ=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$

【基本練習】

試求下列各三角函數值：

(1) $\sin 120°$　(2) $\tan 135°$　(3) $\tan 240°$

(4) $\cos 210°$　(5) $\cos 300°$　(6) $\sin 315°$

(7) $\cos 1320°$　(8) $\sin 1590°$

(9) $\sin(-120°)$　(10) $\tan(-1830°)$

11 老師講解

$\sin(-480°)\tan 870° + \cos(-1500°)\cot 1215° =$

11 學生練習

試求下列各式之值：

(1) $\tan 225° + \sin 210° + \cos 240°$

(2) $\sin 1230° \cos(-1140°)$

【代碼】t13a04m2

12 老師講解

化簡 $\dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(\pi-\theta)} + \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(-\theta)} + \dfrac{\tan(\frac{3}{2}\pi-\theta)}{\cot(2\pi-\theta)}$

12 學生練習

化簡 $\dfrac{\sin(\pi-\theta)}{\sin\theta} + \dfrac{\tan(\frac{3\pi}{2}-\theta)}{\cot(-\theta)} + \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(-\theta)}$

【代碼】t13b01m2

13 老師講解

設 $\sin 23° = k$ ，求 $\tan 157°$ 之值。

13 學生練習

設 $\cos 23° = k$ ，求 $\tan 337°$ 之值。

【代碼】t13b02m2

學生練習答案】

1. $\sin A = \frac{5}{13}$ 、$\cos A = \frac{12}{13}$ 、$\tan A = \frac{5}{12}$ 、$\csc A = \frac{13}{5}$ 、$\sec A = \frac{13}{12}$ 、$\cot A = \frac{12}{5}$			
2. (1) $\frac{5}{4}$ (2) 20 (3) $\frac{4}{3}$	3. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{7}{2}$	6. (1) $\frac{1}{4}$ (2) 1	
7. (1) $\sin 863° > 0$ (2) $\cos(-310°) > 0$ (3) $\tan 2115° < 0$ (4) $\tan(-811°) > 0$		8. 第二象限	
9. $-\frac{7}{13}$	10. -5	11. (1) 0 (2) $\frac{1}{4}$	12. 1
13. $-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$			

回家功課

( ) 1. 若直角三角形 ABC 之 $\angle C$ 為直角且 $\sin B=\frac{3}{5}$，則 $\frac{\sin A}{1+\cos A}$ 之值為何？ 代碼：t12101p1
(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{27}{20}$ (D) $\frac{32}{15}$ 。

( ) 2. 設 θ 為銳角，若 $\tan\theta=\sqrt{2}$，試求 $\sqrt{3}\sin\theta+\sqrt{6}\cos\theta=$？ 代碼：t12097k1
(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}$ 。

( ) 3. 若 θ 為一銳角，而且其正弦函數的值為 0.2，則其餘切函數值為何？ 代碼：t12090s1
(A) $\frac{\sqrt{6}}{12}$ (B) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ (C) $\frac{5\sqrt{6}}{12}$ (D) $2\sqrt{6}$ 。

( ) 4. $\sin\pi+\cos\pi+\tan\pi=$ (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 3 。 代碼：t12088s1

( ) 5. 設 m,n 為正奇數，則 $(\sin m\pi)^2+(\cos\frac{n\pi}{2})^2=$？ (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 代碼：t12099s1

( ) 6. 設 θ 為實數，若 $\tan\theta=\frac{5}{12}$ 且 $\sin\theta<0$，則 $\sin\theta-\cos\theta=$? 代碼：t12094s1
(A) $-\frac{12}{13}$ (B) $-\frac{7}{13}$ (C) $\frac{7}{13}$ (D) $\frac{12}{13}$ 。

( ) 7. 點 $(\sin 700°,\cos 700°)$ 在第幾象限? (A)一 (B)二 (C)三 (D)四 。 代碼：t12092s1

( ) 8. 若點 $A(\sec\theta,\tan\theta)$ 在第四象限內，則角度 θ 為第幾象限角？ 代碼：t12099s2
(A)一 (B)二 (C)三 (D)四 。

( ) 9. 試求 $\sin 690°+\cos 240°+\tan(-2025°)=$？ (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 。 代碼：t12098w1

( ) 10. 試求 $\cot\frac{15\pi}{4}\tan(\frac{-5\pi}{4})+\sin(\frac{-5\pi}{3})\cos\frac{7\pi}{6}+\cos(\frac{-\pi}{2})\sin(-\pi)=$？ 代碼：t13091s1
(A) $\frac{-7}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{7}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ 。

( ) 11. 設 θ 為銳角，則 $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(360°+\theta)}+\frac{\tan(180°+\theta)}{\cot(270°+\theta)}-\frac{\sin(270°-\theta)}{\cos(90°+\theta)}=$？ 代碼：t13098s2
(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3 。

( ) 12. 已知 $\tan 22°=k$，則 $\sin 2002°=$？ 代碼：t13091k1
(A) $\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ (B) $\frac{-1}{\sqrt{k^2+1}}$ (C) $\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ (D) $\frac{-k}{\sqrt{k^2+1}}$ 。

答案：BCDAA CBDAB BD

主題三　三角函數的基本性質

1. 倒數關係：

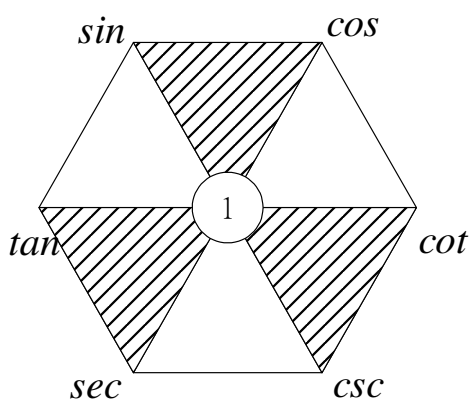
$\sin\theta\cdot\csc\theta=1$，$\cos\theta\cdot\sec\theta=1$，$\tan\theta\cdot\cot\theta=1$

2. 平方關係：

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$，$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

3. 商數關係：

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$



1 老師講解

求 $\sin 3^\circ\csc 3^\circ+\cos 5^\circ\sec 5^\circ+\tan 7^\circ\cot 7^\circ$ 之值。

1 學生練習

求 $\sin 1^\circ\cos 10^\circ\tan 25^\circ\cot 25^\circ\sec 10^\circ\csc 1^\circ$ 之值。

【代碼】t14a02m2

2 老師講解

求 $\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ+\tan^2 40^\circ-\cot^2 10^\circ-\sec^2 40^\circ+\csc^2 10^\circ$ 之值。

2 學生練習

求 $\sin^2 10^\circ+\tan^2 20^\circ-\sec^2 20^\circ+\cos^2 10^\circ$ 之值。

【代碼】t14a02m3

3 老師講解

求 $\sin^2 40° + \sin^2 50° + \tan^2 20° - \sec^2 160°$ 之值。

3 學生練習

求 $\sin^2 10° + \sin^2 25° + \sin^2 65° + \sin^2 80°$ 之值。

【代碼】t14a02m4

4 老師講解

若 $x = \sin\theta + \cos\theta + 1$， $y = \sin\theta - \cos\theta + 1$，求 $(x-1)^2 + (y-1)^2$ 之值。

4 學生練習

化簡下列各式：

$(\tan\theta + \cot\theta)^2 - (\tan\theta - \cot\theta)^2$

【代碼】t14a02m5

5 老師講解

求 $(\sin\theta - \csc\theta)^2 - (\tan\theta - \cot\theta)^2 + (\cos\theta - \sec\theta)^2$ 之值。

5 學生練習

化簡 $\dfrac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta} \cdot \dfrac{1+\sec\theta}{1+\csc\theta} =$ _____。

【代碼】t14b04m2

6 老師講解

化簡 $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\csc\theta)$

6 學生練習

$(\csc\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)(\tan\theta+\cot\theta)=$？

【代碼】t14b02m2

4.三角求值公式：

$$\begin{cases}\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}\\(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm2\sin\theta\cos\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\\\sin^3\theta\pm\cos^3\theta=(\sin\theta\pm\cos\theta)(1\mp\sin\theta\cos\theta)\end{cases}$$

7 老師講解

設 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，求下列各式之值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(3) $\sin\theta-\cos\theta$

7 學生練習

試求下列各式之值：

(1) 設 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，求 $\sin\theta\cos\theta=$？

(2) 設 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，求 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=$？

【代碼】t14a03m2

8 老師講解

設 $0<x<\frac{\pi}{4}$，若 $\tan x+\cot x=\frac{18}{7}$，
求下列各式之值：(1) $\sin x\cdot\cos x$
(2) $\sin x+\cos x$ (3) $\sin x-\cos x$

8 學生練習

設 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{18}{5}$，且 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$，
求 $\sin\theta-\cos\theta$ 之值。

【代碼】t14b06m2

基礎數學 充電站

根與係數的關係：代碼 **b08k02m1**

以下題目的國中基礎運算，溫習一下吧～

9 老師講解

設 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 爲二次方程式
$5x^2-2x+k=0$ 之二根，則 k 之值爲？

9 學生練習

設 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 爲二次方程式
$4x^2-5x+k=0$ 之二根，則 k 之值爲？

【代碼】t14a04m3

【學生練習答案】

1. 1	2. 0	3. 2	4. 4
5. $\tan\theta$	6. 1	7. (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	8. $\frac{2}{3}$
9. $\frac{9}{8}$			

回家功課

( ) 1. $\sin^2 40° + \sin^2 50° + \cot^2 50° - \sec^2 140° =$ 代碼：t14203m1
(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2 。

( ) 2. 求 $\dfrac{\sin 62° \cdot \sec 37° \cdot \cot 13°}{\tan 77° \cdot \cos 28° \cdot \csc 53°} =$ (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2 。 代碼：t14261m1

( ) 3. $\sin^2 33°(\sec^2 18° - \tan^2 18°) + \sin^2 57°(\csc^2 79° - \cot^2 79°) =$ 代碼：t14262m1
(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

( ) 4. 求 $\sin^2 10° + \sin^2 20° + \sin^2 30° + \cdots + \sin^2 80° + \sin^2 90°$ 之值爲 代碼：t14263m1
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 。

( ) 5. 試求 $(\sin 5° - \csc 5°)^2 + (\cos 5° - \sec 5°)^2 - (\tan 5°)^2 - (\cot 5°)^2 = ?$ 代碼：t14091s1
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 。

( ) 6. 已知 $\cot\theta = \dfrac{1}{3}$，則 $\dfrac{1}{1+\sin\theta} + \dfrac{1}{1-\sin\theta} =$ 代碼：t14218m1
(A) 30 (B) 20 (C) 15 (D) 12 。

( ) 7. $\dfrac{1}{1+\sin\theta} + \dfrac{1}{1+\cos\theta} + \dfrac{1}{1+\sec\theta} + \dfrac{1}{1+\csc\theta} =$ 代碼：t14b04m1
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 。

( ) 8. $\dfrac{x}{\csc^2 x} + \dfrac{x}{\sec^2 x} = \dfrac{\pi}{12}$，則 $x =$ 代碼：t14213m1
(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{12}$ (E) $\dfrac{\pi}{8}$ 。

( ) 9. 化簡 $\sin^2(\pi+\theta) + \cos^2(\theta-\pi) + \sec^2(\pi+\theta) - \tan^2(\theta-\pi)$ 為 代碼：t14088z2
(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) -2 。

( ) 10. 設 $\tan\theta = 3$，則 $\dfrac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{3\sin\theta - 2\cos\theta}$ 的值為 代碼：t14207m1
(A) $\dfrac{7}{3}$ (B) $-\dfrac{7}{3}$ (C) $\dfrac{3}{7}$ (D) $-\dfrac{3}{7}$ 。

( ) 11. 設 $\tan\theta + \cot\theta = 3$，且 $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$，則 $\sin\theta + \cos\theta$ 之值為 代碼：t14211m1
(A) $-\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ (B) $-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ (C) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ (D) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ 。

( ) 12. 已知θ為銳角，且$\sin\theta>\cos\theta$。若$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$，則$\sin\theta-\cos\theta=$？ 代碼：t14098s1
(A)$\dfrac{1}{9}$ (B)$\dfrac{2}{9}$ (C)$\dfrac{1}{3}$ (D)$\dfrac{4}{9}$ 。

( ) 13. 設θ為實數，若$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{3}$，則$\sec\theta-\csc\theta=$？ 代碼：t14096s1
(A)$\dfrac{3}{4}$ (B)$\dfrac{4}{3}$ (C)$\dfrac{4}{5}$ (D)$\dfrac{5}{4}$ 。

( ) 14. 設a是一常數，若$\sin p$與$\cos p$是二次方程式$x^2+ax+\dfrac{1}{2}=0$的兩根，則$\tan p+\cot p=$？ 代碼：t14098w1
(A)8 (B)6 (C)4 (D)2 。

( ) 15. 設$\theta=10^\circ$，求$\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\cdots+\cos18\theta=$ 代碼：t13b03m1
(A)-1 (B)0 (C)1 (D)3 。

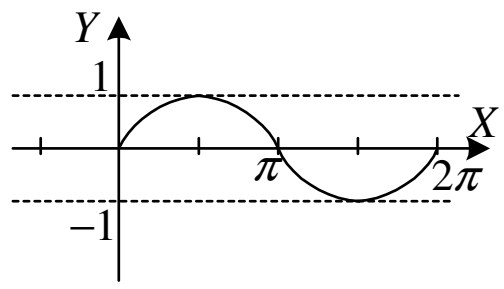
( ) 16. 設$\theta=10^\circ$，求$\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cos^2 3\theta+\cdots+\cos^2 18\theta=$ 代碼：t14264m1
(A)8 (B)9 (C)10 (D)18 。

答案：ABBAA BDDBC ACADA B

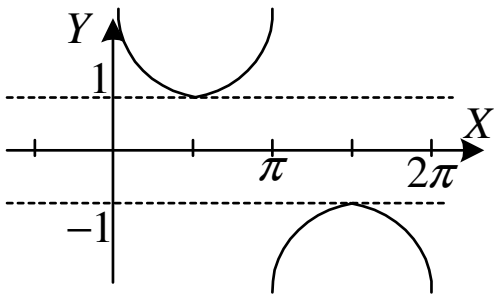
主題四　三角函數圖形

試繪下列各圖形：

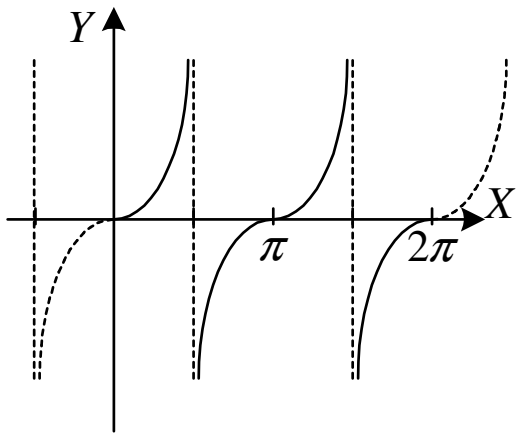
(1) $y=\sin x$



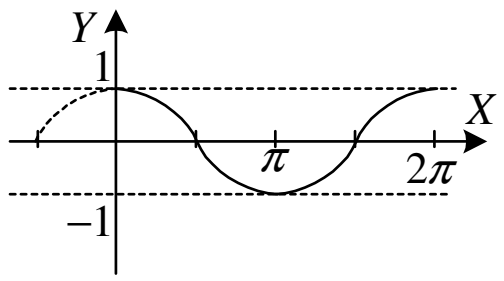
(3) $y=\csc x$



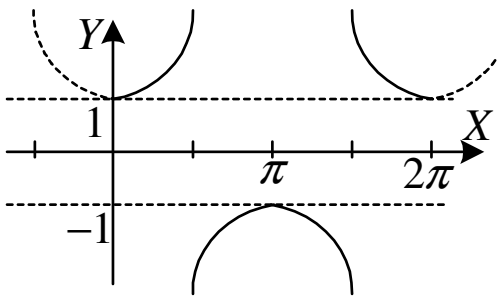
(5) $y=\tan x$



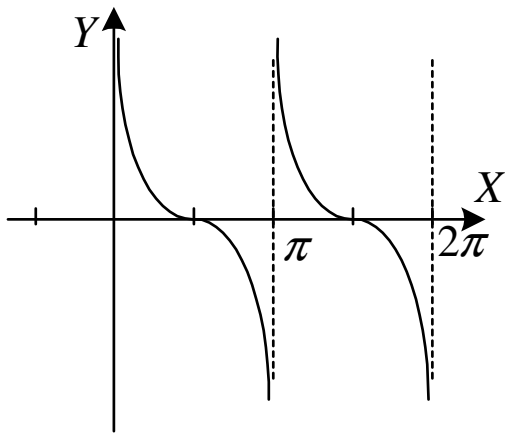
(2) $y=\cos x$



(4) $y=\sec x$



(6) $y=\cot x$



1.週期之求法：

(1) $y=\sin x$ 、 $y=\cos x$ 、 $y=\sec x$ 、 $y=\csc x$ 的週期皆為 2π

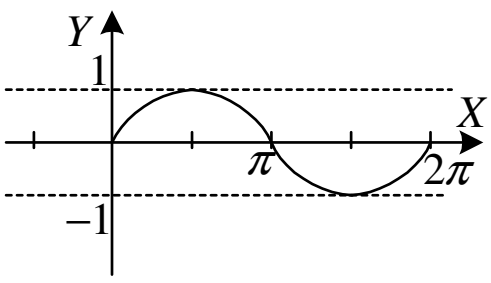
(2) $y=\tan x$ 、 $y=\cot x$ 的週期皆為 π

(3) $y=|\sin x|$ 、 $y=|\cos x|$ 、 $y=|\tan x|$ 、 $y=|\cot x|$ 、 $y=|\sec x|$ 、 $y=|\csc x|$ 的週期皆為 π

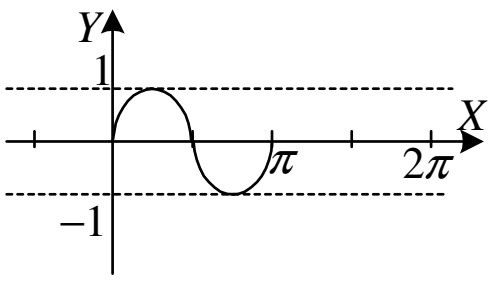
(4) $y=\sin^2 x$ 、 $y=\cos^2 x$ 、 $y=\tan^2 x$ 、 $y=\cot^2 x$ 、 $y=\sec^2 x$ 、 $y=\csc^2 x$ 的週期皆為 π

(5) 設 $f(x)$ 之週期為 p ，則 $f(kx)$ 之週期為 $\dfrac{p}{k}$ 。

$y=\sin x$



$y=\sin 2x$



例：　$\sin 2x$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

$\tan 3x$ 的週期為 $\dfrac{\pi}{3}$

1 老師講解

試繪出 $y=2\sin x+1$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 的部分圖形

1 學生練習

已知 $y=-2\sin x+1$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 的圖形與水平線 $y=2$ 交點個數有幾個？

【代碼】t15a07m1

2 老師講解

試繪出 $y=3\sin 2x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 的部分圖形

2 學生練習

關於函數 $y=2\sin 3x$，則下列何者錯誤？

(A) $-2\le y\le 2$

(B) 此函數在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 時有最大值

(C) 此函數週期爲 2π

(D) 此函數圖形對稱於 $x=\dfrac{\pi}{2}$。

【代碼】t15a07m2

3 老師講解

求下列各函數之週期：

(1) $\cos 5x$

(2) $\sin\dfrac{x}{2}$

(3) $3|\cos(2x+30^\circ)|+2$

(4) $3\sec^2(-3x+\dfrac{\pi}{5})+2$

3 學生練習

求下列各函數之週期：

(1) $f(x)=3\cos(2x+\dfrac{2\pi}{3})$

(2) $f(x)=5+2\sin^2(3x+\dfrac{4\pi}{7})$

【代碼】t15a02m2

2. 三角函數之值域：

$-1\le\sin\theta\le1 \quad\Rightarrow|\sin\theta|\le1$

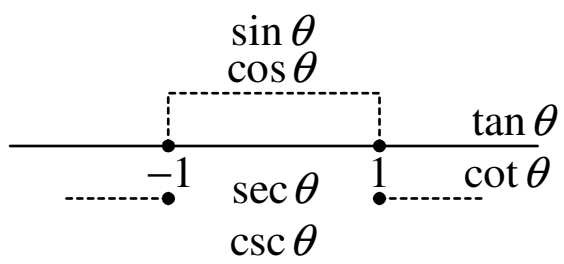
$-1\le\cos\theta\le1 \quad\Rightarrow|\cos\theta|\le1$

$\tan\theta\in R$

$\cot\theta\in R$

$\sec\theta\le-1$，$\sec\theta\ge1 \quad\Rightarrow|\sec\theta|\ge1$

$\csc\theta\le-1$，$\csc\theta\ge1 \quad\Rightarrow|\csc\theta|\ge1$



4 老師講解

下列各式中何者有解？

(A) $\sin x=\dfrac{4}{3}$　(B) $\cos x=-\dfrac{7}{5}$

(C) $\sec x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(D) $\tan x=-99$。

4 學生練習

下列各式中何者無解？

(A) $\sin x=-\dfrac{4}{5}$　(B) $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\sec x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(D) $\tan x=-0.9$。

【代碼】t15a03m2

5 老師講解

若 $90° < \theta < 180°$，
且 $2\cos^2\theta - 5\sin\theta + 1 = 0$，求 θ 的角度？

5 學生練習

設 $\sin^2 x = \cos x$，求 $\cos x$ 之值。

【代碼】t15a04m3

6 老師講解

若 $f(x) = 2\cos^2 x + 3\sin x$，
求 $f(x)$ 之最大值與最小值。

6 學生練習

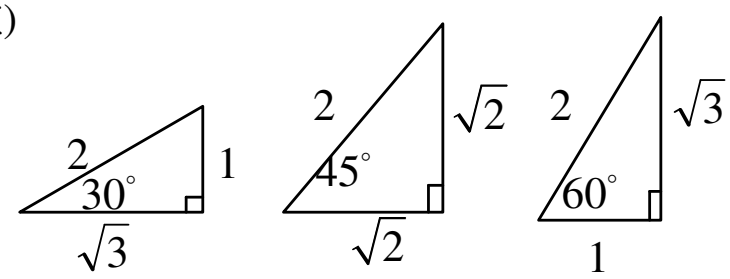
求 $f(x) = \cos^2 x - \cos x + 3$ 之最小值。

【代碼】t15b02m2

3.比大小：

(1) $0° \sim 90° \Rightarrow \theta$ 愈大 $\Rightarrow \begin{cases} \sin\theta \text{ 愈大} \\ \cos\theta \text{ 愈小} \end{cases}$ ($\tan\theta$ 、 $\sec\theta$ 愈大)

(2) $\begin{cases} 0° \sim 45° \Rightarrow \sin\theta < \cos\theta,\ \tan\theta < 1 \\ 45° \sim 90° \Rightarrow \sin\theta > \cos\theta,\ \tan\theta > 1 \end{cases}$



(3) $0° \sim 90°$ ： $\begin{cases} \sin\theta < 1 \\ \cos\theta < 1 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} \sec\theta > 1 \\ \csc\theta > 1 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} 0° \sim 45° \Rightarrow \tan\theta < 1 \\ 45° \sim 90° \Rightarrow \tan\theta > 1 \end{cases}$

7 老師講解

試比較 $a = \sin 43°$ 、 $b = \sec 1°$ 、 $c = \cos 74°$ 之大小

7 學生練習

試比較下列大小：

(1) $a = \sin 20°$ 、 $b = \cos 40°$ 、 $c = \cot 10°$

(2) $a = \cos 54°$ ， $b = \csc 18°$ ， $c = \sin 20°$

【代碼】t15a05m2

8 老師講解

試比較下列三角函數大小：

(1) $a = \sin 1220°$ 、 $b = \cos(-800°)$ 、 $c = \cot(-1240°)$

(2) $a = \sec 40°$ 、 $b = \cot 72°$ 、 $c = \csc 20°$

8 學生練習

(1) 設 $a = \sin 870°$ ， $b = \cos 410°$ ， $c = \tan 1310°$ ， $d = \sin(-2095°)$ 比較 a, b, c, d 之大小。

(2) 三角函數值 $\sin 71°$ 、 $\cos 71°$ 、 $\sec 71°$ 、 $\csc 71°$ 中，何者爲最大？

【代碼】t15b03m2

【學生練習答案】

1. 2	2. (C)	3. (1) π (2) $\frac{\pi}{3}$	4. (C)
5. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	6. $\frac{11}{4}$	7. (1) $c > b > a$ (2) $b > a > c$	
8. (1) $c > d > b > a$ (2) $\sec 71°$			

回家功課

( ) 1. 已知正弦函數 $f(x)=\sin x$ 之週期為 2π，則 $g(x)=4\sin 2x+3$ 的週期為何？ 代碼：t15100p2
(A) π (B) 2π (C) 3π (D) 4π

( ) 2. 若 $y=\sin 2x$ 的週期爲 a， $y=2\sin x$ 的週期爲 b，則 $a+2b=$ 代碼：t15106w1
(A) 2π (B) 3π (C) 4π (D) 5π

( ) 3. 已知 $-1\le\cos x\le 1$，則 $|\cos x|+2$ 最小值為何？ 代碼：t15102p1
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

( ) 4. 若 $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{7\pi}{6}$，則 $\sin x$ 之最大值爲 M，最小值爲 m，求 $M+m=$？ 代碼：t15251m1
(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $-\frac{1}{2}$ 。

( ) 5. 若 $90°<\theta<270°$，則 $\sqrt{\cos^2\theta}+\sqrt{(1+\cos\theta)^2}=$ 代碼：t15217m1
(A) 0 (B) $4+2\cos\theta$ (C) 1 (D) -1 。

( ) 6. 已知 $\cos^2\theta=\sin\theta-1$，求 $\sin\theta=$ 代碼：t15207m1
(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (D) $-\frac{1}{2}$ 。

( ) 7. 設 $3\tan^2\theta-5\sec\theta+1=0$，且 θ 在第四象限，求 $\sin\theta=$ 代碼：t15219m1
(A) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ (B) $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

( ) 8. 設 $0\le x\le 2\pi$，若 $2\sin^2 x+\cos x$ 的最大值為 a、最小值為 b，則 (a,b) 為何？ 代碼：t15092s1
(A) $(\frac{17}{8},-1)$ (B) $(3,-1)$ (C) $(2,1)$ (D) $(\frac{9}{8},1)$ 。

( ) 9. 三角函數值 $\sin 35°$、$\cos 35°$、$\tan 35°$、$\cot 35°$ 中，何者為最小? 代碼：t15092s2
(A) $\sin 35°$ (B) $\cos 35°$ (C) $\tan 35°$ (D) $\cot 35°$ 。

( ) 10. 若 $a=\sin 770°$、$b=\cos(-380°)$、$c=\tan 1150°$，則下列何者正確？ 代碼：t15093s1
(A) $a<c<b$ (B) $a<b<c$ (C) $b<c<a$ (D) $c<a<b$ 。

答案：ADBBC ADAAB

主題五　正弦、餘弦定理、三角形面積

1. 正弦定理：

設 ΔABC 中 a 、b 、c 分別表 $\angle A$ 、$\angle B$ 、$\angle C$ 的對邊長，R 為 ΔABC 之外接圓之半徑，則：

(1) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

(2) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

1 老師講解

ΔABC 中，若 $b=3\sqrt{2}$ ，$\angle A=75^\circ$ ，$\angle C=60^\circ$ ，試求 $\overline{AB}$ 之值與 ΔABC 外接圓半徑。

1 學生練習

ΔABC 中，已知 $\overline{BC}=2$ ，$\angle B=45^\circ$ ，$\angle C=105^\circ$ ，試求 b 之值。

【代碼】t31a01m3

2 老師講解

設 ΔABC 中，三邊長 a,b,c ，且 $(a+b-2c)^2+(3a-2b+c)^2=0$ ，試求 $\sin A:\sin B:\sin C$ 之值。

2 學生練習

設 ΔABC 中，三邊長 a,b,c ，且 $(3a-12b+8c)^2+(5a+2b-5c)^2=0$ ，試求 $\sin A:\sin B:\sin C$ 之值。

【代碼】t31b01m2

2. 餘弦定理：

設 ΔABC 中以 a 、 b 、 c 分別表 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊長

(1) $\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$

(已知三邊長 SSS，求三內角度數)

(2) $\begin{cases} a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2 = c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$

(已知兩邊一夾角 SAS，求第三邊)

3 老師講解

ΔABC 中， $\overline{AB}=3$ ， $\overline{AC}=5$ ， $\angle A=120°$
試求 $\overline{BC}$ 之值。

3 學生練習

ΔABC 中， $\overline{AB}=\sqrt{3}$ 、 $\overline{AC}=3$ 、 $\angle A=30°$
試求 $\overline{BC}$ 之值。

【代碼】t31a02m2

4 老師講解

設 ΔABC 中，三邊長比例爲 $7:8:13$ ，
試求此三角形之最大內角度量。

4 學生練習

一三角形，其三邊長比爲 $4:5:6$ ，
設最大邊所對角爲 θ ，試求 $\cos\theta$ 之值。

【代碼】t31a02m3

5 老師講解

設 ΔABC 三邊長爲 a,b,c ，
若 $a^2-(b-c)^2=bc$ ，試求 $\angle A$ 的度量。

5 學生練習

設 a,b,c 表 ΔABC 三邊之長，
若 $a^2-(b+c)^2=-bc$ ，試求 $\angle A$ 的度量。

【代碼】t31b02m2

6 老師講解

圓內接四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\angle ABC=120°$，試求 $\overline{AD}$ 之值。

6 學生練習

已知四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=8$，$\overline{CD}=8$，$\overline{AD}=3$，且 $\angle ABC=\angle ADC=60°$，試求 $\overline{BC}$ 之值。

【代碼】t31b03m2

3.三角形面積公式與外接圓、內切圓半徑：

設 ΔABC 中以 a、b、c 分別表 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

(1) ΔABC 面積 $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$ (已知兩邊一夾角 SAS，求面積)

(2) 海龍公式：

ΔABC 面積 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (已知三邊長 SSS，求面積)

(3) 三角形的外接圓與內切圓半徑：

ΔABC 面積 $\Delta=rs$ (r 表 Δ 內切圓之半徑)

ΔABC 面積 $\Delta=\frac{abc}{4R}$ (R 表 Δ 外接圓之半徑)

7 老師講解

ΔABC 中 $\angle A=120°$，$b=4$，$c=5$，試求 ΔABC 的面積。

7 學生練習

在 ΔABC 中，$a=12$，$c=\sqrt{3}$，$\angle B=60°$ 試求 ΔABC 的面積。

【代碼】t32a01m2

8 老師講解

已知三角形三邊長爲6、10、14，
試求此三角形面積。

8 學生練習

已知三角形的三邊長爲13，14，15，
試求此三角形面積。

【代碼】t32a02m2

9 老師講解

ΔABC 中 $\overline{BC}=2$，$\angle B=45°$，$\angle C=105°$
試求 ΔABC 面積。

9 學生練習

ΔABC 中 $b=2\sqrt{2}$，$\angle A=75°$，
$\angle C=60°$，試求 ΔABC 面積。

【代碼】t32b01m2

10 老師講解

ΔABC，$\angle A=120°$，$b=4$，$c=12$，
試求 $\angle A$ 之內角平分線長。

10 學生練習

ΔABC 之中，$\angle A=60°$、$b=4$、$c=8$，
試求 $\angle A$ 之內角平分線長。

【代碼】t32b02m2

11 老師講解

ΔABC，$\angle A=120°$，$b=4$，$c=12$，
試求 ΔABC 外接圓面積。

11 學生練習

ΔABC 之中，$\angle A=60°$、$b=4$、$c=8$，
試求 ΔABC 外接圓面積。

【代碼】t32b03m2

12 老師講解

設 ΔABC 中，$a=7$，$b=4$，$c=5$，
試求：
(1) ΔABC 之外接圓半徑
(2) ΔABC 之內切圓面積

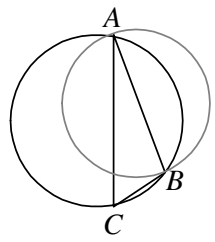
12 學生練習

設 ΔABC 三邊長分別爲 4、6、8，試求：
(1) ΔABC 之面積
(2) 邊長 6 所對應之高
(3) ΔABC 之內切圓半徑
(4) ΔABC 之外接圓半徑

【代碼】t32a02m3

【加強題】

1. 如右圖，先作ΔABC的外接圓O_1，再以$\overline{AB}$長爲直徑作另一圓O_2，若$\angle ACB=60°$，則將圓O_1與圓O_2的面積比寫成簡單的整數比爲_____。



2. 在三角形ABC中，若D點在邊$\overline{BC}$上，$\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=13$，$\overline{BD}=7$，$\overline{CD}=8$，則$\overline{AD}=$_____。

【學生練習答案】

1. $2\sqrt{2}$	2. $4:5:6$	3. $\sqrt{3}$	4. $\frac{1}{8}$
5. $120°$	6. 5或3	7. 9	8. 84
9. $3+\sqrt{3}$	10. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$	11. 16π	12. (1) $3\sqrt{15}$ (2) $\sqrt{15}$ (3) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ (4) $\frac{16\sqrt{15}}{15}$

回家功課

( ) 1. ΔABC中，若$\angle A:\angle B:\angle C=1:1:4$，試求$a:b:c=$ 代碼：t31a01m4
(A)$1:1:1$ (B)$1:1:\sqrt{2}$ (C)$1:1:\sqrt{3}$ (D)$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 。

( ) 2. 在ΔABC中，設a,b,c分別為$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的對邊長。 代碼：t31094s1
若$a-2b+c=0$且$3a+b-2c=0$，則下列何者正確？
(A)$\angle A>\angle B>\angle C$ (B)$\angle B>\angle C>\angle A$
(C)$\angle C>\angle B>\angle A$ (D)$\angle C>\angle A>\angle B$ 。

( ) 3. ΔABC中，$\overline{AB}=30$公分，$\overline{AC}=10$公分，$\angle A=60°$，則$\dfrac{\sin B}{\sin C}$之值為 代碼：t31203m1
(A)$\dfrac{1}{2}$ (B)$\dfrac{1}{3}$ (C)$\dfrac{1}{4}$ (D)$\dfrac{1}{5}$ (E)$\dfrac{1}{6}$ 。

( ) 4. ΔABC中，若$\dfrac{7}{\sin A}=\dfrac{8}{\sin B}=\dfrac{13}{\sin C}$，則$\angle C$等於 代碼：t31205m1
(A)$30°$ (B)$60°$ (C)120 (D)150 。

( ) 5. 設$A(1,0)$，$B(3,0)$，$C(-1,2)$，則$\angle CAB$之度數為何？ 代碼：t31101p1
(A)$120°$ (B)$135°$ (C)$150°$ (D)$160°$ 。

( ) 6. 已知ΔABC中，邊長滿足$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}\cdot\overline{BC}$，求$\cos C=?$ 代碼：t31102p2
(A)$\dfrac{-2}{3}$ (B)$\dfrac{-1}{2}$ (C)$\dfrac{1}{2}$ (D)$\dfrac{2}{3}$ 。

( ) 7. 已之四邊形$ABCD$(按順序)中，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AD}=3$， 代碼：t31098k1
且$\angle ABC=\angle ADC=60°$，則$\overline{CD}$之長為多少？
(A)5 (B)6 (C)7 (D)8 。

( ) 8. 若ΔABC中，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=2\sqrt{3}$，且$\angle A=60°$，則ΔABC之面積為何？ 代碼：t32099s1
(A)$2\sqrt{3}$ (B)$4\sqrt{3}$ (C)$6\sqrt{3}$ (D)$8\sqrt{3}$ 。

( ) 9. 在ΔABC中，設$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$之對應邊長分別為a,b,c 代碼：t32095k2
若$\angle B=120°,a=5,c=3$，則ΔABC的外接圓面積為何？
(A)$\dfrac{7}{\sqrt{3}}\pi$ (B)$\dfrac{49}{\sqrt{3}}\pi$ (C)$\dfrac{7}{3}\pi$ (D)$\dfrac{49}{3}\pi$ 。

( ) 10. 設A、B、C為一圓之圓周上三點，若$\overline{AB}=4$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=8$， 代碼：t32099k1
則該圓之面積為何？ (A)$\dfrac{256}{15}\pi$ (B)$\dfrac{256}{13}\pi$ (C)$\dfrac{81}{4}\pi$ (D)$\dfrac{81}{2}\pi$ 。

( ) 11. 梯形$ABCD$中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AD}=4$、$\overline{BC}=10$、$\overline{AB}=5$、$\overline{DC}=7$， 代碼：t32251m1
試求梯形$ABCD$面積=
(A)$14\sqrt{3}$ (B)$14\sqrt{6}$ (C)$18\sqrt{2}$ (D)$16\sqrt{3}$ 。

答案：CCBCB BDCDA B

歷屆試題

( ) 1. 求 $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}\cot(-\frac{\pi}{4})+\sin(-\frac{11\pi}{6})\cos\frac{\pi}{3}=$？ 代碼：t12100s1 (100 年統測 B)

(A) -2 (B) $-\sqrt{3}$ (C) 0 (D) $\sqrt{3}$。

( ) 2. 下列哪一個點在 $y=\sin x+\cos x$ 的圖形上？ 代碼：t15100s1 (100 年統測 B)

(A) $(-\frac{\pi}{2},1)$ (B) $(-\frac{\pi}{6},\frac{1-\sqrt{3}}{2})$ (C) $(\pi,1)$ (D) $(\frac{5\pi}{3},\frac{1-\sqrt{3}}{2})$。

( ) 3. 已知 ΔABC 中，$\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{3}:2$，則下列何者正確？ 代碼：t31100s1 (100 年統測 B)

(A) $2\sqrt{3}\overline{BC}=2\overline{CA}=\sqrt{3}\overline{AB}$ (B) $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:\sqrt{3}:2$

(C) $\cos A:\cos B:\cos C=1:\sqrt{3}:2$ (D) $\angle A=60°$，$\angle B=30°$，$\angle C=90°$。

( ) 4. 已知 $0\le\alpha,\beta\le\pi$。下列各選項中，何者恆爲正確？ 代碼：t12100k1 (100 年統測 C)

(A)若 $\cos\alpha=\cos\beta$，則 $\alpha=\beta$ (B)若 $\cos(\alpha-\beta)=0$，則 $\alpha=\beta$

(C)若 $\sin\alpha=\sin\beta$，則 $\alpha=\beta$ (D)若 $\sin(\alpha-\beta)=0$，則 $\alpha=\beta$。

( ) 5. 下列何者正確？ (A) $\sin 240°=\cos 30°$ (B) $\cos(-330)°=-\cos 30°$ 代碼：t13101s1 (101 年統測 B)

(C) $\sec 225°=\csc 45°$ (D) $\tan 135°=-\cot 45°$。

( ) 6. 已知 θ 爲一銳角，且 $\tan\theta=\frac{7}{19}$，則 $(\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta})(\frac{1+\sec\theta}{1+\csc\theta})$ 之值爲何？ 代碼：t14101s1 (101 年統測 B)

(A) $\frac{25}{17}$ (B) $\frac{7}{19}$ (C) $\frac{19}{267}$ (D) $\frac{277}{319}$。

( ) 7. 已知 $\sin\theta=\sin\phi=\frac{1}{3}$，且 $0<\theta<x<\frac{\pi}{2}<\phi<y<\pi$，令 $a=\sin x-\frac{1}{3}$，$b=\sin y-\frac{1}{3}$，則下列何者正確？ 代碼：t15101s1 (101 年統測 B)

(A) $a>0$，$b>0$ (B) $a>0$，$b<0$

(C) $a<0$，$b>0$ (D) $a<0$，$b<0$。

( ) 8. 已知三角形 Δ_1 的三邊長分別爲 8、7、5，面積爲 x；三角形 Δ_2 的三邊長分別爲 8、6、6，面積爲 y；三角形 Δ_3 的三邊長分別爲 9、7、4，面積爲 z，則下列何者正確？ 代碼：t32101s1 (101 年統測 B)

(A) $y<z$ (B) $x<z$ (C) $x<y$ (D) $x+y+z=\sqrt{800}$。

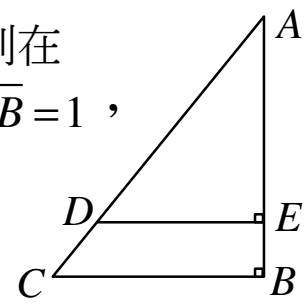
( ) 9 已知中 ΔABC 中 $\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=2\sqrt{3}$，$\angle A=30^\circ$，$\angle B>90^\circ$，則 ΔABC 之面積爲何？ (A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) $6\sqrt{3}$。 代碼：t32101s2 (101 年統測 B)

( ) 10. 試問下列哪一個三角函數值與 $\sec 250^\circ$ 相等？ (A) $-\csc 70^\circ$ (B) $-\sec 110^\circ$ (C) $-\sec 340^\circ$ (D) $-\csc 160^\circ$。 代碼：t13101k1 (101 年統測 C)

( ) 11. $\sin^2 210^\circ+\cos^2 570^\circ+\sec^2 930^\circ-\tan^2 1290^\circ+\csc^2 1650^\circ-\cot^2 2010^\circ=$？ (A) -1 (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 3。 代碼：t14101k1 (101 年統測 C)

( ) 12. ΔABC 中，若 $\overline{BC}=\sqrt{13}$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=60^\circ$，則 $\cos C$ 之值爲何？ (A) $-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ (B) $-\frac{1}{\sqrt{13}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$。 代碼：t31101k1 (101 年統測 C)

( ) 13. 已知 ΔABC 爲直角三角形，$\angle B$ 爲直角，點 D、E 分別在線段 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 上。若 $\overline{DE}$、$\overline{AB}$ 互相垂直，且 $\overline{AD}=\overline{AB}=1$，$\overline{AB}\neq\overline{BC}$，如圖(一)，則下列敘述何者爲眞？ (A) $\overline{BC}=\cot A$ (B) $\overline{DE}=\tan A$ (C) $\overline{AE}=\sin C$ (D) $\overline{AC}=\sec C$。 代碼：t12102s1 (102 年統測 B)



圖(一)

( ) 14. 已知 ΔABC 中，$\sin A:\sin B:\sin C=5:7:8$，求 $\cos A$ 之值。 (A) $\frac{11}{14}$ (B) $\frac{5}{7}$ (C) $\frac{9}{14}$ (D) $\frac{4}{7}$。 代碼：t31102s1 (102 年統測 B)

( ) 15. 已知 θ 爲第三象限角，且 $\tan\theta=\frac{3}{4}$，則 $\frac{2\sin\theta-1}{3+4\cos\theta}=$？ (A) $\frac{1}{31}$ (B) $\frac{13}{7}$ (C) 11 (D) 31。 代碼：t12102k1 (102 年統測 C)

( ) 16. 若 ΔABC 中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=9$、$\overline{CA}=10$，則 $\cos(\angle A+\angle B)=$？ (A) $\frac{-13}{15}$ (B) $\frac{-7}{15}$ (C) $\frac{7}{15}$ (D) $\frac{13}{15}$。 代碼：t31102k1 (102 年統測 C)

( ) 17. 已知 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{8}{3}$，則 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=$ (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{7}{4}$。 代碼：t14103s1 (103 年統測 B)

( )18. 已知ΔABC三邊長a,b,c滿足$(a-b)^2=c^2-(2+\sqrt{3})ab$，若$\angle C$爲邊長$c$所對應的角，則$\angle C=$？ (A)$30°$ (B)$60°$ (C)$150°$ (D)$120°$。 代碼：t31103s1 (103 年統測 B)

( )19. 在ΔABC中，設三邊長之比$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=7:5:3$，則$\Delta ABC$之最大內角爲何？ (A)$75°$ (B)$90°$ (C)$120°$ (D)$135°$。 代碼：t31103k1 (103 年統測 C)

( )20. 若$0°<\theta<90°$且$\sin\theta=\frac{1}{3}$，則$2\sin\theta\cos\theta=$？ (A)$\frac{\sqrt{2}}{6}$ (B)$\frac{4\sqrt{2}}{9}$ (C)$\frac{2}{3}$ (D)$\frac{2\sqrt{2}}{3}$。 代碼：t12104s2 (104 年統測 B)

( )21. 若$a=\sin 45°$、$b=\tan 45°$、$c=\sec 45°$，則$a^2+b^2+c^2=$？ (A)3 (B)$\frac{7}{2}$ (C)4 (D)$\frac{9}{2}$。 代碼：t12104s1 (104 年統測 B)

( )22. 已知$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，則$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=$？ (A)$2(\sqrt{3}-1)$ (B)$4(\sqrt{3}-1)$ (C)$2(\sqrt{3}+1)$ (D)$4(\sqrt{3}+1)$。 代碼：t14104k1 (104 年統測 C)

( )23. 已知三角形的三邊長分別爲3公分、3公分、4公分，則此三角形之外接圓半徑爲何？ (A)$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (B)$\frac{3\sqrt{5}}{5}$ (C)$\frac{7\sqrt{5}}{10}$ (D)$\frac{9\sqrt{5}}{10}$。 代碼：t32104k1 (104 年統測 C)

( )24. 已知$\csc\theta>0$且$\tan\theta<0$，則θ爲第幾象限角？ (A)一 (B)二 (C)三 (D)四。 代碼：t12105s1 (105 年統測 B)

( )25. 試求三角函數$\sin(-960°)$之值 (A)$\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (B)$-\frac{1}{2}$ (C)$\frac{1}{2}$ (D)$\frac{\sqrt{3}}{2}$。 代碼：t12105s2 (105 年統測 B)

( )26. 若$f(x)=\sec^2\frac{x}{2}+\csc^2\frac{x}{2}$的週期爲$P$，求$P$之值 (A)$\frac{\pi}{2}$ (B)π (C)2π (D)π^2。 代碼：t15105k1 (105 年統測 C)

( )27. 設$\sec\theta+\csc\theta=1$，求$\sec\theta\csc\theta$之值 (A)$\sqrt{2}+1$ (B)$\sqrt{2}-1$ (C)$-\sqrt{2}-1$ (D)$-\sqrt{2}+1$。 代碼：t14105k1 (105 年統測 C)

( )28. 設ΔABC三內角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的對應邊分別爲a、b、c，且$\sqrt{a^2-3bc}=b-c$，求$\angle A$之值 (A)$\frac{\pi}{2}$ (B)$\frac{2\pi}{3}$ (C)$\frac{3\pi}{4}$ (D)$\frac{5\pi}{6}$。 代碼：t31105k1 (105 年統測 C)

( )29. 已知$y=2\sin x+1$，$0\le x\le 2\pi$的圖形與水平線$y=1$、$y=0$、$y=-1$的交點個數分別爲a、b、c，則下列何者正確？
(A)$a=3$、$b=2$、$c=1$ (B)$a=2$、$b=2$、$c=2$
(C)$a=2$、$b=3$、$c=2$ (D)$a=1$、$b=3$、$c=1$。 代碼：t15106s1 (106 年統測 B)

( )30. 已知A點坐標爲$(\cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6})$，$B$點坐標爲$(\cos\frac{11\pi}{6},\tan\frac{11\pi}{6})$，則線段$\overline{AB}$的長度爲何？ (A)$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B)$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C)$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D)$\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$。 代碼：t13106s1 (106 年統測 B)

( ) 31. 已知$\sin\theta=\frac{7}{25}$，$\cos\theta=\frac{-24}{25}$，則$\tan\theta+\sec\theta=$？
(A)$\frac{-4}{3}$ (B)$\frac{-1}{7}$ (C)$\frac{1}{7}$ (D)$\frac{4}{3}$。 代碼：t14106s1 (106 年統測 B)

( ) 32. 已知ΔABC三內角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的對應邊長分別爲a、b、c。若$a=\sqrt{2}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}-1$，則最大內角的角度爲何？
(A)$105°$ (B)$120°$ (C)$135°$ (D)$150°$。 代碼：t31106s1 (106 年統測 B)

( ) 33. 若$\tan\theta\csc\theta=-1+6\cos\theta$，其中$\theta$爲第三象限角，則$\tan\theta=$？
(A)$2\sqrt{2}$ (B)$\sqrt{3}$ (C)$-\sqrt{3}$ (D)$-2\sqrt{2}$。 代碼：t15106k1 (106 年統測 C)

( ) 34. 求$\sin^2 18°+\sin^2 36°+\sin^2 54°+\sin^2 72°+\sin^2 90°=$？
(A)2 (B)2.5 (C)3 (D)3.5。 代碼：t14106k1 (106 年統測 C)

( )35. 設三角形的三邊長爲7、24、25，其內切圓半徑爲r，外接圓半徑爲R，求$\frac{r}{R}=$？ (A)0.12 (B)0.24 (C)0.25 (D)0.48。 代碼：t32106k1 (106 年統測 C)

( ) 36. 若$\sin\theta=\frac{33}{65}$，且$\tan\theta=\frac{-33}{56}$，則$\theta$爲哪一象限角?
(A)第一象限角 (B)第二象限角 (C)第三象限角 (D)第四象限角。 代碼：t12107s1 (107 年統測 B)

( ) 37. 若 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，則 $\tan\theta+\sec\theta=?$
(A) $\frac{12}{35}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{35}{12}$。
代碼：t12107s2 (107 年統測 B)

( ) 38. 若 $\tan\theta=\frac{8}{15}$，則 $\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sec^2\theta=?$
(A) $\frac{514}{225}$ (B) $\frac{38}{15}$ (C) $\frac{64}{225}$ (D) $\frac{49}{625}$。
代碼：t13107s1 (107 年統測 B)

( ) 39. $\cos 0°+\cos 10°+\cos 20°+\cos 30°+\cdots+\cos 350°+\cos 360°=?$
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。
代碼：t13107k1 (107 年統測 C)

( ) 40. 設三角形三邊長分別爲 5、6、7，若三角形面積爲 A，內切圓半徑爲 r，則 $A\cdot r=?$ (A) 24 (B) 35 (C) 105 (D) 210。
代碼：t32107k1 (107 年統測 C)

( ) 41. 假設分針原始指在時鐘12的位置，現將分針依順時針的方向轉了 2019°。試問下列敘述何者正確?
(A)分針指在9跟10之間 (B)分針指在7跟8之間
(C)分針指在5跟6之間 (D)分針指在3跟4之間。
代碼：t11108s1 (108 年統測 B)

( ) 42. 若 $a=\sin\theta$，則下列敘述何者恆爲正確?
(A) $\sin(\theta+90°)=a$ (B) $\cos(\theta+90°)=a$
(C) $\sin(\theta+180°)=-a$ (D) $\cos(\theta+180°)=-a$。
代碼：t13108s1 (108 年統測 B)

( ) 43. 當角度 θ 由 15° 上升至 75° 時，關於 $\tan\theta$ 之值的變化，下列敘述何者正確?
(A)一直上升 (B)一直下降 (C)先上升後下降 (D)先下降後上升。
代碼：t15108s1 (108 年統測 B)

( ) 44. 已知扇形面積爲1且其周長爲 5，試問此扇形的半徑爲何?
(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2。
代碼：t11108k1 (108 年統測 C)

( ) 45. 若點 $P(x,y)$ 爲有向角 θ 終邊上一點且 $xy\neq 0$，則下列何者正確?
(A) $x\sin\theta>0$ (B) $y\cos\theta>0$ (C) $x\cot\theta>0$ (D) $y\csc\theta>0$。
代碼：t12108k1 (108 年統測 C)

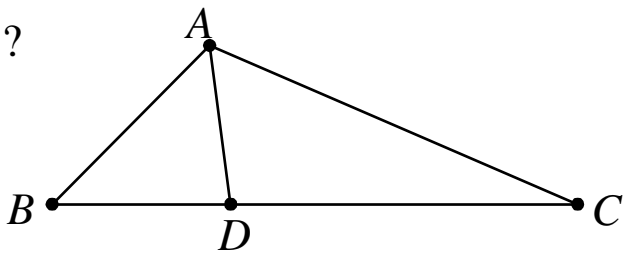
( ) 46. 若θ爲一個標準位置角，且由計算器得知$\sin\theta$及$\cos\theta$都小於0，則θ在哪個象限？
(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限 。
代碼：t12109s1 (109 年統測 B)

( ) 47. 若θ爲第二象限角，且$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，則$\cos\theta=$？
(A)$\dfrac{-3}{4}$ (B)$\dfrac{-\sqrt{5}}{4}$ (C)$\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ (D)$\dfrac{3}{4}$ 。
代碼：t12109s2 (109 年統測 B)

( ) 48. 若$a=\tan 480°$，$b=\sec 135°$，$c=\cos(-60°)$，則下列有序數對何者在第二象限？ (A)(b,c) (B)(a,b) (C)(c,a) (D)(c,b) 。
代碼：t15109k1 (109 年統測 C)

( ) 49. 設函數$f(x)=2\cos 3x-1$，$x\in[0,2\pi]$，若其圖形和x軸的交點個數與函數的最大值分別爲a、b，則$ab=$？ (A)6 (B)9 (C)12 (D)18 。
代碼：t15109k2 (109 年統測 C)

( ) 50. 在ΔABC中，若$\angle A$之內角平分線交$\overline{BC}$於D，其中$\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=6$，且$\angle A=120°$，如圖(二)，則$\overline{CD}=$？
(A)$\sqrt{26}$ (B)$3\sqrt{3}$
(C)$2\sqrt{7}$ (D)$\sqrt{7}$ 。



代碼：t31109k1 (109 年統測 C)

( ) 51. 若下列四個選項中，其中有三個互爲同界角，則下列何者不是另外三個選項的同界角？(A)$-\dfrac{9}{5}\pi$ (B)$-36°$ (C)$\dfrac{\pi}{5}$ (D)$1116°$ 。
代碼：110tcb04 (110 年統測 B)

( ) 52. 已知$\tan\theta=\dfrac{7}{25}$。若$\sin\theta\cos\theta=a$，則下列何者正確？
(A)$\dfrac{1}{2}<a<1$ (B)$0<a<\dfrac{1}{2}$ (C)$-\dfrac{1}{2}<a<0$ (D)$-1<a<-\dfrac{1}{2}$ 。
代碼：110tcb14 (110 年統測 B)

( ) 53. 若$\tan\theta+\sec\theta=5$，則$\tan\theta-\sec\theta=$？
(A)$-\dfrac{3}{5}$ (B)$-\dfrac{1}{5}$ (C)$\dfrac{1}{5}$ (D)$\dfrac{3}{5}$ 。
代碼：110tcc02 (110 年統測 C)

( ) 54. $\sin 10°\cos 10°\cos 50°-\sin 25°\cos 25°\cos 20°=$？
(A)$\dfrac{1}{2}$ (B)$\dfrac{1}{4}$ (C)$-\dfrac{1}{4}$ (D)$-\dfrac{1}{2}$ 。
代碼：110tcc03 (110 年統測 C)

( ) 55. 已知ΔABC中，a、b、c分別爲$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$之對邊長。若$ab:bc:ca=3:4:6$，則$\sin A:\sin B:\sin C=$？
(A)4：3：2 (B)4：2：3 (C)2：3：4 (D)3：2：4 。
代碼：110tcc14 (110 年統測 C)

( ) 56. 下列敘述何者正確？ 代碼：110tcc18 (110 年統測 C)

(A) $y=\tan\frac{\theta}{3}$ 的週期爲 $\frac{\pi}{3}$

(B) $\tan^2\theta-\sec^2\theta=1$

(C) $-\sqrt{2}\le\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{2}$

(D)若 $\cos\theta=\sin\theta$，則 $\theta=\frac{\pi}{4}+2n\pi$，其中 n 爲整數 。

( ) 57. 若 $P(-99,87)$ 是標準位置角 θ 終邊上的點， 代碼：111tcb09 (111 年統測 B)
則點 $Q(5\sin\theta-6\cos\theta,7\cos\theta+8\tan\theta)$ 落在第幾象限？
(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限(D)第四象限 。

( ) 58. 在 ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=2$、$\overline{AC}=2\sqrt{3}$ 且其面積爲3，則 $\overline{BC}$ 可能之值 代碼：111tcb13 (111 年統測 B)
爲何？(A) $\sqrt{16-4\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{16-2\sqrt{3}}$
(C) $\sqrt{16+2\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{16+3\sqrt{3}}$ 。

( ) 59. 甲生在某次實驗中描繪出下圖 (一)， 代碼：111tcb14 (111 年統測 B)
是 $y=a\sin(bx)+c,0\le x\le 4\pi$ 的曲線圖形，圖中所示 A、B、C、D 四點分別是左端點、最高點、最低點、右端點。若它們的坐標分別爲 $A(0,3)$、$B(\pi,5)$、$C(3\pi,1)$、$D(4\pi,3)$，
則 $a+2b+c=$？
(A)4 (B)5 (C)6 (D)7 。

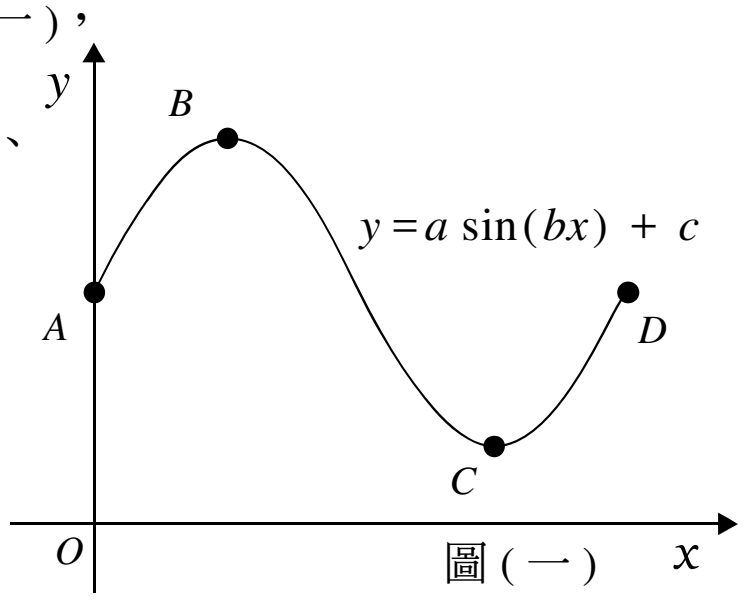


圖 (一)

( ) 60. 一圓形時鐘上的分針是 8 公分，時針是 5 公分， 代碼：111tcb20 (111 年統測 B)
兩針的一端點固定在圓心上。試問 2 點的時候，時鐘上分針與時針的端點 (如示意圖 (二)中的 $\overline{HM}$)間距離爲下列何者？
(A)5 公分 (B)6 公分 (C)7 公分 (D)8 公分 。

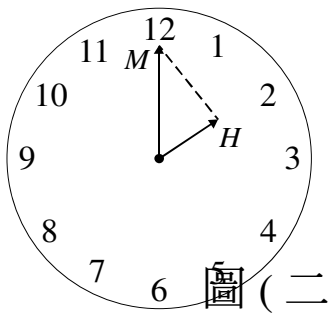


圖 (二)

( ) 61. 下列何者錯誤？ 代碼：111tcc04 (111 年統測 C)

(A) $y=|\sin 2x|$ 之週期爲 $\frac{\pi}{2}$ (B) $y=3\sin x$ 之週期爲 2π

(C) $y=\cos 2x$ 之週期爲 $\frac{\pi}{2}$ (D) $y=4\cos x$ 之週期爲 2π 。

( ) 62. 已知 ΔABC 中，a、b、c 分別爲 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 之對邊長。 代碼：110tcc14 (110 年統測 C)
若 $ab:bc:ca=3:4:6$，則 $\sin A:\sin B:\sin C=$？
(A)4：3：2 (B)4：2：3 (C)2：3：4 (D)3：2：4 。

工職數學金箍棒總複習

(　　) 63. 若ΔABC三邊長爲 4、5、6，則其外接圓直徑爲何？
(A)$\frac{8}{\sqrt{7}}$　(B)$\frac{12}{\sqrt{7}}$　(C)$\frac{16}{\sqrt{7}}$　(D)$\frac{20}{\sqrt{7}}$　。

代碼：111tcc22
(111 年統測 C)

(　　) 64. 已知ΔABC的面積爲$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，其中$\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=2$，且$\angle BAC$爲鈍角。若$\overline{BC}$的長度爲a，則$a^2=$？
(A)$13-6\sqrt{2}$　(B)$13-2\sqrt{6}$　(C)$13+2\sqrt{6}$　(D)$13+6\sqrt{2}$　。

代碼：111tcc23
(111 年統測 C)

答案：　CDAAD　BBCBD　DCCAC　AACCB　BCDBD　BCBAA　ACACB　BCABA
BCADD　CAAAC　BBBCD　CDACC　CDCD

2-42

綜合練習

( ) 1. 設標準位置角$\theta=10^\circ$，則下列何者正確？ 代碼：t11105w1
(A)100°跟θ在同一象限內 (B)100°是θ的一個同界角
(C)θ爲$\frac{\pi}{18}$弧度 (D)圓心角爲θ且半徑爲1的扇形之弧長爲10。

( ) 2. 設直角ΔABC，$\angle C=90^\circ$。若$\tan A=\frac{n}{m}$，其中$m>0$，$n>0$， 代碼：t12099w2
則下列何者正確？ (A)$\cot A=-\frac{n}{m}$ (B)$\cos A=\frac{n}{m^2+n^2}$
(C)$\sin A=\frac{n}{m^2+n^2}$ (D)$\sec A=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$。

( ) 3. 設角θ終邊上一點P爲$(x,-1)$，且$\cot\theta=3$，試求$\cos\theta=$？ 代碼：t12090k1
(A)$-\frac{3}{\sqrt{10}}$ (B)$-\frac{1}{10}$ (C)$-\frac{\sqrt{10}}{3}$ (D)$\frac{3}{\sqrt{10}}$。

( ) 4. 下列何者正確？ 代碼：t12087x1
(A)$\sin\frac{17\pi}{3}>0$ (B)$\cos\frac{17\pi}{3}>0$ (C)$\tan\frac{17\pi}{6}>0$ (D)$\sec\frac{17\pi}{6}>0$。

( ) 5. $\frac{\sin(\pi-\theta)}{\sin\theta}+\frac{\tan(\frac{3\pi}{2}-\theta)}{\cot(-\theta)}+\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(-\theta)}=$ (A)-1 (B)1 (C)-3 (D)3。 代碼：t13202m1

( ) 6. $\tan(-3\pi+\theta)$之值爲 (A)$-\tan\theta$ (B)$\tan\theta$ (C)$-\cot\theta$ (D)$\cot\theta$。 代碼：t13206m1

( ) 7. 試問下列各函數值，何者與$\cos 800^\circ$的函數值相同？ 代碼：t13098s1
(A)$\sin 100^\circ$ (B)$\sin(-80^\circ)$ (C)$\cos 100^\circ$ (D)$\cos(-80^\circ)$。

( ) 8. 若$\sin 230^\circ=k$，則$\tan 50^\circ=$？ 代碼：t13098k1
(A)$-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ (B)$-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$ (C)$-\sqrt{1-k^2}$ (D)$-\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$。

(　　) 9. 試問在坐標平面上原點至點 $(\sin 15°, \sin 75°)$ 的距離爲何？ 代碼：t14096k1

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D) 1。

(　　) 10. 已知 θ 在第四象限，若 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$，試求 $\sin\theta-\cos\theta=$？ 代碼：t14097s1

(A) $-\frac{\sqrt{14}}{3}$　(B) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{\sqrt{14}}{3}$　(D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

(　　) 11. 設 $0<\theta<\pi$，若 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，則 $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=$？ 代碼：t14099s1

(A) $\sqrt{2}$　(B) $2\sqrt{2}$　(C) $3\sqrt{2}$　(D) $4\sqrt{2}$。

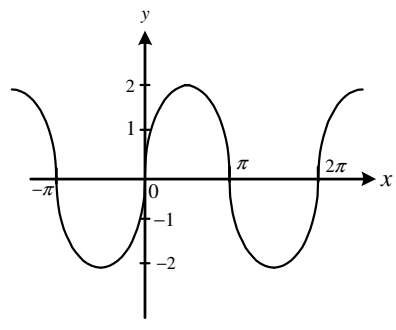
(　　) 12. 設 t 是任意實數，若 $x=\frac{1-\sin^2 t}{1+\sin^2 t}$、$y=\frac{2\sin t}{1+\sin^2 t}$，則 x^2+y^2 之值等於下列何者？　(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3。 代碼：t14101w1

(　　) 13. 設 θ，k 爲實數，若 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 爲方程式 $3x^2+2x+k=0$ 之兩根，則 $k=$？　(A) $-\frac{5}{6}$　(B) $-\frac{5}{12}$　(C) $\frac{5}{6}$　(D) $\frac{5}{12}$。 代碼：t14095k1

(　　) 14. 設 $\cot\alpha$ 和 $\cot\beta$ 爲方程式 $2x^2-3x-6=0$ 的兩根，則 $\cot^2\alpha+\cot^2\beta=$？ 代碼：t14102w1

(A) $-\frac{33}{4}$　(B) $-\frac{15}{4}$　(C) $\frac{15}{4}$　(D) $\frac{33}{4}$。

(　　) 15. 下列哪個方程式所繪製之圖形如右圖所示？ 代碼：t15099p1



(A) $y=2\sin x$　(B) $y=\sin 2x$

(C) $y=2\cos x$　(D) $y=\cos 2x$。

(　　) 16. 下列何者爲三角函數 $y=3\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})$ 的週期？ 代碼：t15095s1

(A) $\frac{2}{3}\pi$　(B) $\frac{3}{2}\pi$　(C) π　(D) 2π。

三角函數 Chapter 2

( ) 17. 設 $0 \le \theta \le \pi$，且 $2\sin^2\theta + 11\cos\theta - 7 = 0$，則 $\theta =$？ 代碼：t15093k1

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$。

( ) 18. 設 $0 \le x \le 2\pi$，則 $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ 的最大值為何？ 代碼：t15096s1

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $-\frac{1}{2}$。

( ) 19. 設 $0 \le x \le 2\pi$，試問函數 $f(x) = \sin^2 x - 2\cos x + 2$ 之最大值為何？ 代碼：t15095k1

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5。

( ) 20. 下列關係何者正確？ 代碼：t15096k1

(A) $\sec 47° > \tan 47° > \sin 47°$ (B) $\tan 47° > \sec 47° > \sin 47°$

(C) $\sec 47° > \sin 47° > \tan 47°$ (D) $\tan 47° > \sin 47° > \sec 47°$。

( ) 21. 下列選項何者為真？ (A) $\sin 35° > \cos 35°$ (B) $\sin 65° > \cos 65°$ 代碼：t15097s1

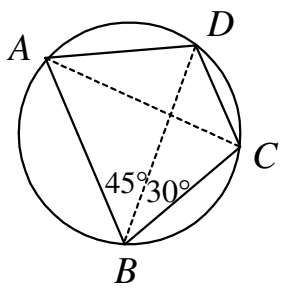
(C) $\sin 35° < \cos 65°$ (D) $\sin 65° < \cos 35°$。

( ) 22. 下列各三角函數值，何者數值最小？ 代碼：t15099k1

(A) $\sin 885°$ (B) $\cos(-430°)$ (C) $\tan 131°$ (D) $\sin(-2010°)$。

( ) 23. 如右圖，$ABCD$ 為圓內接四邊形，若 $\angle DBC = 30°$，$\angle ABD = 45°$，$\overline{CD} = 6$，則 $\overline{AD} =$ 代碼：s13095c1

(A) $6\sqrt{2}$ (B) $3\sqrt{6}$ (C) $3\sqrt{2}$ (D) $6\sqrt{3}$。


A
D
C
B
45°
30°

( ) 24. 設點 O 是 ΔABC 的外接圓圓心，且在 ΔABC 的內部，$\overline{AB}$ 的長度為 m，$\overline{AC}$ 的長度為 n。若 $\angle AOB = 120°$，$\angle BOC = 150°$，則 $\frac{m}{n} =$？ 代碼：t31104w1

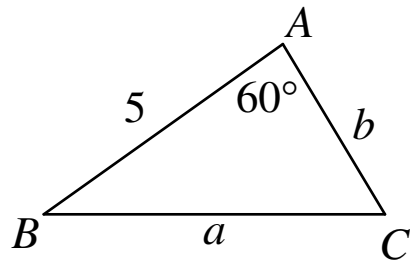
(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$。

( ) 25. 已知 ΔABC 中，$\overline{AB} = 4$、$\overline{AC} = 5$、$\overline{BC} = 6$，則 $\sin A =$？ 代碼：t31093k1

(A) $-\frac{\sqrt{63}}{8}$ (B) $-\frac{7}{8}$ (C) $\frac{7}{8}$ (D) $\frac{\sqrt{63}}{8}$。

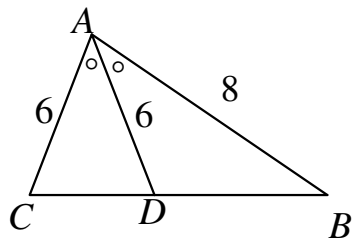
2-45

( ) 26. 已知ΔABC中，$\angle A=60°$，$\overline{AB}=5$，$a+b=7$，如圖，則$a=$？ (A)$\frac{8}{3}$ (B)3 (C)4 (D)$\frac{13}{3}$。 代碼：t31103w1



( ) 27. 已知圓內接四邊形的各邊長爲$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=4$，則對角線$\overline{BD}$的長度爲 (A)$\frac{\sqrt{355}}{5}$ (B)$\frac{\sqrt{385}}{5}$ (C)6 (D)7。 代碼：s13086c1

( ) 28. 如右圖，ΔABC中，$\overline{AC}=6$，$\overline{AB}=8$，且$\angle A$之角平分線爲$\overline{AD}$，$\overline{AD}=6$則$\overline{BC}=$？ (A)1 (B)3 (C)5 (D)7。 代碼：s13208m1



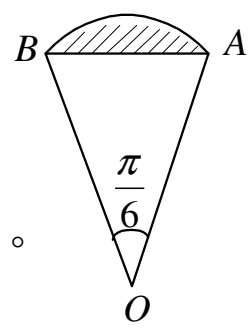
( ) 29. ΔABC三內角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$之對應邊長分別爲a,b,c，若$a=2\sqrt{3}$，$b=2$，$\angle A=120°$，則$c=$? (A)$\sqrt{3}$ (B)2 (C)3 (D)$2\sqrt{3}$。 代碼：t31091k2

( ) 30. 已知ΔABC中，$\angle BCA=120°$，$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=5$，且D在$\overline{AB}$上。若$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，則$\overline{CD}=$？ (A)$\frac{5\sqrt{3}}{14}$ (B)$\frac{15\sqrt{3}}{14}$ (C)$\frac{35\sqrt{3}}{2}$ (D)$\frac{105\sqrt{3}}{2}$。 代碼：t32104w1

( ) 31. 在鈍角三角形ΔABC中，設a,b,c分別爲$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的對邊長，若$\angle A=30°$，且$a:b=1:\sqrt{3}$，則$\angle C=$? (A)30° (B)60° (C)120° (D)150°。 代碼：t31094k3

( ) 32. 有一繩子的長度是24公分，若圍成正三角形的面積爲a平方公分，圍成正方形的面積爲b平方公分，圍成正六邊形的面積爲c平方公分，則下列何者正確？ (A)$a<b<c$ (B)$a<c<b$ (C)$c<a<b$ (D)$c<b<a$。 代碼：t32095k1

( ) 33. 設一扇形AOB的半徑爲8，圓心角爲$\frac{\pi}{6}$，則所圍弓形區域(如右圖)，斜線部分)的面積爲 (A)$16\pi-16$ (B)$\frac{16}{3}\pi-16$ (C)$32\pi-32$ (D)$\frac{32}{3}\pi-32$。 代碼：t32088f1



( ) 34. 在ΔABC中，若D在$\overline{AC}$上且$\overline{AD}:\overline{DC}=1:2$，$\angle BAD=30°$，$\angle BDC=60°$，$\angle DCB$的角度爲何？ (A)30° (B)45° (C)60° (D)75° 代碼：t31099k1

(　　) 35. 在ΔABC中，已知$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$之對應邊長分別爲a、b、c，$\angle B=120°$，$a=6$，則下列選項何者正確？ (A)$0<b-c<3$ (B)$3<b-c<6$ (C)$6<b-c<9$ (D)$9<b-c<12$。 代碼：t31096k1

(　　) 36. 周長爲36且三邊長均爲正整數之所有三角形中，邊長的最大值爲何？ (A)21 (B)18 (C)17 (D)15。 代碼：t31094k2

答案：CDABB BDBDA BBADA CBBCA BCADD DBDBB AABAB C

筆記欄

單元 3　向量

主題一　向量的意義、加減法與實數積

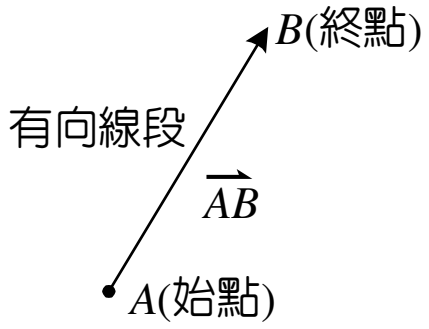
向量概念引入：

(1) **向量的物理意義**：

純量：一般而言我們在日常生活中所用的量，大多是純量。
例如：身高、體重、長度、…等，這些只考慮大小的量，稱為純量。

向量：除了『大小』之外還包含『方向』雙重觀念的物理量。
例如：位移、作用力、速度、加速度…等。
位移：某人從甲地朝西北方前進 30 公里到達乙地。
作用力：某人以大小 $10F$ 的水平作用力向右邊拉動一物體。
速度：颱風以每小時 15 公里的速度朝西北西方向移動。

(2) **有向線段與向量**：



有向線段：
將線段 $\overline{AB}$ 賦予『由 A 指向 B』的方向，
稱為『由 A 到 B 的有向線段』，以 $\overrightarrow{AB}$ 表示。
其中 A 稱為始點，B 稱為終點。

向量：
以 A 為始點，B 為終點的有向線段稱為向量，以符號 $\overrightarrow{AB}$ 表示。
其中向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小就是 $\overline{AB}$ 的長度，記作 $|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}$。
註：通常以小寫英文字母來簡記向量，即 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ …等表示不同之向量，如：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$。

老師講解 1

(1) 正五邊形 $ABCDE$ 的邊可以形成幾個不同的向量？
(2) 正六邊形 $ABCDEF$ 的邊可以形成幾個不同的向量？

學生練習 1

正八邊形的 8 個邊可以形成幾個不同的向量？
【代碼】a71271m1

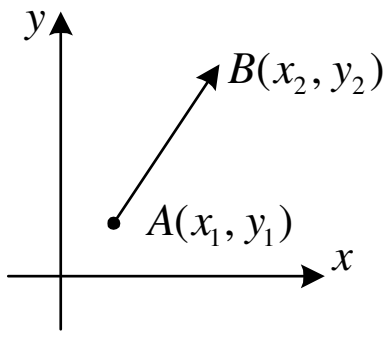
1.向量的坐標表示法：

(1) **定義**：坐標平面上二點 $A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$ ，則

① $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

② $\overrightarrow{AB}$ 長度 $=|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

③ $\overrightarrow{AB}$ 之單位向量 $=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ (單位向量表長度為1之向量)



註：若向量 $\overrightarrow{a}$ 與向量 $\overrightarrow{b}$ 的大小相等，方向相反，則此兩向量互稱為『逆向量』，
記作 $\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{b}$

老師講解 2

已知 $P(-1,7)$ ， $Q(2,3)$ 求下列各式：

(1) $\overrightarrow{PQ}$　　(2) $\overrightarrow{QP}$

(3) $|\overrightarrow{PQ}|$　　(4) $|\overrightarrow{QP}|$

(5) $\overrightarrow{PQ}$ 之單位向量。

學生練習 2

(1) 設 $A(-4,3)$ 、 $B(2,4)$ ，試求 $\overrightarrow{AB}$ 。

(2) 平面上 A 、 B 二點 $A(2,3)$ ， $B(7,15)$ ，
求 $\overrightarrow{AB}$ 之單位向量。

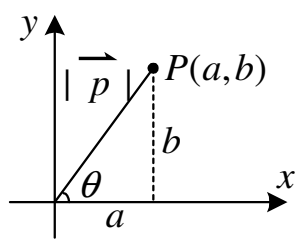
【代碼】a71a01m2

2.方向角：

設 P 點坐標為 (a,b) ，則 $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{OP}=(a,b)$ ，

亦即 $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{OP}=(a,b)=(|\overrightarrow{p}|\cos\theta,|\overrightarrow{p}|\sin\theta)$

故任一向量 $\overrightarrow{p}$ 可由其長度 $|\overrightarrow{p}|$ 與方向角 θ 來表示



3 老師講解

(1) 設 $A(4,3)$ 、 $B(2,5)$ ，
求 $\overrightarrow{AB}$ 的大小及方向角。

(2) 已知向量 $\overrightarrow{p}=(-2,-2\sqrt{3})$ ，
試求 $\overrightarrow{p}$ 的大小及方向角。

(3) 已知向量 $\overrightarrow{a}$ 的方向角爲 $\dfrac{5\pi}{3}$ ，
且 $|\overrightarrow{a}|=6$ ，試求向量 $\overrightarrow{a}$ 。

3 學生練習

(1) 設 $A(1,3)$ 、 $B(2,3+\sqrt{3})$ ，
求 $\overrightarrow{AB}$ 的大小及方向角。

(2) 已知向量 $\overrightarrow{p}=(-2\sqrt{3},2)$ ，
試求 $\overrightarrow{p}$ 的大小及方向角？

(3) 已知向量 $\overrightarrow{a}$ 的方向角爲 $\dfrac{3\pi}{4}$ ，
且 $|\overrightarrow{a}|=2\sqrt{2}$ ，試求向量 $\overrightarrow{a}$ 。

【代碼】a71a02m2

3. 向量相等：

設 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$ ， $\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$ ；若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}$ $\Leftrightarrow$ $x_1=x_2$ ， $y_1=y_2$

4 老師講解

$A(a,4)$ ， $B(5,b)$ ， $C(3,-a)$ ， $D(6,-1)$
爲相異四點，且 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ ，則 $a+b$ 之值。

4 學生練習

設 $A(-3,2)$ ， $B(2,5)$ ， $C(-1,-2)$ 爲平面上三點，已知 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ，求 D 點坐標。

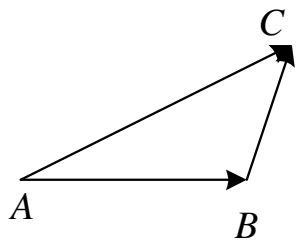
【代碼】a71a03m2

4.運算：

(1) **向量的加法：**

如右圖(一)所示，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

設 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1)$、$\overrightarrow{BC}=(x_2,y_2)$，則 $\overrightarrow{AC}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$。

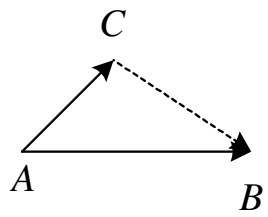


(圖一)

(2) **向量的減法：**

如右圖(二)所示，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

設 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1)$、$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)$，則 $\overrightarrow{CB}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$。



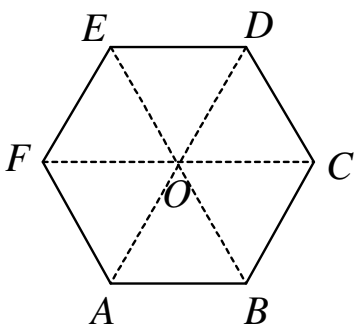
(圖二)

(3) **零向量：** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$

5 老師講解

如下圖，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{b}$，求：

(1) $\overrightarrow{BC}$　(2) $\overrightarrow{AC}$　(3) $\overrightarrow{AE}$

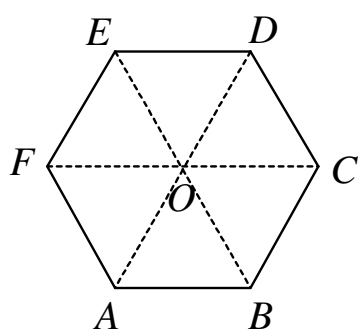


5 學生練習

如下圖，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{b}$，求：

(1) $\overrightarrow{AD}$　(2) $\overrightarrow{FD}$

【代碼】a71a03m3



(4) **實數積：**

設 $\overrightarrow{a}=(x,y)$，$r\in R$，則 $r\overrightarrow{a}=(rx,ry)$

當 $r>0$ $\Rightarrow$ 方向相同，大小 r 倍

當 $r<0$ $\Rightarrow$ 方向相反，大小 $|r|$ 倍

6 老師講解

已知 $P(-1,7)$，$Q(2,3)$，$R(-2,3)$，試求：

(1) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RP}$　(2) $3\overrightarrow{PQ}-2\overrightarrow{RP}$

6 學生練習

若 $A(2,3)$，$B(-4,7)$ 及 $C(x,y)$ 爲平面上三點，且 $2\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{AC}$，求 $C(x,y)$ 爲何？

【代碼】a71a04m3

7 老師講解

平面上三向量 $\overrightarrow{a}=(1,4)$，$\overrightarrow{b}=(1,-7)$，$\overrightarrow{c}=(-1,29)$，若二實數 α、β 滿足 $\overrightarrow{c}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}$，求 $2\alpha+\beta$ 之值。

7 學生練習

已知有三向量 $\overrightarrow{a}=(-1,-2)$，$\overrightarrow{b}=(3,4)$，$\overrightarrow{c}=(-5,-8)$，若二實數 α、β 滿足 $\overrightarrow{c}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}$，求 $\alpha+\beta$ 之值。

【代碼】a71b02m2

8 老師講解

平面上 ΔABC，已知 $\overrightarrow{AB}=(3,4)$，$\overrightarrow{AC}=(5,12)$，試求 ΔABC 之周長。

8 學生練習

平面上有 A、B、C 三點，已知由 A 至 B 的向量 $\overrightarrow{AB}=(5,-12)$，由 B 至 C 的向量 $\overrightarrow{BC}=(-3,4)$，試求以此 A、B、C 三點爲頂點之 ΔABC 之周長。

【代碼】a71b03m2

9 老師講解

平面上向量 $\overrightarrow{a}=(-1,2)$，$\overrightarrow{b}=(-3,-4)$，則 $|t\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$ 之最小值爲？

9 學生練習

已知向量 $\overrightarrow{a}=(1,-2)$，$\overrightarrow{b}=(0,5)$，則 $|t\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$ 之最小值爲？

【代碼】a71b07m2

5. 向量平行與垂直：

設 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$；若：

(1) $\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$　　(2) $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

10 老師講解

設 $\overrightarrow{i}=(1,0)$，$\overrightarrow{j}=(0,1)$，

且 $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{B}=5\overrightarrow{i}+m\overrightarrow{j}$，

$\overrightarrow{C}=3\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{D}=n\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}$，

若 $\overrightarrow{A}//\overrightarrow{B}$ 且 $\overrightarrow{C}\perp\overrightarrow{D}$，則 $m+n=$？

10 學生練習

設 $\overrightarrow{i}=(1,0)$，$\overrightarrow{j}=(0,1)$，且

$\overrightarrow{A}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$、$\overrightarrow{B}=\overrightarrow{i}+a\overrightarrow{j}$，

若 $\overrightarrow{A}\perp\overrightarrow{B}$，則 a 爲

【代碼】a71a05m2

11 老師講解

已知平面上三點 $A(1,3)$，$B(3,k)$，$C(5,1)$，

若向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，則 $k=$？

11 學生練習

設向量 $\overrightarrow{a}=(-3,1)$、$\overrightarrow{b}=(2,3)$，若

$m\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 平行，試求 m 之值。

【代碼】a71b04m2

12 老師講解

若 $A(1,2)$，$B(5,5)$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 反向，

且 $|\overrightarrow{a}|=3$，求 $\overrightarrow{a}$ 之值。

12 學生練習

若 $A(3,2)$，$B(-1,5)$，$\overrightarrow{a}=(x,y)$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 反向，

且 $|\overrightarrow{a}|=2$，求 $3x+4y$ 之值。

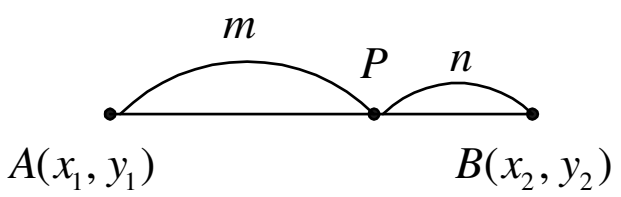
【代碼】a71b05m2

6.分點公式與向量應用：

(1) 分點公式：

已知 $A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2\ ,\ y_2)$ 且點 $P(x,y)\in\overline{AB}$ ，

即 $A-P-B$ (如圖)，若 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$ ，

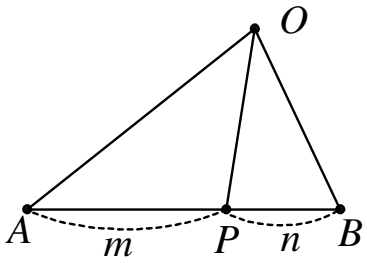


則 $P:\begin{cases} x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n} \\ y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n} \end{cases}$

(2) 向量分點公式：

在 ΔOAB 中，若 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$ ，

則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$



13 老師講解

在 ΔOAB 中， P 在 $\overline{AB}$ 上，

且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:4$ ，若 $\overrightarrow{OP}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$ ，

求 $r,s=$ ？

13 學生練習

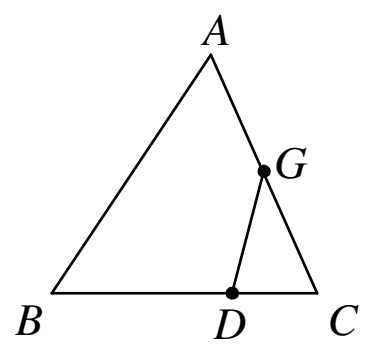
在 ΔABC 中， P 在 $\overline{BC}$ 上， $\overline{BP}:\overline{PC}=2:5$ ，

若 $\overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ ，求 $r,s=$ ？

【代碼】a71a06m2

【加強題】

1. 如圖所示， $\overline{AG}=\overline{GC}$ ， $\overline{CD}:\overline{DB}=1:2$ ，若 $\overrightarrow{GD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ ，則數對 $(x,y)=$ _____ 。



【學生練習答案】

1. 8	2. (1) $(6,1)$ (2) $(\frac{5}{13},\frac{12}{13})$	3. (1) 2 ； $\theta=60°$ (2) 4 ； $\theta=150°$ (3) $(-2,2)$	
4. $(4,1)$	5. (1) $2(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$ (2) $2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$		6. $(14,-5)$
7. 1	8. $18+2\sqrt{17}$	9. $\sqrt{5}$	10. 2
11. -1	12. 0	13. $r=\frac{5}{7}$ $s=\frac{2}{7}$	

回家功課

( ) 1. 已知 $A(2,-3)$，$B(0,1)$，$C(-2,7)$，$D(-1,-2)$，若 $\vec{a}=2\overrightarrow{DA}-3\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$，且 $\vec{a}$ 之坐標為 (p,q)，則 $3p-q$ 之值為
(A) -2 (B) 0 (C) 2 (D) 4 。
代碼：a71207m1

( ) 2. 若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 為平面上之三個向量且 $\vec{a}=(\cos 30^\circ,\sin 30^\circ)$、$\vec{b}=(\cos 150^\circ,\sin 150^\circ)$、$\vec{c}=(\cos 270^\circ,\sin 270^\circ)$，試求 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=$？
(A) $(1,0)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,1)$ (D) $(0,0)$ 。
代碼：a71095k1

( ) 3. 已知平面上 $A(1,2)$、$B(2,-1)$、$C(a,b)$ 三點共線，且 $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$，則 $a+b=$？
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 。
代碼：a71102p1

( ) 4. 平面上有 $A(1,3)$，$B(8,-6)$，$C(-2,4)$ 三點，且 O 為原點，若 $\overrightarrow{OB}=\ell\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OC}$，則 $\ell\cdot m$ 之值為
(A) -8 (B) 8 (C) -5 (D) -6 。
代碼：a71088z1

( ) 5. 設向量 $\overrightarrow{a}=(2,-1)$、$\overrightarrow{b}=(m,3)$，若 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 平行，試求 $m=$
(A) -8 (B) 8 (C) -5 (D) -6 。
代碼：a71b04m1

( ) 6. 已知在 ΔABC 中，向量 $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$，$\overrightarrow{AC}=(4,3)$，求 $\overline{BC}$ 之長為何？
(A) 5 (B) $2\sqrt{10}$ (C) $5\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{5}$ 。
代碼：a71224m1

( ) 7. 已知 $A(1,-1)$ 與 $B(-2,3)$ 為平面上的兩點，設長度為 3 的向量 $\vec{v}=(a,b)$ 與向量 $\overrightarrow{AB}$ 同方向，則 $2a+b=$？
(A) -3 (B) $-\frac{6}{5}$ (C) $\frac{6}{5}$ (D) 3 。
代碼：a71093k1

( ) 8. 若 $\vec{a}=(\sin\theta+\cos\theta,\sin\theta-\cos\theta)$，試求 $|\vec{a}|$ 的值。
(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2 。
代碼：a71b01m1

答案：ADCDD CBB

主題二　向量的內積與夾角

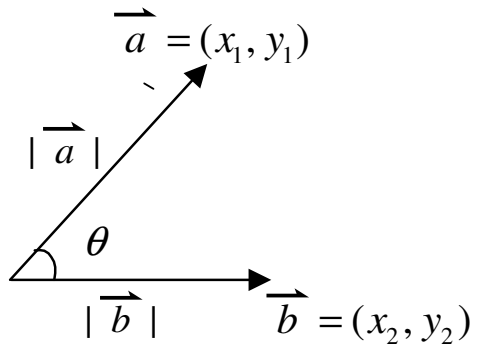
1.定義：

$\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$，其夾角為$\theta$，$0°\le\theta\le180°$，

則$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$之內積以$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$表示。

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=x_1x_2+y_1y_2$　　(坐標式)

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$　(幾何式)



1 老師講解

設$\overrightarrow{A}=(-3,1)$、$\overrightarrow{B}=(-2,-3)$、$\overrightarrow{C}=(2,-1)$，

試求：(1) $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}$　(2) $(2\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B})\cdot(\overrightarrow{B}-2\overrightarrow{C})$

1 學生練習

設$\overrightarrow{U}=(5,2)$，$\overrightarrow{V}=(2,-3)$二向量，

試求$(3\overrightarrow{U}+2\overrightarrow{V})\cdot(5\overrightarrow{U}-\overrightarrow{V})$之值。

【代碼】a72a01m2

2 老師講解

設$|\overrightarrow{a}|=5$，$|\overrightarrow{b}|=6$，$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的夾角

爲$30°$，試求$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$的值。

2 學生練習

ΔABC中，已知$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，

且$\angle A=120°$，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$之值。

【代碼】a72a01m3

3 老師講解

正 ΔABC 邊長爲 6，求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

3 學生練習

正 ΔABC 邊長爲 8，求：

(1) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$　　(2) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$

【代碼】a72b01m2

4 老師講解

已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=9$，求下列各內積：

(1) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$　　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$。

4 學生練習

ΔABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=6$，試求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 之值。

【代碼】a72b02m2

2. 應用：

設兩向量 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$，其夾角為 θ，$0°\le\theta\le180°$，

(1) $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0 \Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

(2) $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$

(3) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2$

證：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{a}|\cos0°=|\overrightarrow{a}|^2$

(4) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

證：$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=|\overrightarrow{a}|^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

5 老師講解

設 $\overrightarrow{V}=(-1,1)$，$\overrightarrow{U}=(\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2})$
爲平面上二向量，求此二向量之夾角。

5 學生練習

設 $\overrightarrow{a}=(1,1)$、$\overrightarrow{b}=(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$，
求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角。

【代碼】a72a02m2

6 老師講解

$|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=5$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角 $60°$，求：

(1) $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$　(2) $|\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}|$

6 學生練習

已知 $|\overrightarrow{a}|=3$，$|\overrightarrow{b}|=2$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 夾角爲 θ，且 $\theta=60°$，求 $|2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$ 之值。

【代碼】a72b03m2

7 老師講解

若 $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=5$，$|2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{21}$，試求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 夾角。

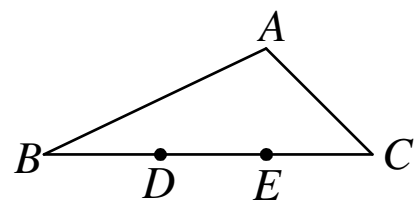
7 學生練習

若 $|\overrightarrow{a}|=3$，$|\overrightarrow{b}|=2$，$|\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}|=\sqrt{37}$，試求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 夾角。

【代碼】a72b04m2

【加強題】

1. 右圖 ΔABC 中，$\angle BAC=120°$，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=1$，D、E 兩點三等分 $\overline{BC}$，則內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=$ _____。



2. 若 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 爲非零向量，$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $2\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b}$ 垂直，且 $|\overrightarrow{a}|=2|\overrightarrow{b}|$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角 = _____。

【學生練習答案】

1. 437	2. -6	3. (1) 32　(2) -32	4. $\frac{11}{2}$
5. $30°$	6. $2\sqrt{7}$	7. $120°$	

回家功課

( ) 1. 在坐標平面上，點 A 、 B 、 C 的坐標分別為 $(-1,k)$ 、 $(1,2)$ 、 $(1,1)$ ，若向量 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 的內積為 0 ，則 $k=$ ？
(A) -1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 。
代碼：a72096k1

( ) 2. 設 $\vec{u}$ ，$\vec{v}$ 為平面二個單位向量，若其內積為 $\frac{1}{2}$ ，則 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 之夾角為何？
(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 120° 。
代碼：a72097k1

( ) 3. 設平面上有兩向量 $\vec{A}=<6,4>$ ，$\vec{B}=<5,-1>$ ，求向量 $\vec{A}$ 與向量 $\vec{B}$ 的夾角？
(A) $30°$ (B) $45°$ (C) $60°$ (D) $120°$ 。
代碼：a72090k1

( ) 4. 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為平面上的兩個向量，已知 $|\vec{a}|=1$ ，$|\vec{b}|=3$ ，且 $|3\vec{a}-2\vec{b}|=3$ ，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ？
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 。
代碼：a72095k1

( ) 5. $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\vec{O}$ ，$|\overline{OA}|=1$ ，$|\overline{OB}|=2$ ，$|\overline{OC}|=\sqrt{3}$ ，θ 為向量 $\overline{OA}$ ，$\overline{OB}$ 之夾角，則 $\sin\theta=$ ？
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$ 。
代碼：a72214m1

答案：DCBDA

主題三　向量的應用

1. 柯西(舒瓦茲)不等式：

設 a_1，a_2，a_3，……a_n；b_1，b_2，b_3，……$b_n \in R$，

則 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n)^2$

（“=”成立於 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$ 時)

(1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

[當 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$ 時 $a:b=x:y$]

(2) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$

[當 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ 時 $a:b:c=x:y:z$]

1 老師講解

設 $x, y \in R$，已知 $3x^2+4y^2=16$，
試求 $3x-2y$ 的極大值為？

1 學生練習

設 $x, y \in R$，已知 $9x^2+4y^2=20$，
試求 $6x-2y$ 的極小值為？

【代碼】a32a02m2

2 老師講解

設 $x, y \in R$，已知 $2x+3y=14$，
試求 x^2+3y^2 的極小值。

2 學生練習

設 $x, y \in R$，已知 $3x-4y=15$，
試求 x^2+y^2 的極小值為？

【代碼】a32a02m3

3 老師講解

設 $a>0$ 、 $b>0$ ，求 $(9a+b)(\frac{1}{a}+\frac{25}{b})$ 的最小值。

3 學生練習

設 $a>0$ 、 $b>0$ ，求 $(4a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$ 的最小值。

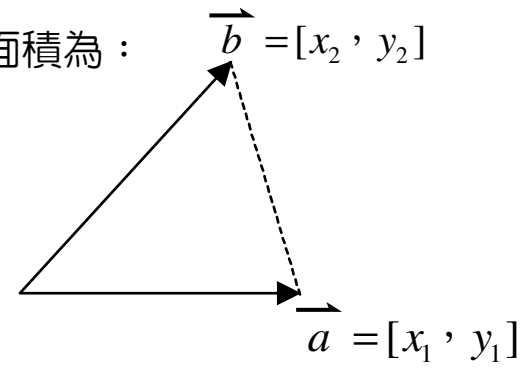
【代碼】a32b03m2

2. 利用向量求三角形面積：

設 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$ ， $\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$ ，則以 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 所成之三角形面積為：

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|$$ 設

(幾何) (坐標)



註：二階行列式的定義

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

例： $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=14-15=-1$

4 老師講解

(1) 設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積爲 2 ，且 $|\overrightarrow{a}|=2$ ， $|\overrightarrow{b}|=3$ ，試求以 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 爲鄰邊所決定的三角形面積。

(2) 設 $\overrightarrow{AB}=(3,4)$ ， $\overrightarrow{AC}=(7,1)$ ，則求 ΔABC 面積。

4 學生練習

(1) 設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積爲 3 ，且 $|\overrightarrow{a}|=2$ ， $|\overrightarrow{b}|=3$ ，試求以 $\overrightarrow{a}$ 、 $\overrightarrow{b}$ 爲鄰邊所決定的三角形面積。

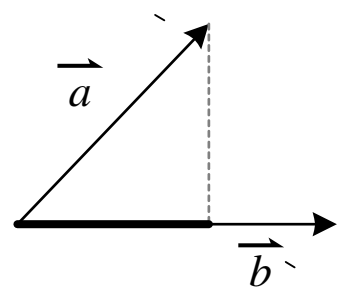
(2) 設 $\overrightarrow{AB}=(-2,5)$ ， $\overrightarrow{AC}=(3,7)$ ，則求 ΔABC 面積。

【代碼】a72a03m2

3.正射影：

① $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影長為 $\left|\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}\right|$

② $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影為 $\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}$



5 老師講解

設 $\overrightarrow{a}=(4,-8)$，$\overrightarrow{b}=(3,4)$，

求 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影長，並求正射影。

5 學生練習

已知 $\overrightarrow{a}=(-2,6)$，$\overrightarrow{b}=(-4,-3)$，

求 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影長及正射影爲？

【代碼】a72a04m2

【加強題】

1. 設 x，y 爲正實數，且 $x+y=16$，則當數對 $(x,y)=$ _____ 時，$\dfrac{9}{x}+\dfrac{25}{y}$ 有最小值爲 _____。

【學生練習答案】

1. -10	2. 9	3. 9	4. (1) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (2) $\dfrac{29}{2}$
5. $(\dfrac{8}{5},\dfrac{6}{5})$			

回家功課

(　　) 1. 已知 x 、 y 均為正數，且 $x^2+y^2=20$ ，則 $3x-y$ 之最大值為 (A) $2\sqrt{10}$ (B) $\sqrt{70}$ (C) 50 (D) $10\sqrt{2}$ 。 代碼：a32207m1

(　　) 2. 已知 x 、 y 皆為自然數，且 $x+3y=20$ ，則 x^2+3y^2 之最小值為 (A) 100 (B) 121 (C) 144 (D) 169 。 代碼：a32209m1

(　　) 3. 設 $xy>0$ ，則 $(x^2+\frac{9}{y^2})(4y^2+\frac{1}{x^2})$ 之最小值為 (A) 49 (B) 36 (C) 7 (D) 6 。 代碼：a32211m1

(　　) 4. 設 $\overrightarrow{a}=(3,4)$ 、 $\overrightarrow{b}=(2,-14)$ ，則 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 設上之正投射影爲 (A) $(4,6)$ (B) $(-6,-8)$ (C) $(-6,-4)$ (D) $(6,8)$ 。 代碼：a72219m1

答案：DAAB

歷屆試題

( ) 1. 設 $A(-13,-19)$，$B(x,y)$ 爲平面上相異兩點。若向量 $\overrightarrow{AB}$ 與向量 $\overrightarrow{u}=(5,12)$ 同方向且 $|\overline{AB}|=26$，則 $3x-4y=$？
(A) -103 (B) -29 (C) 29 (D) 103。
代碼：a71100k1 (100 年統測 C)

( ) 2. 已知兩向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 互相垂直。若 $|\overrightarrow{a}|=4\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=5\sqrt{5}$，則 $|\overrightarrow{b}|=$？ (A) $\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $3\sqrt{5}$ (D) $4\sqrt{5}$。
代碼：a72100k1 (100 年統測 C)

( ) 3. 若 $\overrightarrow{a}=(3+x,4)$、$\overrightarrow{b}=(4,-3)$、$\overrightarrow{c}=(3,1-2y)$ 且 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{c}=(3,1)$ 則 $3x+2y$ 之值爲何？ (A) 5 (B) 2 (C) 1 (D) 0。
代碼：a71101s1 (101 年統測 B)

( ) 4. 已知向量 $\overrightarrow{u}$ 的長度爲 2，向量 $\overrightarrow{v}$ 的長度爲 5，且 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 兩向量夾角爲 $\frac{2\pi}{3}$，則向量 $3\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 的長度爲何？ (A) $\sqrt{11}$ (B) $\sqrt{31}$ (C) $\sqrt{30}$ (D) $\sqrt{21}$。
代碼：a72101s1 (101 年統測 B)

( ) 5. 設向量 $\overrightarrow{u}=(a,2)$，$\overrightarrow{v}=(3,2a)$，$\overrightarrow{w}=(-1,2)$，則下列敘述何者正確？
(A)若 $2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{w}$ 平行，則 $a=-3$ (B)若 $(2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=0$，則 $a=-\frac{5}{2}$
代碼：a72101k1 (101 年統測 C)

( ) 6. 已知平面上五個點 $A(\frac{1}{3},\frac{-1}{4})$、$B(\frac{51}{13},\frac{1}{4})$、$C(\frac{571}{13},\frac{69}{7})$、$D(\frac{-51}{16},\frac{69}{17})$、$E(\frac{-23}{4},\frac{-10}{3})$，若向量相加 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=(m,n)$，求 $m-n$ 之值。
(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3。
代碼：a71102s1 (102 年統測 B)

( ) 7. 設向量 $\overrightarrow{a}=(3,4)$，向量 $\overrightarrow{b}//\overrightarrow{a}$，且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-50$，則 $|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|=$？
(A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80。
代碼：a72102k1 (102 年統測 C)

( ) 8. 設平面上三點 $A(x,y)$，$B(-1,4)$ 及 $C(9,-1)$，若 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，則 D 點坐標爲何？ (A) $(1,5)$ (B) $(3,2)$ (C) $(5,1)$ (D) $(2,3)$。
代碼：a71103s1 (103 年統測 B)

Chapter 3 向 量

( ) 9. 設向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角爲 $60°$，且 $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=1$，則向量 $\overrightarrow{a}$ 和 $(-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})$ 之夾角爲何？ (A) $30°$ (B) $60°$ (C) $90°$ (D) $120°$。 代碼：a72103s1 (103 年統測 B)

( ) 10. 已知平面三向量 $\overrightarrow{a}=(3,4)$，$\overrightarrow{b}=(x,-9)$，$\overrightarrow{c}=(-8,y)$。設 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ 且 $\overrightarrow{b}//\overrightarrow{c}$，則 $y-x$ 之值爲何？ (A) -18 (B) -6 (C) 6 (D) 18。 代碼：a71103k1 (103 年統測 C)

( ) 11. 設二向量 $\overrightarrow{u}=(2\cos\theta,\sin\theta)$，$\overrightarrow{v}=(\sin\theta,2\cos\theta)$ 且其內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=1$，若 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，則 θ 之值可能爲何？ (A) $\frac{\pi}{12}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{3}$。 代碼：a72103k1 (103 年統測 C)

( ) 12. 已知二向量 $\overrightarrow{a}=(1,2)$ 與 $\overrightarrow{b}=(2,3)$，若 $3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}=(r,s)$，則 $s-2r=$？ (A) -2 (B) -1 (C) 2 (D) 3。 代碼：a71104s1 (104 年統測 B)

( ) 13. 已知 k 爲實數，若向量 $\overrightarrow{a}=(1,k+1)$ 與向量 $\overrightarrow{b}=(2k,3)$ 的內積爲 18，則 $k=$？ (A) -1 (B) 1 (C) 3 (D) 5。 代碼：a72104s1 (104 年統測 B)

( ) 14. 已知平面上四點坐標爲 $A(57,23)$、$B(7,-2)$、$C(5,12)$、$D(x,y)$。若向量 $\overrightarrow{AD}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，則 $x+y=$？ (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4。 代碼：a71104k1 (104 年統測 C)

( ) 15. 已知 $A(0,1)$、$B(-3,5)$、$C(a,b)$ 爲平面上三點。若向量 $\overrightarrow{AC}$ 的長度爲 10，且與向量 $\overrightarrow{AB}$ 反向，則 a，b 之值爲何？ (A) $a=9,b=0$ (B) $a=-3,b=5$ (C) $a=6,b=-7$ (D) $a=-6,b=9$。 代碼：a71105s1 (105 年統測 B)

( ) 16. 已知 $|\overrightarrow{AB}|=4$、$|\overrightarrow{AC}|=3$，又 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的夾角爲 $\frac{\pi}{3}$，則 $|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}|$ 之值爲何？ (A) $\sqrt{52}$ (B) $\sqrt{76}$ (C) $\sqrt{52+24\sqrt{3}}$ (D) 10。 代碼：a72105s1 (105 年統測 B)

( ) 17. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(-6,8)$ 且與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角爲 $60°$，則向量 $\overrightarrow{a}$ 在向量 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影長爲何？ (A) 5 (B) 7 (C) $5\sqrt{3}$ (D) 10。 代碼：a72105k1 (105 年統測 C)

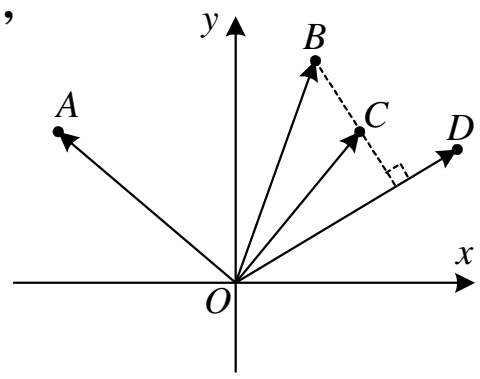
( ) 18. 已知坐標平面上三點 $A(1,a)$、$B(2,3)$、$C(5,1)$，若向量內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值爲 1，則 $a=$？ (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 2。 代碼：a72106s1 (106 年統測 B)

3-21

( )19. 已知$|\overrightarrow{a}|=1$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-2$。若$t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$和$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$垂直，其中$t$爲實數，則$t=$？ (A)$\frac{7}{10}$ (B)$\frac{\sqrt{5}}{3}$ (C)$\frac{3}{4}$ (D)$\frac{\sqrt{5}}{2}$。 代碼：a72106k1 (106 年統測 C)

( )20. 已知坐標平面上三個點$A(1,2)$、$B(2,5)$、$C(0,-1)$，則向量$2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=$? (A)$(-2,5)$ (B)$(3,0)$ (C)$(1,3)$ (D)$(3,15)$。 代碼：a71107s1 (107 年統測 B)

( )21. 如右圖所示，以O爲原點的直角坐標系上有四點，由左至右依序爲A、B、C、D，其中A落在第2象限，B、C、D落在第1象限，且直線BC與直線OD的交點落在O、D兩點之間。已知$\angle AOD>90°$，且$\overrightarrow{BC}$與$\overrightarrow{OD}$的內積爲0。若向量$\overrightarrow{OD}$分別與向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$及$\overrightarrow{OD}$求內積，依次得到a、b、c及d四個數值，則下列何者正確?
(A)$b>a>c>d$
(B)$b=c>d>a$
(C)$a>b>c>d$
(D)$d>b=c>a$。
代碼：a72108s1 (108 年統測 B)



( )22. 設x、y爲實數，且$x-2y=10$。試問$f(x,y)=x^2+y^2$之最小值爲何?
(A)25 (B)20 (C)17 (D)16。 代碼：a32108s1 (108 年統測 B)

( )23. 已知$\overrightarrow{u}=(1,1)$，$\overrightarrow{v}=(x+4,y-1)$及$\overrightarrow{w}=(2x,y)$。若$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$垂直且$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{w}$平行， 則下列何者正確?
(A)$x=1$ (B)$y=-2$ (C)$y=1$ (D)$x=-2$。 代碼：a71108k1 (108 年統測 C)

( )24. 已知$A(3,1)$、$B(2,-3)$、$C(7,-1)$及$D(x,y)$爲坐標平面上的四個點。若$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$，則$x+y=$?
(A)-8 (B)-4 (C)5 (D)6 。 代碼：a71109s1 (109 年統測 B)

( )25. 設平面上三點$A(1,1)$、$B(5,-2)$、$C(5,2)$，且$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$的正射影爲$\overrightarrow{AD}$，若$\overrightarrow{DC}=(x,y)$，則$x+y=$?
(A)$\frac{34}{25}$ (B)$\frac{89}{25}$ (C)$\frac{104}{25}$ (D)$\frac{112}{25}$ 。 代碼：a72109k1 (109 年統測 C)

( )26. 已知$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$爲平面上的三向量，且$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0$，$|\overrightarrow{a}|=5$，$|\overrightarrow{b}|=12$，$|\overrightarrow{c}|=13$。若$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}<0$，則$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$?
(A)-30 (B)-60 (C)-65 (D)-156 。 代碼：110tcc16 (110 年統測 C)

( ) 27. 下列哪一個向量不是單位向量？
(A)$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ (B)$(-1,0)$ (C)$(\frac{3}{5},\frac{-4}{5})$ (D)$(\cos 30°,\sin 30°)$ 。

代碼：111tcb01
(111 年統測 B)

( ) 28. 已知平面上兩向量 $\overrightarrow{a}=(2x+1,-3)$、$\overrightarrow{b}=(3,x-2)$，滿足 $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2$，則 $x=$？ (A)3 (B)1 (C)-1 (D)-3 。

代碼：111tcc16
(111 年統測 C)

答案：BCABB AACCB ACCAC BADAC DBBCD BAD

綜合練習

( ) 1. 設向量 $\overrightarrow{a}=(\cos 75°+\cos 15°,\sin 75°+\sin 15°)$，則向量的長度 $|\overrightarrow{a}|=$？ (A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{6}$。 代碼：a71099s1

( ) 2. 設向量 $\overrightarrow{a}=(5t,3)$，$\overrightarrow{b}=(60,-9)$，若 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$ 與 $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$ 平行，則 t 爲何？ (A) -5 (B) -4 (C) 0 (D) 5。 代碼：a71101p3

( ) 3. 已知平面上三點 $A(1,3)$，$B(3,k)$，$C(5,1)$，若向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，則 $k=$？ (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7。 代碼：a71091k1

( ) 4. 若向量 $\overrightarrow{a}=(x,y)$ 與向量 $\overrightarrow{b}=(-5,12)$ 的方向相反，且 $|\overrightarrow{a}|=52$，則 $x+y=$？ (A) -68 (B) -28 (C) 28 (D) 68。 代碼：a71103w2

( ) 5. 在坐標平面上的平行四邊形 $ABCD$ (按順序)中，若 $\overrightarrow{AB}=(4,8)$、$\overrightarrow{AD}=(1,4)$，則 $|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|=$ (A) $4\sqrt{5}+\sqrt{17}$ (B) 18 (C) $8\sqrt{5}+2\sqrt{17}$ (D) 36。 代碼：a71099k1

( ) 6. 在坐標平面上的 ΔABC 中，P 爲 $\overline{BC}$ 邊之中點，Q 爲 $\overline{AC}$ 邊上且 $\overline{AQ}=2\overline{QC}$。已知 $\overrightarrow{PA}=(4,3)$，$\overrightarrow{PQ}=(1,5)$，則 $\overrightarrow{BC}=$ (A) $(2,-6)$ (B) $(-1,-6)$ (C) $(-1,12)$ (D) $(-2,6)$。 代碼：r21096c1

( ) 7. 設平面上兩向量 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$ 及 $\overrightarrow{BC}=(1,1)$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$？ (A) -8 (B) -2 (C) 2 (D) 8。 代碼：a72102p1

( ) 8. 設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 爲平面三向量，且「$\cdot$」表向量的內積，若 $\overrightarrow{a}\cdot(3\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})=9$ 且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=6$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=$？ (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9。 代碼：a72097k2

( ) 9. 設 $\overrightarrow{a}=(2,3)$，$\overrightarrow{b}=(-3,5)$，與 $\overrightarrow{c}=(-1,k)$ 是平面上三個向量，且「$\cdot$」表示二個向量的內積。若 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=17$，則 $k=$？ (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13。 代碼：a72098s1

( ) 10. 設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 爲兩向量，$\overrightarrow{a}=(x,y)$，x,y 爲實數且 $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{13}$，$\overrightarrow{b}=(3,-2)$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之內積最大值爲何？ (A) $\sqrt{13}$ (B) $\sqrt{65}$ (C) 13 (D) 65。 代碼：a72091k1

( ) 11. 設 $\overrightarrow{a}=(4,3)$，$\overrightarrow{b}=(x,y)$ 爲平面上兩向量，且 $x^2+y^2=40$，求此兩向量內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值？ (A) $10\sqrt{10}$ (B) $12\sqrt{10}$ (C) $14\sqrt{10}$ (D) $16\sqrt{10}$。 代碼：a72098k1

( ) 12. 設 ΔABC 是邊長爲 9 的正三角形，求 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 兩向量的內積？ (A) $-\frac{81}{2}$ (B) $\frac{81}{2}$ (C) 45 (D) 81。 代碼：a72102w1

( ) 13. 已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=7$、$\overline{AC}=8$，則下列各內積中，何者爲最大？ (A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (B) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ (C) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ (D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$。 代碼：a72093k1

( ) 14. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(-1,2)$，$\overrightarrow{b}=(1,x)$，且向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角爲 $\frac{\pi}{4}$，則 $x=$？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。 代碼：a72099s1

( ) 15. 設 $|\overrightarrow{a}|=1$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{c}|=\sqrt{5}$ 且 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，試求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 夾角爲何？ (A) $30°$ (B) $45°$ (C) $60°$ (D) $120°$。 代碼：a72b05m1

( ) 16. 設向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 的夾角爲 θ，且 $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$，$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=4$，$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=3$，則 $\cos\theta=$？ (A) $\frac{7}{25}$ (B) $\frac{5}{13}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$。 代碼：a72092k1

( ) 17. 設平面上兩向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角爲 θ，若 $\cos\theta=\frac{33}{65}$，且 $|\overrightarrow{a}|=5$，$|\overrightarrow{b}|=13$，則 $(4\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=$？ (A) -39 (B) 93 (C) 97 (D) 435。 代碼：a72104w1

( ) 18. 在 ΔABC 中，若 D 爲線段 $\overline{BC}$ 的中點，且 $\overline{AB}=9$、$\overline{AC}=5$，則向量內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$？ (A) -28 (B) -14 (C) 14 (D) 28。 代碼：a72099k1

( ) 19. 二向量 $\overrightarrow{A}=(3,-4)$ 、 $\overrightarrow{B}=(1,2)$ ，且夾角爲 θ ，則 $\sin\theta$ 之值爲 代碼：a72209m1
(A) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (C) $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (D) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

( ) 20. 設 a 、 b 、 c 爲實數，且 $a^2+b^2+c^2=33$ ，則 $2a-3b+3c$ 之最大值爲 代碼：a32208m1
(A) 66 (B) 33 (C) $11\sqrt{3}$ (D) $11\sqrt{6}$ 。

( ) 21. 設 a 、 b 、 $c>0$ ，則 $(a+2b+3c)(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c})$ 之最小值爲 代碼：a32212m1
(A) 30 (B) 36 (C) 41 (D) 42 。

( ) 22. x ， y 爲實數，若 $x^2+y^2=52$ ，當 (x,y) 爲何時， $3x+2y$ 爲最大？ 代碼：a32088x1
(A) $(6,4)$ (B) $(4,6)$ (C) $(7,\sqrt{3})$ (D) $(\sqrt{3},7)$ 。

( ) 23. 設 $A(2,5)$ ， $B(4,3)$ ， $C(5,1)$ 爲坐標平面上之三點， 代碼：a72095k2
若 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影爲 $\overrightarrow{AD}$ ，則 $|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{AC}|=$ ？
(A) $7:5$ (B) $14:5$ (C) $7:25$ (D) $14:25$ 。

( ) 24. 設 $A(a,1)$ ， $B(2,b)$ 與 $C(3,4)$ 爲坐標平面上三點，而 O 爲原點， 代碼：r22087b1
若 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的正射影相同，則 $3a-4b=$ ？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

答案：ABDBB CDDAC AACCB ACABD BADB

單元 4　式的運算

主題一　多項式性質

1. 定義：

基礎數學 充電站

多項式基本觀念：代碼 b05k01m1

以下題目的國中基礎運算，溫習一下吧～

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$，

其中 a_n、a_{n-1}、$\cdots$、a_2、a_1、a_0 為實數，n 為正整數或 0，則稱 $f(x)$ 為不定元 x 的多項式。

(1) 若 $a_n\neq 0$，則稱 $f(x)$ 為 n 次多項式，n 為 $f(x)$ 的次數，以 $\deg f(x)=n$ 表示，

此時 a_n 為 $f(x)$ 的領導係數。

(2) 若 $f(x)=a_0$，則稱 $f(x)$ 為常數多項式

若 $a_0\neq 0$，則稱 $f(x)$ 為零次多項式。　例：$f(x)=3$

若 $a_0=0$，則稱 $f(x)$ 為零多項式。　例：$f(x)=0$

老師講解 1

下列何者為 x 的多項式？

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x}+5$　(B) $f(x)=\sqrt{x}-3$

(C) $f(x)=\sqrt{2}x+7$　(D) $f(x)=|x|+5$。

學生練習 1

下列何者為 x 的多項式？

(A) 2^x+3　(B) $\sqrt{7}x+8$

(C) $\dfrac{3}{5x-4}$　(D) $5\sqrt{x}+2$。

【代碼】a11a01m3

2. 係數公式：

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$，$n$ 為正整數或 0

(1)常數項 $=a_0=f(0)$

(2)各項係數和 $=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=f(1)$

(3)偶次項係數和 $=a_0+a_2+a_4+\cdots=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$

(4)奇次項係數和 $=a_1+a_3+a_5+\cdots=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$

2 老師講解

設 $f(x)=(x^3-4x^2+x+3)^2$ 展開式中，求：
(1)常數項　　(2)各項係數之和
(3)偶次方項係數和　(4)奇次方項係數和

2 學生練習

設 $f(x)=(x^3+x^2-2x+2)^3$，
求 $f(x)$ 展開式中偶次項係數和爲何？

【代碼】a11a02m2

3. 多項式的相等：

對於任意兩個實係數多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\,(a_n\neq 0)$，

$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0\,(b_m\neq 0)$，若 $f(x)=g(x)$，則：

(1) 次數相同、所有對應項的係數也相同 $\Rightarrow n=m$，$a_n=b_m$、$a_{n-1}=b_{m-1}$、$\cdots$、$a_1=b_1$、$a_0=b_0$

(2) 將 x 以相同值代入，二多項式之值恆相等，如：$x=a$ 代入，則 $f(a)=g(a)$

3 老師講解

若 $3x^2+2x-1=$
$a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)$
求 $a+b+c$ 之值。

3 學生練習

設 a,b,c 爲實數，
且 $a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$
$=4x+2$，求 $a+b+c$ 之值。

【代碼】a11b01m2

4.多項式的四則運算：

基礎數學 充電站

多項式加減乘法：代碼 b05k02m1

以下題目的國中基礎運算，溫習一下吧～

(1) **多項式的加減法**：同次項合併，係數相加、減

(2) **多項式的乘法**：

利用指數律($x^m \cdot x^n = x^{m+n}$)及乘法對加法的分配律[$a(b+c)=ab+ac$]，再同次項合併。

(3) **多項式的除法**：

設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為兩多項式，且 $g(x)\neq 0$ ，則存在一組多項式 $q(x)$ 和 $r(x)$ ，

滿足 $f(x)=g(x)\times q(x)+r(x)$ ，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$

$f(x)$ 稱為被除式、 $g(x)$ 為除式、 $q(x)$ 為商式、 $r(x)$ 為餘式 $\Rightarrow$ 被除式＝除式×商式＋餘式

運算時先將 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分別按降冪排列，再利用長除法(分離係數法)運算。

【基本練習】

設 $f(x)=4x^3-2x^2+3x-4$ ， $g(x)=3x^2+x-2$ ，試求：(1) $f(x)+g(x)$ (2) $f(x)-g(x)$

4 老師講解

試求 $(x^4+2x^3-x+1)(5x^3+2x-3)$ 乘開後，x^4 項的係數。

4 學生練習

試求 $(x^3+4x^2-3x+1)(5x^2+x-2)$ 乘開後，x^3 項的係數。

【代碼】a11a04m3

5 老師講解

若 x^2-2x+2 除 x^4-4x^2+ax+b 之餘式為 $7x+3$ ，試求 $a+b$ 之值。

5 學生練習

若 $3x^3-2x^2+ax+b$ 除以 x^2-x+2 之餘式為 $2x-1$ ，試求 $a+b$ 之值。

【代碼】a11a04m5

5.綜合除法：

當除式為一次時，可用綜合除法快速求得商式與餘式。

6 老師講解

利用綜合除法，
求以 $x+2$ 除 $f(x)=2x^3+7x^2+5x-3$
之商式與餘式。

6 學生練習

利用綜合除法，
求以 $x-2$ 除 $f(x)=x^3-3x^2+x+6$
之商式與餘式。

【代碼】a12a01m2

7 老師講解

利用綜合除法，
求以 $3x-1$ 除 $f(x)=6x^4+x^3-7x^2+14x+2$
之商式與餘式。

7 學生練習

利用綜合除法，
求以 $2x-1$ 除 $f(x)=4x^3+8x^2-11x+6$
之商式與餘式。

【代碼】a12a01m3

8 老師講解

設 $x^3-5x+7=$
$A(x-2)^3+B(x-2)^2+C(x-2)+D$，分別求出 A,B,C,D 之值。

8 學生練習

設 $3x^3-2x^2+x-4=$
$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$，
求 $2a+b+c+d$ 之值。

【代碼】a12b04m2

9 老師講解

若 $f(x)=x^3+4x^2+4x+1$，
試求 $f(\sqrt{2}-1)$ 之值。

9 學生練習

設 $x=\sqrt{3}-1$，
求 $f(x)=2x^3+2x^2-6x+5$ 之值。

【代碼】a12b02m2

【加強題】

1. $f(x)=x^3+5x^2-10x+5$，則 $f(2.01)=$_____。(四捨五入至小數以下第2位)。

【學生練習答案】

1. (B)	2. 36	3. 0	4. -13
5. 8	6. 商式爲 x^2-x-1，餘式爲4	7. 商式爲 $2x^2+5x-3$ 餘式爲3	8. 17
9. $2\sqrt{3}-1$			

回家功課

( ) 1. 若 $f(x)=(a+2)x^3+(b-3)x^2+(c+4)x+5$ 為一零次多項式，則 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 之值為
(A) $\frac{-7}{6}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{-5}{12}$ (D) $\frac{12}{5}$ 。
代碼：a11088z1

( ) 2. $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，a,b,c,d,e 皆為整數，且 $3|a|+2|b-2|+|c+5|=1$，若 $\deg f(x)=m$，領導係數為 n，求 $m+n=$？ (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 。
代碼：f22420m1

( ) 3. 將 $(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(8x-1)$ 展開後，其係數總和為
(A) 52 (B) 42 (C) 32 (D) 22 。
代碼：a11205m1

( ) 4. 設 $x^6+6x^5+6x^4-16x^3-12x^2+24x-8=(ax^2+bx+c)^3$，求 $a+b+c=$？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。
代碼：a11241m1

( ) 5. 設 $(7x^2+8x+6)^2=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，求 $a-b+c-d+e=$？
(A) 23 (B) 25 (C) 27 (D) 29 。
代碼：a11a03m2

( ) 6. 設 $f(x)+g(x)=5x^3+5x^2+x+1$ 且 $f(x)-g(x)=x^3+3x^2+x+3$，則 $g(x)$ 的 x^2 項之係數為何？
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2
代碼：a11100p2

( ) 7. 求 $(2x^3-x^2+3x+1)(x^2+x-1)$ 展開式中，x^4 項係數為何？
(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2 。
代碼：a11099p1

( ) 8. $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+99x^{98}+100x^{99})\times(9x^8+8x^7+\cdots+3x^2+2x+1)$ 展開後 x^8 項之係數為 (A) 121 (B) 132 (C) 143 (D) 165 。
代碼：f22405m1

( ) 9. 設 $-2x^3-4x^2-x+3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$，則 $a+b+c+d=$？
(A) -4 (B) -3 (C) 3 (D) 4 。
代碼：a12098w2

( ) 10. 求 $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^4+(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^3+5(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})+1=$？
(A) $2\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5}+1$ (C) $5\sqrt{5}+3$ (D) $3\sqrt{5}+1$ 。
代碼：a12224m1

答案：CCBAB CCDCA

主題二　餘因式定理

1.餘式定理：

(1) 以 $x-a$ 除多項式 $f(x)$，則餘式為 $f(a)$。

(2) 以 $ax-b$ 除多項式 $f(x)$，則餘式為 $f(\frac{b}{a})$。

註：求餘式的方法　(1)除法運算　(2)餘式定理

1 老師講解

若 $f(x)=x^3+ax^2+bx-6$ 被 $x-2$ 除得餘式爲 8，被 $x-1$ 除得餘式爲 -4，求 a、b 之值。

1 學生練習

設多項式 $f(x)=x^3+mx^2+nx-6$ 被 $x+1$ 及 $x-2$ 除之餘式分別爲 -6 與 18，求 $m+n$ 之值。

【代碼】a13a01m5

2 老師講解

已知 $f(x)=7x^4-47x^3-15x^2+6x+9$，求 $f(7)$ 之值。

2 學生練習

設 $f(x)=100x^3-290x^2-29x+3$，求 $f(3)$ 之值。

【代碼】a12b01m2

2.因式定理：

多項式 $f(x)$ 可以被 $g(x)$ 整除，則 $f(x)$ 稱為 $g(x)$ 的倍式， $g(x)$ 稱為 $f(x)$ 的因式。

(1) 多項式 $f(x)$ 有 $(x-a)$ 之因式，則 $f(a)=0$

(2) 多項式 $f(x)$ 有 $(x-a)(x-b)$ 之因式，則 $f(a)=0$ ， $f(b)=0$

3 老師講解

若 x^2-3x+2 為 $2x^3-3x^2+ax+b$ 的因式，求 $a-b$ 之值。

3 學生練習

設 ax^3+4x^2-5x+b 能被 x^2+x-2 整除，求 $a-b$ 之值。

【代碼】a13a02m3

4 老師講解

設 $f(x)$ 的次數至少二次， $f(x)$ 以 $x-1$ 除之餘式為 4 ，以 $x+2$ 除之餘式為 -2 ，求以 $(x-1)(x+2)$ 除之所得之餘式。

4 學生練習

設 $f(x)$ 為不低於二次的多項式， $f(x)$ 以 $x-1$ 除之餘式為 5 ，以 $x-2$ 除之餘式為 6 ，求以 $(x-1)(x-2)$ 除之所得之餘式。

【代碼】a13b01m2

5 老師講解

設 $f(x)$ 除以 x^2-x-2 的餘式 $ax-1$，
除以 x^2-2x-3 的餘式 $bx+c$，
除以 x^2-5x+6 的餘式 $-2x+7$，
求 a,b,c 之值。

5 學生練習

設 $f(x)$ 除以 $x(x-2)$ 的餘式 $ax+2$，
除以 x^2-x-2 的餘式 bx，
除以 $x(x+1)$ 的餘式 $4x+c$，
求 $a+b+c$ 之值。

【代碼】a13b03m2

6 老師講解

已知 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 爲 x 之三次多項式，且 $f(1)=f(2)=f(3)=2$，又 $f(4)=14$，求 $f(5)$ 之值。

6 學生練習

若 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，
且 $f(0)=f(1)=f(-2)=0$，$f(2)=24$，
求 $a-b+c-d$ 之值。

【代碼】a13b04m2

【加強題】

1. 假設多項式 $f(x)$ 除以 x^2+1 的餘式爲 $x+1$，則 $[f(x)]^2$ 除以 x^2+1 的餘式爲_____。

3.整係數一次因式檢驗法：

設整係數多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ 有 $px+q$ 之因式，且 p,q 互質，

則 p 為 a_n 的因式且 q 為 a_0 的因式。(即 $p\mid a_n$ 且 $q\mid a_0$)

7 老師講解

若 a,b 爲整數，下列何者不可能爲 $f(x)=6x^3+ax^2+bx+8$ 之因式？

(A) $x+1$ (B) $3x-1$ (C) $x+3$ (D) $3x-4$ 。

7 學生練習

若 a,b 爲整數，下列何者不可能爲 $f(x)=4x^3+ax^2+bx+5$ 之因式？

(A) $x+1$ (B) $2x-1$ (C) $x+5$ (D) $3x-5$ 。

【代碼】a14a01m3

8 老師講解

因式分解

$f(x)=x^3+2x^2-9x-18$

8 學生練習

試因式分解下列各式：

(1) $f(x)=x^3+3x^2+3x+2$

(2) $f(x)=2x^3+7x^2-17x-10$

【代碼】a14a01m2

【學生練習答案】

1. 5	2. 6	3. 5	4. $x+4$
5. 5	6. -6	7. (D)	
8. (1) $f(x)=(x+2)(x^2+x+1)$ (2) $f(x)=(x-2)(2x+1)(x+5)$			

回家功課

( ) 1. 設 $f(x)=mx^3+nx^2-2x+4$，若以 $(x-1)$ 除 $f(x)$ 得餘式為 3，以 $(x+1)$ 除 $f(x)$ 得餘式為 1，以 $(x-2)$ 除 $f(x)$ 得餘式為何？ (A) -8 (B) -4 (C) 8 (D) 16 。 代碼：a13092s1

( ) 2. 求 $7\cdot7^4-47\cdot7^3-15\cdot7^2+6\cdot7+9=$ (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2 。 代碼：f22440m1

( ) 3. 已知 $\cos60^\circ=4\cos^3 20^\circ-3\cos20^\circ$，則多項式 $4x^3-3x$ 除以 $x-\cos20^\circ$ 的餘式為何？ (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1 。 代碼：a13096k1

( ) 4. 設 x^2-5x+6 為多項式 x^3-3x^2+cx+d 的因式，則 $(c,d)=$？ (A) $(-3,8)$ (B) $(-4,12)$ (C) $(-5,10)$ (D) $(-6,8)$ 。 代碼：a13098s1

( ) 5. 設 $f(x)$ 為次數不低於 5 的多項式，以 $(x-1)^2,(x-2)^2$ 除之餘式分別為 $3x-1,13x-17$，則 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x-1)$ 的餘式為多少？ (A) $x+1$ (B) $2x+5$ (C) $7x-5$ (D) $3x+3$ 。 代碼：a13206m1

( ) 6. 設 $f(x)$ 的次數至少二次，$f(x)$ 除以 x^2-2x-3 餘式爲 $2x+3$，除以 x^2-3x+2 的餘式爲 $x+2$，求 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x-3)$ 所得之餘式爲 (A) $3x+2$ (B) $3x-1$ (C) $5x+1$ (D) $5x-6$ 。 代碼：a13b02m1

( ) 7. x^{10} 除以 x^2+x-2 之餘式為 (A) $-243x+244$ (B) $-156x+157$ (C) $-341x+342$ (D) $-256x+257$ 。 代碼：f22458m1

( ) 8. 設 $f(x)$ 為 x 之多項式，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 之餘式為 $x+1$，則 $f(x)$ 除以 $x-1$ 之餘式為何？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：a13099s1

( ) 9. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$，a、b、c 皆為實數，且 $f(1)=f(-1)=0$，$f(0)=-1$，則 $f(-2)=$？ (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3 。 代碼：a13098w1

( ) 10. 設 $f(x)$ 為 x 的三次多項式，若 $f(1)=f(2)=f(3)=6$ 且 $f(0)=0$，則 $f(x)=$ (A) $x^3-6x^2+10x+1$ (B) x^3-6x^2+11x (C) x^3-5x^2+3x+5 (D) x^3-3x^2+2x 。 代碼：a13209m1

( ) 11. 設 $p(x)$ 為一元二次多項式。若 $p(1)=1$，$p(2)=\frac{1}{2}$，$p(3)=\frac{1}{3}$，則 $p(4)$ 之值為何？ (A) $\frac{-2}{3}$ (B) $\frac{-1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$ 。 代碼：a13098k1

答案：DDBBC DCBDB C

主題三　分式與根式運算

1.求值公式：

(1) 乘法公式：

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

③ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

④ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(2) 求值公式：

① $a^2+b^2=(a\pm b)^2\mp 2ab$　　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

② $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$　　$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

③ $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$　　$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

④ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$　　$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

⑤ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

2.分式化簡：

(1) 分式的定義：

設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為兩多項式，且 $f(x)\neq 0$ ，則形如 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 之式，稱為 x 的分式或有理式。

其中 $g(x)$ 稱為分子， $f(x)$ 稱為分母。

(2) 分式運算：

設 A 、 B 、 C 、 D 為多項式，且 $B\neq 0$ 、 $D\neq 0$ ，則：

① $\dfrac{A}{B}\pm\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD\pm BC}{BD}$　② $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$　③ $\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD}{BC}$ （$C\neq 0$）

老師講解 1

化簡 $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{-2x-18}{x^2-9}$ 。

學生練習 1

化簡 $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ 。

【代碼】a15a02m2

老師講解 2

化簡 $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+3x-4}\times\dfrac{x^2-x-6}{x^2-7x+12}\div\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12}$

學生練習 2

化簡 $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}\times\dfrac{x+2}{x+1}\div\dfrac{x-1}{x+3}$ 。

【代碼】a15a02m3

老師講解 3

化簡 $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}$ 。

學生練習 3

化簡 $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2+x}$ 。

【代碼】a15b01m2

3.部分分式：

將一真分式拆成若干個真分式的和，稱為部分分式，方法：

(1) **分式化部份分式必先化為真分式**　　(2) **分解分母**

(3) **去分母**　　(4) **代值法(或比較係數)**

老師講解 4

設 $\dfrac{5x-7}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$ ，

求 A 、 B 之值。

學生練習 4

設 $\dfrac{-x-12}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-3}$ ，

求 $A+B$ 之值。

【代碼】a15a03m2

5 老師講解

設 $\dfrac{5x-1}{(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$，

求 A、B、C 之值。

5 學生練習

設 $\dfrac{2x^2+1}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$，

求 $a+b+c$ 之值。

【代碼】a15a03m3

6 老師講解

$\dfrac{2x^3-7x^2+7x-6}{x^2-4x+3}=(ax+b)+\dfrac{c}{x-1}+\dfrac{d}{x-3}$，

求 $a+b+c+d$ 之值。

6 學生練習

$x\neq -1,2$，

設 $\dfrac{2x^2-x+3}{x^2-x-2}=2+\dfrac{a}{(x+1)}+\dfrac{b}{(x-2)}$，

則 $a+b$ 之值。

【代碼】a15b02m2

4.根式運算：

(1) 根式：

設 A 為多項式或有理式，n 為正整數，則 $\sqrt[n]{A}$ 稱為根式。

(2) 根式的運算：

根式的加減法：須先將根式化簡後，再將同類根式作加減計算。

例： $x\sqrt[3]{a}+y\sqrt[3]{a}-z\sqrt[3]{a}=(x+y-z)\sqrt[3]{a}$

根式的乘除法：必須是同次根式才可以作乘除的計算。

例： $x\sqrt{a}\cdot y\sqrt{b}=xy\sqrt{ab}$

7 老師講解

設 $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，
試求 x^3+y^3 之值。

7 學生練習

設 $x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，
試求 x^3+y^3 之值。

【代碼】a15a04m3

5. 開雙根號：

若 a ，$b\in N$ ，則 $\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$

(其中：$x+y=a$ ，$xy=b$ ，$x>y>0$)

8 老師講解

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$　(2) $\sqrt{7-\sqrt{48}}$

(3) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$　(4) $\sqrt{4-\sqrt{15}}$

8 學生練習

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$　(2) $\sqrt{4+\sqrt{12}}$

(3) $\sqrt{28+5\sqrt{12}}$　(4) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

【代碼】a15a05m2

9 老師講解

化簡 $\sqrt{7+2\sqrt{12}}$ 之整數部分為 a ，

小數部分為 b ，則 $a+\dfrac{2}{b}=$？

9 學生練習

設 $\sqrt{3+\sqrt{8}}$ 之整數部分為 a ，

小數部分為 b ，求 $a+\dfrac{1}{b}$ 之值。

【代碼】a15b03m2

【學生練習答案】

1. $\dfrac{2x+8}{x-4}$	2. $\dfrac{x+3}{x-2}$	3. $\dfrac{2}{x^2-1}$	4. -1
5. 2	6. 1	7. 52	
8. (1) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$　(2) $\sqrt{3}+1$　(3) $5+\sqrt{3}$　(4) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$			9. $\sqrt{2}+3$

回家功課

( ) 1. 設 $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x+2}=\frac{ax^2+bx+c}{x^2-4}$，其中 a,b,c 為常數，則 $a+b+c$ 之值為 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 。 代碼：a15087k1

( ) 2. 設 $x-\frac{1}{x}=6$，則 $x^2+\frac{1}{x^2}=$ (A) 8 (B) 18 (C) 28 (D) 38 。 代碼：a15208m1

( ) 3. 設 $\frac{5x^2+2x-4}{(x-1)(x^2+x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x-1}$，則 $A+B+C=$？ (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 。 代碼：a15098k1

( ) 4. 解 $\frac{x+4}{x-1}+\frac{x-1}{x-2}=1$，其解為 (A) $\frac{-5\pm5\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{5\pm5\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{3\pm3\sqrt{5}}{2}$ 。 代碼：a21241m1

( ) 5. 比較 $a=\sqrt{2}+\sqrt{15}$，$b=3+\sqrt{8}$，$c=\sqrt{7}+\sqrt{10}$ 的大小： (A) $b>a>c$ (B) $b>c>a$ (C) $c>b>a$ (D) $c>a>b$ 。 代碼：f11a14m1

( ) 6. 比較 $a=\sqrt{7}-\sqrt{5}$，$b=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，$c=\sqrt{3}-1$ 的大小： (A) $b>a>c$ (B) $b>c>a$ (C) $c>b>a$ (D) $c>a>b$ 。 代碼：f11a14m1

( ) 7. 試將 $\frac{3}{4+\sqrt{10}}$ 有理化 (A) $\frac{4-\sqrt{10}}{6}$ (B) $\frac{4-\sqrt{10}}{2}$ (C) $\frac{4-\sqrt{10}}{4}$ (D) $\frac{4-\sqrt{10}}{3}$ 。 代碼：f11a13m3

( ) 8. 試將 $\frac{16}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$ 有理化： (A) $2(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})$ (B) $8(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})$ (C) $4(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})$ (D) $\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}$ 。 代碼：f11a13m3

( ) 9. 試將 $\frac{4}{\sqrt[3]{3}+1}+\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$ 有理化： (A) $2\sqrt[3]{3}$ (B) $\sqrt[3]{9}+1$ (C) $\sqrt[3]{3}$ (D) $2\sqrt[3]{9}+2$ 。 代碼：f11a13m3

( ) 10. 若 $0<x<1$，若 $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+2}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}=3$，則 x 之值為 (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。 代碼：f11b12m1

( ) 11. $\dfrac{1}{\sqrt{37-20\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt{37+20\sqrt{3}}}=$ 代碼：a15227m1

(A) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ (B) $\dfrac{10}{13}$ (C) $\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}$ (D) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

( ) 12. 化簡 $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ 之整數部分為 a，小數部分為 b，則 $b=$ 代碼：a15251m1

(A) $\sqrt{3}-1$ (B) $\sqrt{3}-2$ (C) $2-\sqrt{3}$ (D) $1-\sqrt{3}$ 。

( ) 13. 化 $\dfrac{x^3-4x^2+7x-1}{(x-1)^4}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{(x-1)^3}+\dfrac{D}{(x-1)^4}$， 代碼：a15k12m1

則 $A+B+C+D$ 之值爲 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 。

答案：ADDCB CBADB BCC

主題四　複數之基本性質

1. 數系表：

- 複數(C)
  - 實數(R)
    - 有理數(Q)
      - 整數(Z)
        - 自然數(N)(正整數)
        - 0
        - 負整數
      - 有限小數
      - 循環小數
    - 無理數(不循環的無限小數，開方開不盡的根數)
  - 虛數

(1) **自然數**(N)：

就是正整數，即1、2、3、4、…。

(2) **整數**(Z)：

包含正整數、負整數、0，即…、-3、-2、-1、0、1、2、3、4、…。

(3) **有理數**(Q)：

凡是能表示成分數型式$\frac{q}{p}$(其中p、q為整數，且$p\neq 0$)的數，稱為有理數。

如：整數$3=\frac{3}{1}$、有限小數$0.3=\frac{3}{10}$、循環小數$0.\overline{3}=\frac{1}{3}$。

(4) **無理數**：

不循環的無限小數，如：$0.126547\cdots$、π(圓周率)、…。

開方開不盡的根數，如：$\sqrt{2}=1.4142135\cdots$、…。

(5) **實數**(R)：

有理數與無理數合稱實數。

2. 虛數：

(1) 設$i=\sqrt{-1}$為虛數單位，故$\sqrt{-2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{2}i$、$\sqrt{-9}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=3i$。

(2) i的性質：

四次一循環：i、$i^2=-1$、$i^3=-i$、$i^4=1$、$i^5=i$、$i^6=-1$、$i^7=-i$、$i^8=1$、…。

$\Rightarrow$ $i^{4k}=1$，$i^{4k+1}=i$，$i^{4k+2}=-1$，$i^{4k+3}=-i$ (k為整數)

連續四個冪次和為0**，**如：$1+i+i^2+i^3=0$、$i^{47}+i^{48}+i^{49}+i^{50}=0$

1 老師講解

求出下列各式之值：

(1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$　(2) $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{-5}$　(4) $\sqrt{-3}\sqrt{-5}$

(5) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$　(6) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}$

(7) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}$　(8) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}$

註：(1)若 $a<0$，$b<0 \Rightarrow \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

(2)若 $a<0$，$b>0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

1 學生練習

下列何者有誤？

(A) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{-4}=2\sqrt{3}i$

(B) $\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-6}=\sqrt{30}$

(C) $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-i$

(D) $\dfrac{\sqrt{-5}}{\sqrt{125}}=\dfrac{i}{5}$。

【代碼】a81a02m2

2 老師講解

求出下列各式之值：

(1) $5-4i^{9}+3i^{18}-2i^{31}+i^{46}$

(2) $i^{35}+i^{36}+i^{37}+i^{38}+\cdots\cdots+i^{99}+i^{100}$

2 學生練習

求出下列各式之值：

(1) $1+2i+3i^{2}+4i^{3}+5i^{4}+6i^{5}+7i^{6}+8i^{7}+9i^{8}$

(2) $i^{3}+i^{4}+i^{5}+i^{6}+\cdots\cdots+i^{33}$

【代碼】a81a02m3

3. 複數：

(1) **標準式：**

$z=a+bi(a,b\in R)$

則 a 稱為 z 之實部，b 稱為 z 之虛部。　註：複數包含實數與虛數

(2) **複數相等：**

$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$　　② $a+bi=0 \Leftrightarrow a=b=0$

老師講解 3

$3x+5iy=(x+2)+(3y-4x)i$，且 $x, y\in R$，求 $x\cdot y=$？

學生練習 3

設 $4x+3yi=(x+3)+(2y+1)i$，且 $x, y\in R$，求 $x+y=$？

【代碼】a81a03m3

(3) **複數的四則運算：**

① $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$

② $(a+bi)\times(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

③ $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

老師講解 4

試化簡下列各式：

(1) $(4-2i)+(-2+4i)$　(2) $(1-3i)-(2+2i)$

(3) $(1-2i)(3-i)$　(4) $\dfrac{1+2i}{2-i}$

學生練習 4

試化簡下列各式：

(1) 設 $(2+3i)(4-5i)=a+bi$，則 $a+b=$？

(2) $\dfrac{4+3i}{2-5i}=a+bi(a,b\in R)$，則 $a+b=$？

【代碼】a81a03m2

5 老師講解

複數 z 之虛部爲 $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{z}$ 之實部爲 $\frac{3}{5}$，求 z。

5 學生練習

設複數 z 之實部爲1，而 $\frac{1}{z}$ 之虛部爲 $\frac{1}{2}$，則 $z=$_____。

【代碼】f23405m1

6 老師講解

求出下列各式之值：

(1) $(1+i)^{20}$　　(2) $(\frac{1+i}{1-i})^{50}-(\frac{1-i}{1+i})^{50}$

6 學生練習

試化簡 $(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{92}+(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^{2004}=$？

【代碼】a81b01m2

(4) **共軛複數：**

設 $Z=a+bi$，則 Z 的共軛複數為 $a-bi$，以符號 $\overline{Z}$ 表示，即 $\overline{Z}=a-bi$。

例： $\begin{cases} z=5+12i \\ \overline{z}=5-12i \end{cases}$ $\begin{cases} z=3-4i \\ \overline{z}=3+4i \end{cases}$ $\begin{cases} z=2i-3 \\ \overline{z}=-2i-3 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\sqrt{3} \\ \overline{z}=\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} z=3i \\ \overline{z}=-3i \end{cases}$

性質： ① $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$　② $\overline{z_1 \cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$　③ $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$

老師講解

若 $Z=\dfrac{1-2i}{1+i}$，且 Z 之共軛複數 $\overline{Z}=a+bi$，求 $a+b=$？

學生練習

設 z 爲複數 $z+2=3+2i\overline{z}$，則 $z=$_____。

【代碼】f23217m1

【加強題】

1. 設 $z=\dfrac{4-i}{a+i}$，且 $\overline{z}=-z$，則實數 a 值爲_____。

【學生練習答案】

1. (B)	2. (1) $5-4i$　(2) 1	3. 2	4. (1) $23+2i$　(2) $\dfrac{19}{29}$
5. $1-i$	6. -2	7. $-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}i$	

回家功課

( ) 1. 設 i 為虛數單位，求滿足 $-2x+y+3yi=x(1+i)+2+(y+6)i$ 的實數 x , y 代碼：a81203m1

(A) $x=\frac{2}{5}$ ， $y=\frac{16}{5}$ (B) $x=\frac{2}{5}$ ， $y=-\frac{16}{5}$

(C) $x=-\frac{2}{5}$ ， $y=\frac{4}{5}$ (D) $x=-\frac{2}{5}$ ， $y=\frac{14}{5}$ 。

( ) 2. $a,b\in R$ ， $\frac{2+3i}{a+bi}+\frac{1}{3-4i}=\frac{1}{3+4i}$ ，則 $8a+12b=$ 代碼：f23a05m1

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 。

( ) 3. 設 a ， b 為實數且 $(a+bi)(2+6i)=-80$ ，其中 $i^2=-1$ 。則 $a+b=$ ？ 代碼：f23102c1

(A) -8 (B) -4 (C) 8 (D) 16 。

( ) 4. 設 a 為實數，且 $\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}$ 亦為實數，則 $a=$ 代碼：f23423m1

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 。

( ) 5. 設 $i=\sqrt{-1}$ ，若 $z=\frac{2+3i^{13}}{2i^{15}-i^{20}}$ ，則 z 之共軛複數為 代碼：a81215m1

(A) $\frac{8}{5}+\frac{i}{5}$ (B) $-\frac{8}{5}-\frac{i}{5}$ (C) $-\frac{8}{5}+\frac{i}{5}$ (D) $\frac{8}{5}-\frac{i}{5}$ (E) $\frac{1}{5}-\frac{8}{5}i$ 。

答案：AACDB

主題五　多項方程式

1.二次方程式：

(1) 設 a 、 b 、 $c\in R$ ，且 $a\neq 0$ ，則 $ax^2+bx+c=0$ 稱為一元二次方程式。其解法有：

①**因式分解：**利用十字交乘法作因式分解，直接求解

②**公式解：**無法利用十字交乘法求解，可利用公式解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

例： $x^2-4x-12=0\Rightarrow(x-6)(x+2)=0\Rightarrow x=6$ 或 -2

$$x^2-2x-2=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$$

(2) **根的性質：**

設 a 、 b 、 $c\in R$ ，且 $a\neq 0$ ，則 $ax^2+bx+c=0$ 稱為一元二次方程式。

令方程式之判別式 $\Delta=b^2-4ac$

① $\Delta>0\Rightarrow$ 兩相異實根　② $\Delta=0\Rightarrow$ 兩相等實根(重根)　③ $\Delta<0\Rightarrow$ 沒有實根(兩共軛虛根)

1 老師講解

設 $x^2-8x+11=0$ ，且較大根爲 a ，則：

(A) $5<a<\dfrac{11}{2}$　(B) $\dfrac{11}{2}<a<6$

(C) $6<a<\dfrac{13}{2}$　(D) $\dfrac{13}{2}<a<7$ 。

1 學生練習

設 $x^2-2x-1=0$ ，且其正根爲 a ，則：

(A) $1<a<1.5$　(B) $1.5<a<2$

(C) $2<a<2.5$　(D) $2.5<a<3$ 。

【代碼】a21a01m3

2 老師講解

設 $k\in R$ ，若 $x^2+(k+1)x+(k+4)=0$ 有實根，求 k 的範圍。

2 學生練習

設 $k\in R$ ，方程式 $x^2+(k+1)x+(2-k)=0$ 有虛根，求 k 的範圍。

【代碼】a21a01m4

(3) 根與係數之關係：

若 α 、 β 為 $ax^2+bx+c=0$ 之二根($a\neq 0$) $\Rightarrow$ 兩根之和 $=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ 、兩根之積 $=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

3 老師講解

設 $x^2-4x+2=0$ 之兩根為 α 、 β ，
求下列各式之值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\alpha^3+\beta^3$ (3) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$

3 學生練習

設 α 、 β 為方程式 $x^2-3x+2=0$ 二根，
求下列各式之值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\alpha^3+\beta^3$

(3) $(\alpha+2)(\beta+2)$ (4) $\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2}$

【代碼】a21a02m2

4 老師講解

設 $x^2-6x+k=0$ 的一根是另一根的二倍，求 k 之值。

4 學生練習

設 $x^2-7x+k=0$ 的二根差 3 ，求 k 之值。

【代碼】a21a02m3

(4) **反求方程式：**

以α，β為兩根之二次方程式為 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

5 老師講解

設α、β爲$x^2+5x+3=0$之二根，
求以α^2與β^2爲二根之一元二次方程式。

5 學生練習

設α、β爲$x^2-5x+2=0$之二根，
求以α^2與β^2爲二根之一元二次方程式。

【代碼】a21b02m2

2.高次方程式：

(1) 一元三次或三次以上的方程式，通稱為一元高次方程式。

(2) **一元高次方程式的解法**：因式分解法、整係數一次因式檢驗法、…等方式求解。

6 老師講解

求 $x^4-8x^2-5x+6=0$ 之解。

6 學生練習

求方程式 $4x^4+17x^3+8x^2-23x-6=0$ 所有根中最小者之值。

【代碼】a21a04m2

7 老師講解

解方程式 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=24$。

7 學生練習

解方程式 $x(x+2)(x+4)(x+6)-20=0$。

【代碼】a21b03m2

(3) **根與係數之關係：**

若 α 、 β 、 γ 為 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根($a\neq 0$)

$\Rightarrow$ 三根之和 $=\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$ 、兩兩相乘 $=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$ 、三根之積 $=\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$ 。

8 老師講解

設 α,β,γ 爲方程式 $x^3-2x^2+x+3=0$ 之三根，則求下列各式之值：

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ (2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

8 學生練習

設 α,β,γ 爲方程式 $x^3+3x^2+2x+5=0$ 之三根，則求 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ 之值。

【代碼】a21a05m2

9 老師講解

設方程式 $9x^3-18x^2-13x+k=0$ 三根成等差級數，求 k 之值。

9 學生練習

設 $x^3+3x^2+kx+1=0$ 之三根成等比，則求 k 之值。

【代碼】a21b04m2

3.方程式的虛根：

虛數根成對定理：

實係數方程式 $ax^2+bx+c=0$ 中，有一根為 $p+qi$，則必有另一根 $p-qi$

若非實係數方程式 $ax^2+bx+c=0$，則虛根共軛性質不存在。

10 老師講解

設 a,b 皆爲實數，若 $3+2i$ 爲方程式 $ax^2-12x+b=0$ 之一根，試求 a,b 之值。

10 學生練習

設 a,b 爲實數，若方程式 $2x^2+ax+b=0$ 有一根爲 $2+3i$，試求 a,b 之值。

【代碼】a81a05m2

11 老師講解

設 $a\in R$，$2+i$ 爲 $x^2+ax+1-2i=0$ 之一根，求 a。

11 學生練習

已知複係數方程式 $ax^2-(4ai+1)x+3(i-2)=0$ 有純虛根且 $a\in R$，求此虛根＝_____。

【代碼】f23421m1

12 老師講解

$a\in R$，若 $3x^2+(a+i)x+3i-6=0$ 有實根，求此實根及 a。

12 學生練習

設 $a\in R$，若 $x^2+(i-3)x+2a+3i=0$ 有實根，求此實根爲？

【代碼】a81b03m2

13 老師講解

方程式 $x^2+6x+4=0$ 之兩根爲 α、β，則 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 之值爲？

13 學生練習

設 α、β 爲 $x^2+8x+9=0$ 之兩根，則 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 之值爲？

【代碼】a81b04m2

【加強題】

1. 設 $x^2+(m+2)x+(m+5)=0$，若二根爲相異正實根，求實數 m 的範圍？。

2. 標準身材的定義是：$\dfrac{\text{肚臍高度}}{\text{身高}}=\dfrac{\text{肚臍與頭頂距離}}{\text{肚臍高度}}$，有一身高150公分，肚臍高度90公分的女孩，欲借穿高跟鞋來提高身高與肚臍高度，滿足標準身材的定義。試問該女孩穿多少公分的高跟鞋較恰當。(取最接近的整數)
(A)1　(B)3　(C)5　(D)7。($\sqrt{5}\approx 2.23$)

【學生練習答案】

1. (C)	2. $-7<k<1$	3. (1)5　(2)9　(3)12　(4)$\dfrac{9}{4}$	
4. 10	5. $x^2-21x+4=0$	6. -3	7. $-3+\sqrt{11}$，$-3-\sqrt{11}$
8. 5	9. 3	10. $a=-8$，$b=26$	11. $3i$
12. -3	13. -14		

回家功課

( ) 1. 設二次方程式 $4x^2+12x+c=0$ 的二根差為 2，則 c 等於 代碼：a21212m1
(A) -7 (B) -5 (C) 3 (D) 5 。

( ) 2. 若 a 與 $a+2$ 爲異號的兩實數，且均爲方程式 $x^2+|x|+3k=0$ 的解，代碼：f23082b1
求 $k=$ (A) $-\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{2}{3}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -1 。

( ) 3. 已知 a 和 b 為二次方程式 $x^2-3x-1=0$ 的兩個解。試問以 $a+b$ 和 $a\times b$ 為兩個解的二次方程式為何？ 代碼：a21103p2
(A) $x^2-2x-3=0$ (B) $x^2-3x-2=0$
(C) $x^2-5x-3=0$ (D) $x^2-5x-2=0$ 。

( ) 4. 已知方程式 $x^3-3x+2=0$ 有一重根，則該重根為何？ 代碼：a21099p1
(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2 。

( ) 5. 下列何者為方程式 $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=60$ 的正整數解？ 代碼：a21097h1
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0 。

( ) 6. 求 $(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)=6$ 之所有實根總和為 代碼：a21231m1
(A) -3 (B) -4 (C) -5 (D) -6 。

( ) 7. 設 α,β,γ 為方程式 $x^3-6x^2+12x-6=0$ 的三根，則 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=$ 代碼：a21229m1
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

( ) 8. 已知實數係數方程式 $2x^3+x^2+kx+6=0$ 有兩根互為倒數，則 k 值為 代碼：a21233m1
(A) 13 (B) -13 (C) 23 (D) -23 。

( ) 9. 已知 $i=\sqrt{-1}$，a 爲複數，若二次方程式 $x^2-ax-4+7i=0$ 有一根爲 $2-i$，則另一根爲何？ 代碼：a81092k1
(A) $2-3i$ (B) $-3+2i$ (C) $2+i$ (D) $2+3i$ 。。

( ) 10. 設 a,b 爲實數且 $i=\sqrt{-1}$，若 $2+\sqrt{3}i$ 爲 $2x^2+ax+b=0$ 之一根，則 $a+b=$ 代碼：a81095k2
(A) 1 (B) 3 (C) 6 (D) 14 。

( ) 11. $x^2-(6-i)x+(a-1)i+5=0$ 有實根，其中 $i=\sqrt{-1}$，且 $a<0$，則 a 之值為 (A) -4 (B) -3 (C) -2 (D) -1 。 代碼：a81221m1

( ) 12. 設方程式 $x^2+8x+4=0$ 之兩根爲 α、β，則 $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=$ 代碼：f23435m1
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

答案：DBACC ABBBC AD

歷屆試題

( ) 1. 設 x^3+3x^2+ax+b 除以 x^2+x+1 的餘式爲 0，則 $a+b=$？ (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6。 代碼：a12100s1 (100 年統測 B)

( ) 2. 設方程式 $2x(x-2)+a(x-2)=0$ 的兩根相等，則 $a=$？ (A) -4 (B) -2 (C) 1 (D) 3。 代碼：a21100s1 (100 年統測 B)

( ) 3. 已知 $f(x)$ 爲一實係數多項式，且 $f(\frac{3}{2})=27$，$f(-\frac{5}{3})=8$。若 $f(x)$ 除以 $6x^2+x-15$ 餘式爲 $ax+b$，則 $a+b=$？ (A) 4 (B) 6 (C) 18 (D) 24。 代碼：a13100k1 (100 年統測 C)

( ) 4. 若 α,β 爲方程式 $x-\frac{3}{x}=-1$ 的兩相異實根，則 $(\frac{2}{\alpha}+1)(\frac{2}{\beta}+1)=$？ (A) -1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{5}{3}$。 代碼：a21100k1 (100 年統測 C)

( ) 5. 方程式 $x(x^2-5x+6)=4x$ 的解，下列敘述何者正確？ (A)只有二實數解 (B)所有解的乘積爲 2 (C)沒有負實數解 (D)所有解的和爲 9。 代碼：a21101s1 (101 年統測 B)

( ) 6. 假設 $x^4-4x^3+2x^2+ax+b$ 可以被 x^2-x-2 整除，則下列有關 a、b 之敘述何者正確？ (A) $a=15$ (B) $b>0$ (C) $a+b=-7$ (D) $a-2b=9$。 代碼：a13101s1 (101 年統測 B)

( ) 7. 若 x^2+x+1 爲 x^3+ax^2+bx+2 的因式，則下列何者正確？ (A) $a>b$ (B) $a^2+b^2=10$ (C) $a-b=-2$ (D) $a+b=6$。 代碼：a13101k1 (101 年統測 C)

( ) 8. 設 $x-1$ 和 $x+1$ 爲多項式 $x^5+ax^4+bx^3+5x^2+2x-5$ 的因式，則 $3a+b$ 之值爲何？ (A) -3 (B) 1 (C) 3 (D) 6。 代碼：a13101k2 (101 年統測 C)

( ) 9. 已知 a 和 c 爲實數，若複數 $a+2i$ 爲一元二次方程式 $x^2+2x+c=0$ 的一根，c 之值爲何？ (A) -4 (B) -2 (C) 3 (D) 5。 代碼：a81101k1 (101 年統測 C)

( ) 10. 設 $f(x)$、$g(x)$ 爲 x 之多項式。若 $g(x)$ 除以 $2x-3$ 的餘式爲 1，且 $f(x)=g(x)(2x-3)+5$，則 $(f(x))^2$ 除以 $(2x-3)^2$ 的餘式爲何？ (A) 5 (B) $20x-5$ (C) $10x-15$ (D) 25。 代碼：a13102s1 (102 年統測 B)

( )11. 若 x^2+x-2 爲多項式 $x^3+ax^2+3x+b+1$ 的因式(其中 a 、b 皆爲實數)，則 $a-b$ 之值爲何？ (A)17 (B)3 (C)-4 (D)-15 。 代碼：a13102s2 (102 年統測 B)

( )12. 已知 $x^4-mx^3-x^2-5x+n=(x^2-3x+2)Q(x)$，若 m 、n 爲實數，$Q(x)$ 爲二次多項式。則 $2m+n=$？ (A)-6 (B)-2 (C)4 (D)8 。 代碼：a13102k1 (102 年統測 C)

( )13. 已知 k 爲實數，且二次方程式 $9x^2+(12k+18)x+(4k^2+12k+5)=0$ 有二實根。若其中一根大於1，另一根小於0，則 k 之範圍爲何？ (A) $\frac{-5}{2}<k<-2$ (B) $-2<k<\frac{-3}{2}$ (C) $\frac{-3}{2}<k<-1$ (D) $-1<k<\frac{-1}{2}$ 。 代碼：a21102k1 (102 年統測 C)

( )14. 已知 a、b、c 爲實數。若 $x\neq\frac{3}{2}$ 時，等式 $\frac{4x^2-6x-3}{(2x-3)^2}=a+\frac{b}{2x-3}+\frac{c}{(2x-3)^2}$ 恆成立，則 $a+b+2c=$？ (A)-4 (B)-2 (C)2 (D)4 。 代碼：a15102k1 (102 年統測 C)

( )15. 已知 a 、b 爲實數，$i=\sqrt{-1}$ 。若 $(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8=a+bi$ ，則 $a^2+b^2=$？ (A)16 (B)64 (C)256 (D)1024 。 代碼：a83102k1 (102 年統測 C)

( )16. 若對每一實數 x 皆滿足 $x^4-x^3-2x^2+13x+k=(x^2+2x+a)(x^2-3x+b)$ ，且 a,b,k 爲常數。則 $k=$？ (A)-5 (B)-3 (C)3 (D)5 。 代碼：a11103s1 (103 年統測 B)

( )17. 已知 $(x-3)$ 爲 x^3+kx-6 之因式，則下列何者爲 x^3+kx-6 之因式分解 (A) $(x-3)(x-2)(x-1)$ (B) $(x-3)(x-2)(x+1)$ (C) $(x-3)(x+2)(x-1)$ (D) $(x-3)(x+2)(x+1)$ 。 代碼：a14103s1 (103 年統測 B)

( )18. 若 $a\neq 2$，方程式 $x^2+ax+2=0$ 之二根差的平方與方程式 $x^2+2x+a=0$ 之二根差的平方相等，則 $a=$？ (A)-6 (B)-4 (C)-2 (D)-1 。 代碼：a21103s1 (103 年統測 B)

( )19. 設實數 $2+\sqrt{3}$ 的整數部份爲 a，小數部份爲 b，若 p 爲有理數且 b 爲方程式 $ax^2+px-6=0$ 之一根，則 $p=$？ (A)3 (B)$3\sqrt{3}$ (C)6 (D)$6\sqrt{3}$ 。 代碼：a15103s1 (103 年統測 B)

( )20. 設 α ，β 爲方程式 $x^2-5x+3=0$ 的兩根，則 $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$ 之值爲何？ (A) $-\frac{7}{3}$ (B) $\frac{17}{3}$ (C) $\frac{19}{3}$ (D) $\frac{20}{3}$ 。 代碼：a21103k1 (103 年統測 C)

Chapter 4 式的運算

( )21. 求 $(\sqrt[3]{3}-2)(\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}+4)$ 之值爲何？ (A) -5 (B) -3 (C) 8 (D) 1。 代碼：a15103k1 (103 年統測 C)

( )22. 設 $z=\dfrac{(5-12i)(3+4i)}{(4-3i)(12-5i)}$，$i=\sqrt{-1}$，則 $|z|$ 之值爲何？ (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) 13。 代碼：a82103k1 (103 年統測 C)

( )23. 若 $f(x)$ 爲一個二次多項式，且 $f(0)=2$、$f(2)=0$、$f(3)=-4$，則下列何者爲 $f(x)$ 的因式？ (A) $x+1$ (B) $x+2$ (C) $x+3$ (D) $x+4$。 代碼：a13104s1 (104 年統測 B)

( )24. 若 $x^2-9x+k=0$ 的兩根爲連續的整數，則 $kx^2-9x+1=0$ 的兩根和爲何？ (A) $\dfrac{3}{10}$ (B) $\dfrac{7}{20}$ (C) $\dfrac{2}{5}$ (D) $\dfrac{9}{20}$。 代碼：a21104s1 (104 年統測 B)

( )25. 給定一分式 $\dfrac{x+1}{x^2-1}+\dfrac{x^2+x-6}{x^2+6x+9}$。若已知該分式化成最簡分式爲 $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+2x+e}$，其中 $x\neq -3,-1,1$，則 $a+b+c+d+e=$？ (A) -2 (B) 0 (C) 2 (D) 4。 代碼：a15104s1 (104 年統測 B)

( )26. 若 $x>0$ 且 $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{3}$，則 $x+\dfrac{1}{x}=$？ (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。 代碼：a15104s2 (104 年統測 B)

( )27. 將 $(x^4-3x^3+2x-5)(x^3-2)(x+3)$ 乘開化簡後，x^3 項的係數爲何？ (A) -5 (B) -3 (C) 3 (D) 5。 代碼：a11104k1 (104 年統測 C)

( )28. 已知 a,b,c,d 爲實數，若 $2x^3+x^2-5x-3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$，則 $abcd=$？ (A) -20 (B) -10 (C) 10 (D) 20。 代碼：a12104k1 (104 年統測 C)

( )29. 已知 $i=\sqrt{-1}$ 且 a,b 爲實數，若 $(2+i)(a+bi)=15+5i$，則 $a+b=$？ (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10。 代碼：a81104k1 (104 年統測 C)

( )30. 已知 $f(x)=x^2+ax+1$，以 $2x+3$ 除之所得餘式爲 $\dfrac{1}{4}$，則 $f(x+1)$ 除以 $x-1$ 的餘式爲何？ (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10。 代碼：a13105s1 (105 年統測 B)

( )31. 已知 $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{6}{1-x}=\dfrac{12}{x^2-1}$，則 $\dfrac{x-1}{x+1}$ 之值爲何？ (A) $-\dfrac{3}{2}$ (B) 0 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{3}{2}$。 代碼：a21105s1 (105 年統測 B)

4-35

( )32. 已知一個長方形的長增加3公分，寬增加4公分之後，可得一個正方形，且正方形的面積爲原長方形面積的兩倍，則原長方形的面積爲多少平方公分？ (A)64 (B)72 (C)128 (D)144。 代碼：a21105s2 (105 年統測 B)

( )33. 已知a、b爲實數，若$f(x)=x^3+ax^2+bx-6$，$g(x)=x^2-7x+6$，且$f(x)$可被$g(x)$整除，求$2a+3b$之值 (A)23 (B)36 (C)39 (D)45。 代碼：a13105k1 (105 年統測 C)

( )34. 已知A、B、C爲常數，且對任意x均滿足 $\dfrac{3x^2+9x-3}{(x-1)(x+2)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$，求$B$之值 (A)$-1$ (B)0 (C)1 (D)2。 代碼：a15105k1 (105 年統測 C)

( )35. 試求139^6除以4的餘數爲何？ (A)3 (B)2 (C)1 (D)0。 代碼：a13105k2 (105 年統測 C)

( )36. 已知多項式$f(x)=2x^2-5x+2$，$g(x)=x^3-x^2+ax+b$。若$f(x)+g(x)$可以被x^2+1整除，則$a+b=$？ (A)-2 (B)0 (C)3 (D)5。 代碼：a12106s1 (106 年統測 B)

( )37. 已知$x-1$爲多項式$f(x)=x^2+ax+b$的因式。若$f(x)$除以$x+1$的餘式爲6，則$3a+2b=$？ (A)-10 (B)-5 (C)1 (D)5。 代碼：a13106s1 (106 年統測 B)

( )38. 已知一元二次方程式$x^2+x-5=0$有兩相異實根a、b，若$a<b$，則$b-a=$？ (A)1 (B)$\sqrt{5}$ (C)$2\sqrt{5}$ (D)$\sqrt{21}$。 代碼：a21106s1 (106 年統測 B)

( )39. 求方程式$\dfrac{-x^2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x-2}$所有解的和爲何？ (A)$-3$ (B)-2 (C)-1 (D)0。 代碼：a21106k1 (106 年統測 C)

( )40. 若多項式$2x^3-kx^2+3x+5$除以$x+1$的餘式爲1，則k值爲何? (A)-9 (B)-1 (C)1 (D)9。 代碼：a13107s1 (107 年統測 B)

( )41. 若$f(x)=x^4-x^3+kx^2-2$爲整係數多項式，其中$k>0$且$f(x)$有整係數一次因式$x-h$，則$k+h=$? (A)3 (B)2 (C)1 (D)0。 代碼：a14107k1 (107 年統測 C)

( )42. 已知$z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，且$\bar{z}$爲其共軛複數。若$\dfrac{1+z}{1+\bar{z}}=a+bi$，其中$a,b$爲實數，則點$(a,b)$在第幾象限? (A)一 (B)二 (C)三 (D)四。 代碼：a81107k1 (107 年統測 C)

( ) 43. 設 $f(x)$ 爲三次多項式，已知 $f(-1)=4$ 且 $f(-2)=f(1)=f(3)=0$。試問 $f(x)$ 除以 $x-2$ 之餘式爲何?
(A) -6 (B) -2 (C) 3 (D) 5。
代碼：a13108s1 (108 年統測 B)

( ) 44. 若方程式 $3x^2-39x+k=0$ 的兩根爲連續整數，則 $k=$?
(A) 168 (B) 126 (C) 84 (D) 42。
代碼：a21108s1 (108 年統測 B)

( ) 45. 已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均爲多項式，若以 x^2-3x+2 除 $f(x)$ 所得餘式爲 $3x-4$，以 $x-1$ 除 $g(x)$ 所得餘式爲 5，則以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 所得餘式爲何? (A) -4 (B) -3 (C) 3 (D) 4。
代碼：a13108k1 (108 年統測 C)

( ) 46. 已知 $\dfrac{x^2+5x+6}{(x-2)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$，其中 A、B 與 C 爲實數，則 $A+2B+3C=$? (A) -5 (B) 0 (C) 8 (D) 10。
代碼：a15108k1 (108 年統測 C)

( ) 47. 已知 $(x+1)^3$ 除 $f(x)$ 的餘式爲 x^2-2x+3。若 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 的餘式爲 $ax+b$，則 $a+b=$?
(A) -2 (B) -1 (C) 3 (D) 4 。
代碼：a13109s1 (109 年統測 B)

( ) 48. 已知 α、β 及 -3 爲方程式 $x^3-x^2-11x+3=0$ 的三個相異解。求 $|\alpha-\beta|=$?
(A) $2\sqrt{3}$ (B) 4 (C) 6 (D) $4\sqrt{5}$ 。
代碼：a21109s1 (109 年統測 B)

( ) 49. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+x+1)$ 所得之餘式爲 $3x^2+5x-2$，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 所得之餘式爲何?
(A) -4 (B) $2x-5$ (C) 6 (D) $8x-5$ 。
代碼：a13109k1 (109 年統測 C)

( ) 50. 設 α、β 爲方程式 $x^2+5x+k=0$ 之二根，已知多項式 $f(x)=2x^2+7x+5$ 除以 $x-\alpha$、$x-\beta$ 所得的餘式分別爲 -1、2，則 $k=$?
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 。
代碼：a21109k1 (109 年統測 C)

( ) 51. 已知 $f(x)=x^2+bx+c$ 爲二次多項式。若 $f(x)$ 被 $(x+1)^2$ 除的餘式被 $x-1$ 整除，且 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除的餘式被 $x+1$ 整除，則 $c=$？
(A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3 。
代碼：110tcb24 (110 年統測 B)

( ) 52. 若 $\dfrac{3x-1}{(x-3)(x-1)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-1}$，其中 A、B 爲實數，則下列何者正確？
(A) $A=2$ (B) $B=1$ (C) $A=-2$ (D) $B=-1$ 。
代碼：110tcc01 (110 年統測 C)

( ) 53. 已知三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足 $f(1)=f(2)=f(-2)=2$，且 $f(-1)=8$，則下列何者正確？ (A) $a=-1$ (B) $b=1$ (C) $c=-4$ (D) $d=4$ 。 代碼：110tcc15 (110 年統測 C)

( ) 54. 已知 $f(x)$ 是一個二次多項式，且 $f(1)=f(-2)=0$，$f(2)=8$，則 $x+3$ 除 $f(x)$ 的餘式爲何？(A) -8 (B) -2 (C)4 (D)8 。 代碼：111tcb06 (111 年統測 B)

( ) 55. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $2x+3$，得商式爲 x^3-x，餘式爲 6。若 $f(x)$ 除以 x^2+3 的商式爲 $q(x)$，餘式爲 $r(x)$，則 $q(x)-r(x)=$？ (A) $2x^2+15x-38$ (B) $2x^2-9x-38$ (C) $2x^2+15x+22$ (D) $2x^2-9x+22$ 代碼：111tcb15 (111 年統測 B)

( ) 56. 若 $\dfrac{x^2+2x+7}{(x-2)(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+3}$，則 $A+B+C=$？ (A)1 (B)5 (C)10 (D)15 。 代碼：111tcc05 (111 年統測 C)

( ) 57. 若四次多項式 $ax^4+bx^3+6x^2+5x+2$ 除以 $(x+1)^2$ 所得的餘式爲 $3x+4$，則 $a+b=$？ (A) -12 (B) -6 (C) -4 (D) -2 。 代碼：111tcc10 (111 年統測 C)

答案： CADBC DDADB ADABC ADACC AAADC DCCBC DBADC DBDCB ADBBD AAABC DDCDA AB

綜合練習

( ) 1. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$ ， $g(x)=2x^2+3x+3$ ， $h(x)=-2x^2+cx-b$ 爲三個多項式，且 a,b,c 均爲實數，若已知 $f(x)-g(x)=h(x)$ ，則下列何者爲二次多項式？ 代碼：a11094s1
(A) $f(x)+h(x)$ (B) $g(x)+h(x)$
(C) $f(x)+g(x)+h(x)$ (D) $f(x)+b[g(x)+h(x)]$ 。

( ) 2. 將 $(x^2+2x-x^{-1}+1)^2$ 展開時， x 項之係數爲何？ 代碼：a11091w1
(A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2 。

( ) 3. 設 $f(x)=103x^3+ax^2+bx$ 除以 x^2-1 的餘式爲 $3x+4$ 。若 $f(x)$ 除以 $x(x^2-1)$ 的餘式爲 cx^2+dx+e ，則 $c=$ ？ 代碼：a13103w1
(A) 3 (B) 4 (C) 103 (D) 104 。

( ) 4. 設 $x=\sqrt{3}+1$ ，則 $x^3-6x-1=$ ？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：a12096s2

( ) 5. 已知 $f(x)$ 、 $q(x)$ 爲多項式且 $f(x)=(x^3-2x^2-3x)q(x)+x^2-4$ ，則下列敘述何者爲眞？ 代碼：a13104p1
(A) $f(x)$ 除以 x^2-2x-3 的餘式爲 x^2-4
(B) $f(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式爲 -4
(C) $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式爲 -4
(D) $f(x)$ 除以 x 的餘式爲 -4 。

( ) 6. 設 $x^5-5x^4+ax^2+3$ 除以 x^3-1 之餘式爲 $R(x)$ ，若 $R(x)$ 可被 $x-1$ 整除，則 a 值爲何？ (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -2 。 代碼：a13203m1

( ) 7. 設 a 、 b 、 c 、 d 爲實數，若 x^2-1 爲 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 之因式，且 $f(x)$ 除以 $x-2$ 餘 6 ，則 $2a+b=$ ？ (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4 。 代碼：a13099k1

( ) 8. $f(x)$ ， $g(x)$ 爲二多項式，以 x^2+1 除 $f(x)$ 與 $g(x)$ ，所得餘式分別爲 $x-1$ 與 $2x+1$ ，則以 x^2+1 除 $f(x)\cdot g(x)$ 所得之餘式爲？ 代碼：a13213m1
(A) $-x-3$ (B) $x+3$ (C) $2x-3$ (D) $-2x+3$ 。

( ) 9. 正整數 7^{2009} 乘開後的數字，其末二位數字爲何？ 代碼：a13098k2
(A) 01 (B) 07 (C) 43 (D) 49 。

( ) 10. 設 $abc \neq 0$ 且 $a+b+c=0$，則 $a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=$？ 代碼：a15218m1
(A) -3 (B) 3 (C) 0 (D) 1。

( ) 11. 若 α、β 均爲實數，且 $\alpha^3=2+\sqrt{5}$，$\beta^3=2-\sqrt{5}$，則 $\alpha+\beta=$？ 代碼：a15098k2
(A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 4。

( ) 12. 設 $\frac{3x^2+x+2}{x^3-x^2-x+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$，則 $2a+3b+c$ 等於 代碼：a15087g1
(A) 4 (B) 9 (C) 11 (D) 15。

( ) 13. 化簡 $(2+\sqrt{1-x})^4+(2-\sqrt{1-x})^4$ 得 x 的係數等於 代碼：a15235m1
(A) -52 (B) -26 (C) 26 (D) 52。

( ) 14. 若 a 爲 $x+1=\sqrt{x+3}$ 之解，則下列那個選項正確？ 代碼：a21091w2
(A) $-3<a<-1$ (B) $-1<a<1$ (C) $0<a<2$ (D) $2<a<4$。

( ) 15. $\sqrt{\frac{1}{5^2}+\frac{1}{4^2}+1}$ 等於下列哪一個選項？ 代碼：f11101c1
(A) 1.01 (B) 1.05 (C) 1.1 (D) 1.15。

( ) 16. 關於下列不等式，請選出正確的選項。 代碼：f11103c1
(A) $\sqrt{13}>3.5$ (B) $\sqrt{13}<3.6$
(C) $\sqrt{13}-\sqrt{3}>\sqrt{10}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$

( ) 17. 設 $i=\sqrt{-1}$，則 $(-i)^8+(-i)^7-(-i)^6+(-i)^5+(-i)^4-(-i)^3-(-i)^2+(-i)+1=$？ 代碼：a81097k2
(A) $2-5i$ (B) $2+5i$ (C) $-5+2i$ (D) $5-2i$。

( ) 18. 設 $i=\sqrt{-1}$，若級數 $\sum_{n=1}^{50}(i^3)^n=a+bi$，則 $a+2b=$？ 代碼：a81095k1
(A) -1 (B) -3 (C) 1 (D) 3。

( ) 19. 設 $i=\sqrt{-1}$ 且 a 與 b 爲兩實數，若 $(a+bi)(1+3i)=8+4i$，則 $(a+bi)^2=$？ 代碼：a81094k1
(A) $8i$ (B) $-8i$ (C) $8+8i$ (D) $8-8i$。

( ) 20. 設 $f(x)=x^{100}+x^{50}+1$，試求 $f(-\frac{1+i}{\sqrt{2}})=$ 代碼：a81214m1
(A) $-i$ (B) $2i$ (C) i (D) $-2i$。

( ) 21. 設 $z=\dfrac{3+2i}{a-i}$，且 $\bar{z}=z$，求實數 a 值＝ (A)$\dfrac{1}{2}$ (B)$-\dfrac{3}{2}$ (C)1 (D)$\dfrac{2}{3}$。 代碼：f23218m1

( ) 22. 次方程式 $x^2-2kx+2-k=0$ 有兩正實根，則
(A)$k\le -2$ 或 $k\ge 1$ (B)$1\le k<2$ (C)$k\le -2$ (D)$k>2$。 代碼：a21221m1

( ) 23. 若一元二次實係數方程式 $x^2+2kx-k+6=0$ 的兩根均為負數，
則 k 可能為下列哪一個值？ (A)$\dfrac{1}{2}$ (B)$\dfrac{3}{2}$ (C)$\dfrac{11}{2}$ (D)$\dfrac{13}{2}$。 代碼：a21102w1

( ) 24. 若 a 為正數，則方程式 $x^2-(2^a+2^{-a})x+1=0$ 之根的性質為何？
(A)只有二個正實根、沒有負實根 (B)有一個正實根、有一個負實根
(C)沒有正實根、只有一個負實根 (D)只有一個正實根、沒有負實根。 代碼：a21094w1

( ) 25. 試問方程式 $(x^2+x+1)^3+1=0$ 有幾個相異實數解？
(A)0 個 (B)1個 (C)2 個 (D)3 個。 代碼：f23095a1

( ) 26. 已知方程式 $2x^2-30x+k=0$ 的兩根為連續自然數，則 $k=$？
(A)106 (B)108 (C)110 (D)112。 代碼：a21098s1

( ) 27. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根和為 3，則方程式 $ax^2+cx+2b=0$ 的兩根乘積為何？ (A)-6 (B)-3 (C)3 (D)6。 代碼：a21093w2

( ) 28. 已知一元二次方程的兩根積為 -12，兩根之平方和為 25，且兩根和為正數，則其方程式為何？
(A) $x^2-x+12=0$ (B) $x^2-x-12=0$
(C) $x^2+x-12=0$ (D) $x^2+x+12=0$。 代碼：a21091s1

( ) 29. 若函數 $f(x)=x^2+3x-1$ 的圖形和 x 軸交於 $(x_1,0)$、$(x_2,0)$ 兩點，
則 $|x_1-x_2|$ 之值為何？ (A)3 (B)$\sqrt{11}$ (C)$\sqrt{13}$ (D)$\sqrt{14}$。 代碼：a21101w1

( ) 30. 設 a、b 是一元二次方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根，若 $a>b$，求數對
$(\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{5}},\dfrac{a^4-b^4}{\sqrt{5}})$ 之值？ (A)$(3,1)$ (B)$(3,2)$ (C)$(1,2)$ (D)$(1,3)$。 代碼：a21101w2

( ) 31. 有一黃金矩形，將其一端切去一個正方形，剩餘的小矩形與原來的黃金矩形相似，求此黃金矩形的長與寬的比值。
(A)$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ (B)$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (C)$\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ (D)$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$。 代碼：f23442m1

(　　) 32. 關於方程式 $2x^3-x^2-5x-2=0$ 的根，下列敘述何者正確？ 代碼：a21101p1
(A)三根中有兩根相等　(B)三根的和爲 -1
(C)三根的乘積爲 1　(D)三根中最小的根爲 -2。

(　　) 33. 設 a、b 爲常數，若方程式 $x^3+6x^2+ax+b=0$ 的三根相等，則下列何者正確?　(A) $2a=-3b$　(B) $3a=-2b$　(C) $2a=3b$　(D) $3a=2b$。 代碼：a21091s2

(　　) 34. 已知方程式 $x^3+kx^2+25x-26=0$ 有一根爲 2，設其另二根爲 α、β，則 $\alpha^3+\beta^3$ 等於　(A) -8　(B) -10　(C) -16　(D) -18。 代碼：a21236m1

(　　) 35. 下列哪一個方程式有正的實數解？ 代碼：a21104w1
(A) $x^2+7x+9=0$　(B) $\dfrac{1}{2^x}=x$　(C) $\log(x+1)=-1$　(D) $\sin(3x)=\sqrt{2}$。

(　　) 36 令 $i=\sqrt{-1}$，若 $1+i$ 爲方程式 $2x^2+kx+6+2i=0$ 的一根，則 $k=$？ 代碼：a81099k1
(A) -6　(B) -4　(C) $-5+i$　(D) $-10+2i$。

(　　) 37. 已知 $i=\sqrt{-1}$，且 a、b 均爲實數。若 $1-\sqrt{3}i$ 爲方程式 $x^3+3x^2+ax+b=0$ 的一根，則 $a+b=$？　(A) -4　(B) -2　(C) 8　(D) 14。 代碼：a81098k1

(　　) 38. 設 $f(x)$ 爲實係數三次多項式，若 $f(1)=f(1+i)=0$ 且 $f(0)>0$，則下列何者正確？ 代碼：a13099k2
(A) $f(-2)<0$　(B) $f(2)>0$　(C) $f(4)<0$　(D) $f(6)=0$。

答案：ADBCD　ACABA　BCACB　ADBBC　BBCAA　DABCD　BCCDB　ADC

單元 5　直線與圓

主題一　斜率

1. 斜角：

直線 L 與 x 軸之正向夾角(逆時針方向)，稱為直線的斜角。設斜角為 θ，則 $0° \le \theta < 180°$

2. 斜率之求法：

(1) L 過二點 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，則斜率 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$。($x_2 = x_1$ 即斜率不存在)

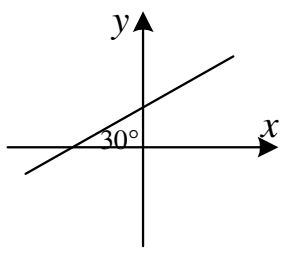
例：直線過二點 $(1,2)$，$(5,5) \Rightarrow m = \dfrac{3}{4}$

(2) $ax + by + c = 0$，則斜率 $m = -\dfrac{a}{b}$。($b = 0$ 即斜率不存在)

例：直線方程式為 $5x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{5}{2}$

(3) 直線 L，斜角 θ，則斜率 $m = \tan\theta$。(當 $\theta = 90°$ 時，為鉛垂線，斜率不存在)

例：L 之斜角為 $30°$，



$\Rightarrow m = \tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

老師講解 1

求出下列各直線之斜率與斜角：

(1) 一直線過二點 $(-1,2)$，$(3,6)$

(2) 直線 $x - \sqrt{3}y - 9 = 0$

學生練習 1

求出下列各直線之斜角：

(1) 一直線過二點 $(2,-3)$，$(-4,3)$

(2) 直線 $L: \sqrt{3}x - y + 5 = 0$

【代碼】g12a05m2

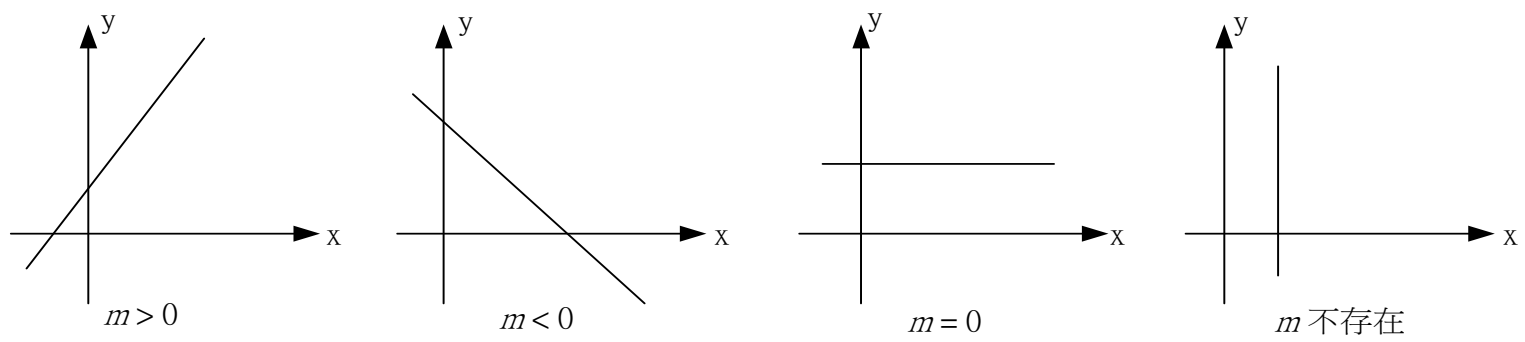
老師講解 2

設 $L:3x+4y+1=0$ 之斜角爲 θ，
則 $5\sin\theta+4\sec\theta$ 之值等於？

學生練習 2

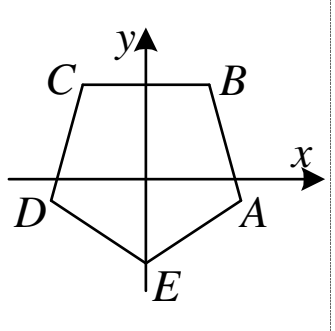
若 $L:5x+12y+4=0$ 之斜角爲 θ，
求 $\cot\theta+\csc\theta$ 之值 【代碼】g12a05m3

3.性質：



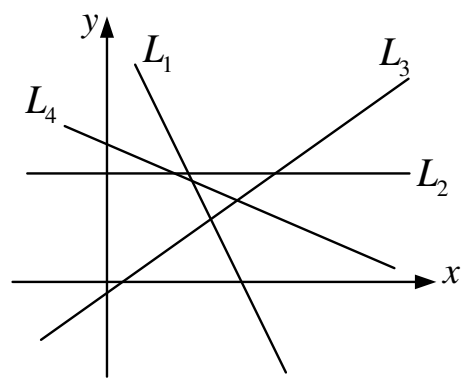
老師講解 3

設 $ABCDE$ 是坐標平面上一個正五邊形，它的中心與原點重合，且頂點 E 在 y 軸的負向上(如右圖示)。試問下列各直線中，斜率最小者爲何？
(A)直線 AB　(B)直線 BC
(C)直線 CD　(D)直線 DE
(E)直線 EA。



學生練習 3

平面上有四條直線 L_1、L_2、L_3、L_4，其斜率分別是 m_1、m_2、m_3、m_4，見右圖，則其斜率由大到小依序爲何？



【代碼】g12a03m3

4 老師講解

已知 $A(4,2)$ ， $B(0,-6)$ ， $C(7,-1)$ ，若直線 L 過定點 $P(9,-7)$ ，且直線 L 與 ΔABC 相交，求直線 L 的斜率範圍。

4 學生練習

設 $A(1,1)$ 、 $B(3,5)$ 、 $C(5,3)$ 、 $D(0,-7)$ 、 $E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 爲坐標平面上的六個點，若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 各恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值爲___。

【代碼】f21101c1

4.應用：

在坐標平面上，設直線 L_1 與 L_2 的斜率分別為 m_1 與 m_2 ，則：

(1) $L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

(2) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

【註】當一直線斜率不存在(平行 y 軸)，另一直線斜率為 0 (平行 x 軸)，則此兩直線亦互相垂直。

5 老師講解

設 $A(x,5)$ 、 $B(3,4)$ 、 $C(6,-2)$ ，已知 A,B,C 三點共線，則求 x 之值。

5 學生練習

設 $P(4,2)$ ， $Q(6,a)$ ， $R(10,-1)$ ，已知 P,Q,R 三點共線，則求 a 之值。

【代碼】g12a04m2

6 老師講解

設兩直線 $L_1:(m+2)x+(m+3)y=0$，$L_2:6x+(2m-1)y=15$，若 $L_1 \perp L_2$，則求 m 之值。

6 學生練習

設 $L_1:2x+(a+1)y+5=0$，$L_2:(a-2)x-3y+2=0$，若 $L_1 \perp L_2$，求 a 之值。

【代碼】g12b02m2

【學生練習答案】

1. (1) $135°$ (2) $60°$	2. $\frac{1}{5}$	3. $m_3 > m_2 > m_4 > m_1$	4. -3
5. 1	6. -7		

回家功課

( ) 1. 三角形三頂點為 $A(3,2)$，$B(6,5)$，$C(3,8)$，則 $\overline{BC}$ 邊上中線之斜率 (A)1 (B)-1 (C)2 (D)3 。 代碼：g12202m1

( ) 2. 在 ΔABC 中 $A(3,2)$，$B(5,5)$，$C(-1,y)$，已知 $\angle ABC=90°$，則求 $y=$ (A)8 (B)9 (C)10 (D)11 。。 代碼：g12a04m3

( ) 3. 設 $L_1:2x+y=1$、$L_2:x-ay=2$、$L_3:2x-y=3$、$L_4:bx+4y=4$ 為四直線，其中 a 與 b 均為實數。若 L_1 與 L_2 平行，且 L_3 與 L_4 平行，則 $ab=?$ (A)4 (B)3 (C)2 (D)1 。 代碼：g12094s1

( ) 4. 已知一直線與 $5x-6y+3=0$ 平行之斜率為 a，另一直線與 $x-3y+8=0$ 垂直之斜率為 b，則 ab 之值為 (A)$\frac{3}{2}$ (B)$-\frac{3}{2}$ (C)$\frac{5}{2}$ (D)$-\frac{5}{2}$ 。 代碼：g12212m1

( ) 5. 設 $L_1:(a+2)x+(a+3)y=10$，$L_2:6x+(2a-1)y=5$，若 $L_1\perp L_2$，求 a 值 (A)1 (B)-1 (C)2 (D)-2 。 代碼：g12213m1

( ) 6. 設直線 L 經過 $P(1,2)$，$Q(3,1)$ 二點，直線 L' 經過 $R(3,a)$，$S(2,0)$ 二點，若 L 與 L' 互相垂直，則 a 之值為 (A)3 (B)2 (C)$\frac{3}{2}$ (D)$\frac{3}{4}$ 。 代碼：g12087s2

( ) 7. 若點 $P(a,2)$ 與點 $Q(3,b)$ 的連線與直線 L：$x+y=3$ 垂直，則 $a+b=$？ (A)-5 (B)-3 (C)3 (D)5 。 代碼：g12090s1

答案：DBADB BD

主題二　直線方程式

基礎數學充電站

直線方程式基本觀念：代碼 b10k01m1

以下題目的國中基礎運算，溫習一下吧～

1.直線方程式的求法：

(1) 點斜式：

L 過 $P(x_1, y_1)$ 且斜率 m $\Leftrightarrow$ $L: y - y_1 = m(x - x_1)$

1 老師講解

設 L 過 $A(2,1)$，且斜率爲 3，
求 L 的方程式。

1 學生練習

設直線過點 $A(4,-2)$，斜率爲 $\frac{1}{3}$，
則此直線方程式爲何？

【代碼】g13a01m2

2 老師講解

設 $A(-2,3)$、$B(1,-2)$，求 $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式。

2 學生練習

設 $A(2,1)$、$B(1,-3)$，求 $\overleftrightarrow{AB}$ 方程式。

【代碼】g13a01m3

3 老師講解

設 $P(3,6)$ 、$Q(9,2)$，求 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線。

3 學生練習

$A(1,2)$， $B(-1,0)$， $C(2,1)$，
求過 A 且垂直 $\overleftrightarrow{BC}$ 的直線方程式。

【代碼】g13b01m2

4 老師講解

在 ΔABC 中， $A(2,5)$ 、 $B(-2,1)$ 、 $C(4,5)$，
若直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 平分 ΔABC 的面積，
則 $\overleftrightarrow{AD}$ 的直線方程式爲何？

4 學生練習

三角形三頂點，$A(3,3)$，$B(-1,-5)$，$C(6,0)$
求 $\overline{AB}$ 之中線所在直線方程式爲何？

【代碼】g13b03m2

(2) **斜截式**： L 斜率 m ，且 y 軸截距 k $\Leftrightarrow$ $L: y=mx+k$

5 老師講解

已知直線斜率爲 3 ，且 y 軸截距爲 2 ，
則直線方程式爲何？

5 學生練習

已知一直線之 $m=\dfrac{5}{2}$ ，且 y 軸截距爲 1 ，
求此直線方程式爲何？

【代碼】g13a02m2

(3) **截距式**：L 之 x 截距 a，y 截距 $b\,(ab\neq 0)$ $\Leftrightarrow$ $L:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

6 老師講解

直線 L 之 x 截距爲 3，y 截距爲 2，求 L 之直線方程式。

6 學生練習

設直線的 x 軸截距爲 -6，y 軸截距爲 3，則直線方程式爲何？

【代碼】g13a02m3

7 老師講解

直線 L 過點 $(1,2)$，且其 x 軸與 y 軸截距和爲 6，求 L 之直線方程式。

7 學生練習

若過點 $(6,-1)$ 且截距之乘積爲 1 的直線方程式爲何？

【代碼】g13217m1

(5) 平行垂直已知直線方程式的求法：

平行： $L//ax+by+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad L:ax+by+k=0$

垂直： $L\perp ax+by+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad L:bx-ay+k=0$

8 老師講解

求過點 $(-4,3)$，且與 $x+2y=5$ 平行的直線方程式。

8 學生練習

求過 $A(1,-5)$、$B(5,1)$ 之中點，且與 $2x-5y-11=0$ 垂直的直線為何？

【代碼】g13a03m4

9 老師講解

試求點 $A(3,-1)$ 關於直線 $L:2x-3y+17=0$ 的對稱點 A' 的坐標。

9 學生練習

試求點 $A(7,2)$ 關於直線 $L:4x-3y+3=0$ 的對稱點 A' 的坐標。

【代碼】g13254m1

2.二元一次方程式的圖形：

(1) 一般式：

設 a,b,c 為實數且 $a^2+b^2\neq 0$，則二元一次方程式 $ax+by+c=0$ 圖形為一直線，
而 $ax+by+c=0$ 稱為直線的一般式。

當 $a\neq 0$，$b\neq 0$ 時，$ax+by+c=0$

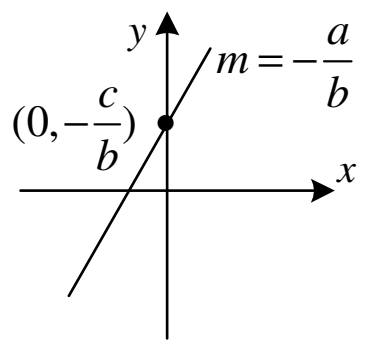
可化為 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$，圖形斜率為 $-\frac{a}{b}$ 且 y 截距為 $-\frac{c}{b}$ 的直線。(如圖一)

當 $a\neq 0$，$b=0$ 時，$ax+by+c=0$

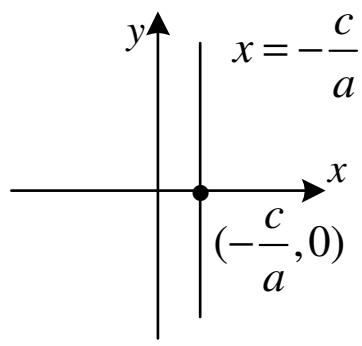
可化為 $x=-\frac{c}{a}$，圖形通過點 $(-\frac{c}{a},0)$ 且與 x 軸垂直的直線，其斜率不存在。(如圖二)

當 $a=0$，$b\neq 0$ 時，$ax+by+c=0$

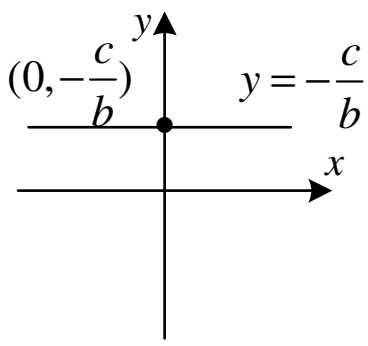
可化為 $y=-\frac{c}{b}$，圖形通過點 $(0,-\frac{c}{b})$ 且與 x 軸平行的直線，其斜率為 0。(如圖三)



(圖一)



(圖二)



(圖三)

基礎數學 充電站

二元一次方程組：代碼 b03k01m1

以下題目的國中基礎運算，溫習一下吧～

(2) 二元一次方程組的幾何意義：

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 圖形表二直線

① $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ ⇒二線交一點，僅有一組解 ⇒相容方程組

② $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ ⇒二線平行，無解 ⇒矛盾方程組

③ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ ⇒二線重合，有無限多組解 ⇒相依方程組

【基本練習】

試判斷下列各方程組與二直線之關係：

(1) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x-6y=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 3x-4y=6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+4y=5 \\ x+2y=3 \end{cases}$

10 老師講解

$\begin{cases} L_1: ax+5y+5=0 \\ L_2: x+(a+4)y-1=0 \end{cases}$，

(1) L_1 與 L_2 重合　(2) L_1 與 L_2 平行，求 a 值。

10 學生練習

$\begin{cases} L_1: 2x+(2-k)y+6=0 \\ L_2: (1+k)x-2y-3=0 \end{cases}$，

(1) L_1 與 L_2 重合　(2) L_1 與 L_2 平行，求 k 值。

【代碼】g13a04m3

3.直線系：

通過 $L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ ， $L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 交點的直線方程式可設為：

$(a_1x+b_1y+c_1)+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$

註：若 k 值為無解，則所求直線即為 L_2

11 老師講解

不論 k 爲任何實數，直線
$L:(5+2k)x-(2-k)y+(1-5k)=0$
恆過某一定點，則此定點之坐標。

11 學生練習

$a\in R$ ， $(1+3a)x+(2-a)y-(1+10a)=0$
恆過一定點，定點坐標爲_____。

【代碼】r11207m1

【學生練習答案】

1. $L: x-3y-10=0$	2. $4x-y-7=0$	3. $3x+y-5=0$	4. $x-5y-6=0$
5. $5x-2y+2=0$	6. $x-2y+6=0$	7. $x+9y=-3$ ， $x+4y=2$	
8. $L: 5x+2y-11=0$	9. $A'(-1,8)$	10. (1) -2　(2) 3	11. $(3,-1)$

回家功課

( ) 1. 過 $x+y=5$ 與 $2x-y=1$ 的交點，且斜率為 -3 的直線方程式為
(A) $x+3y=11$ (B) $x-3y=-7$ (C) $3x-y=3$ (D) $3x+y=9$ 。 代碼：g13220m1

( ) 2. 三角形三頂點，$A(1,3)$，$B(-5,1)$，$C(2,-1)$ 求 $\overline{AB}$ 之中線所在直線方程式爲 (A) $3x+4y-3=0$ (B) $x-y+3=0$ (C) $3x+4y-2=0$
(D) $x+2y-5=0$ 。 代碼：g13252m1

( ) 3. 三角形三頂點，$A(1,3)$，$B(-5,1)$，$C(2,-1)$ 求 $\overline{AB}$ 之高所在直線方程式爲 (A) $x-3y-5=0$ (B) $x-y-3=0$ (C) $x+y+1=0$
(D) $3x+y-5=0$ 。 代碼：g13251m1

( ) 4. 設 $P(2,4)$ 與 $Q(4,2)$ 為坐標平面上之兩點，試求線段 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線方程式？
(A) $x+y-3=0$ (B) $x+y=0$ (C) $x-y-3=0$ (D) $x-y=0$ 。 代碼：g13095s2

( ) 5. 己知 ΔABC 三頂點為 $A(-1,3)$，$B(2,1)$，$C(-3,-1)$，若直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 平分 ΔABC 的面積，則直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 之方程式為何？
(A) $3x+y=0$ (B) $3x-y+6=0$ (C) $6x-y+9=0$ (D) $6x+y+3=0$ 。 代碼：g13091k1

( ) 6. $A(2,-1)$、$B(4,-3)$、$C(-1,6)$，求過 A 平行 $\overleftrightarrow{BC}$ 之直線方程式
(A) $9x+5y-13=0$ (B) $5x-9y-19=0$ (C) $5x+9y-1=0$
(D) $9x+5y-13=0$ 。 代碼：g13b01m1

( ) 7. 設直線 $3x+ay=b$ 過點 $(2,3)$ 且與直線 $x-2y-3=0$ 平行，則 $a-b$ 之值為 (A) -2 (B) 2 (C) 4 (D) 6 。 代碼：g13227m1

( ) 8. 已知直線 L 過點 $(1,5)$，且垂直於直線 $2x-3y+6=0$，則 L 與 x 軸的交點座標為何?
(A) $(-\frac{13}{2},0)$ (B) $(-\frac{7}{3},0)$ (C) $(\frac{13}{3},0)$ (D) $(\frac{17}{2},0)$ 。 代碼：g13091k2

( ) 9. 直線 L 之 y 軸截距為 -3 且 x 座標每減少 2 單位，y 座標便增加 3 單位，則求 L 的方程式。
(A) $3x+2y+6=0$ (B) $3x-2y-6=0$
(C) $3x+2y-6=0$ (D) $3x-2y+6=0$ 。 代碼：g13b04m1

( ) 10. 設直線 L 之斜率為 $-\frac{5}{3}$，且 L 之 x 截距為 2，則 L 之 y 截距為何？
(A) -5 (B) $-\frac{10}{3}$ (C) $\frac{10}{3}$ (D) 5 。 代碼：g13099p1

(　　) 11. 在座標平面上，兩直線 $x+y-5=0$，$x-3y+3=0$ 與 y 軸所圍城之三角形面積為何？ 代碼：g13097s2
(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8　。

(　　) 12. 設直線 $x+3y-11=0$，則下列敘述何者錯誤 ？ 代碼：g13229m1
(A)斜率爲 $-\frac{1}{3}$　(B) y 軸之截距爲 $\frac{3}{11}$
(C)直線過點 $(2,3)$　(D) x 軸上之截距爲 11

(　　) 13. 有關直線方程式 $L:3x-2y-6=0$ 的敘述，下列何者不正確? 代碼：g13230m1
(A) L 與 y 軸之交點坐標爲 $(0,-3)$　(B) L 經過第二象限
(C) L 之斜率爲 $\frac{3}{2}$　(D) L 與 x 軸、 y 軸所圍成之面積爲 3 。

(　　) 14. 若 $L_1:4x+y=5$，$L_2:kx+y=0$，$L_3:2x-3y=-1$ 不能圍成一個三角形，則 k (k 有三個答案) 代碼：g13253m1
(A) $4,\frac{2}{3},-1$　(B) $4,-\frac{2}{3},1$　(C) $4,-\frac{2}{3},-1$　(D) $2,\frac{4}{3},-1$　。

(　　) 15. 設 $a,b\in R$，坐標平面上二點 $A(-2,6)$，$B(a,4)$ 對稱於直線 $L:ax-y+b=0$，則求 $a-b=$？ 代碼：r11208m1
(A) -3　(B) 3　(C) 4　(D) 6　。

答案：DCDDD　ADCAC　BBBCA

主題三　點到直線的距離

1. 點線距離：

設 $A(x_0, y_0)$，$L: ax+by+c=0$，則點 A 至直線 L 之距離 $\Rightarrow d(A,L)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

1 老師講解

求點 $(5,-2)$ 到 $3x+4y+13=0$ 的距離。

1 學生練習

求點 $(-1,1)$ 到 $12x-5y-9=0$ 的距離。

【代碼】g14a01m2

2 老師講解

設 ΔABC 中，$A(3,0)$、$B(-1,-3)$、$C(1,1)$，求 $\overline{AB}$ 邊上的高為何？

2 學生練習

設 ΔABC 中，$A(1,2)$、$B(4,6)$、$C(3,8)$，求 $\overline{AB}$ 邊上的高為何？

【代碼】g14b01m2

3 老師講解

設 $A(-3,5)$、$B(1,-4)$，$L: x+2y-2=0$，若線段 $\overline{AB}$ 與直線 L 交於 C，求 $\overline{AC}:\overline{CB}$ 之值。

3 學生練習

已知 $A(4,5)$、$B(-5,2)$，若 $L: 2x-y+3=0$ 交 $\overline{AB}$ 於 P，求 $\overline{AP}:\overline{PB}$ 之值。

【代碼】g14b02m2

2.兩平行線距離：

已知兩平行線 $\begin{cases} L_1: ax+by+c_1=0 \\ L_2: ax+by+c_2=0 \end{cases}$，則二平行線之距離 $\Rightarrow d(L_1,L_2)=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

4 老師講解

求二平行線 $\begin{cases} 8x+6y=7 \\ 4x+3y=10 \end{cases}$ 距離爲何？

4 學生練習

求二平行線 $\begin{cases} 6x-8y=45 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$ 的距離。

【代碼】g14a01m3

5 老師講解

求平行於直線 $4x-3y+2=0$ 且與其距離爲 3 的直線方程式。

5 學生練習

求平行 $4x+3y+6=0$ 且與其距離爲 4 之直線方程式。

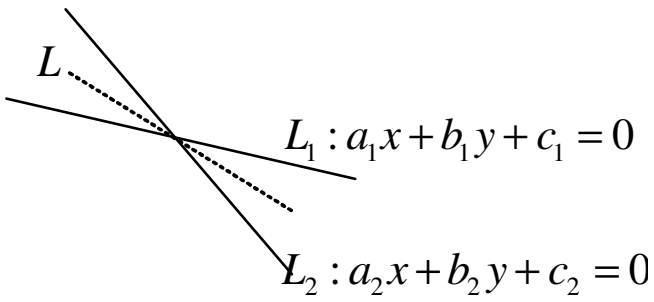
【代碼】g14b03m2

3.交角平分線：

原理：交角平分線上一點到角的兩邊等距

$\begin{cases} L_1: a_1x+b_1y+c_1=0 \\ L_2: a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$，則兩直線的交角平分線

$$\Rightarrow \frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$



老師講解 6

設 $L_1: x+2y+2=0$、$L_2: 2x+y-4=0$，求 L_1 與 L_2 所夾銳角的交角平分線方程式

學生練習 6

設 $L_1: 3x+2y-6=0$、$L_2: 2x+3y-6=0$，求 L_1 與 L_2 所夾銳角的交角平分線方程式

【代碼】g14a03m2

【學生練習答案】

1. 2	2. 2	3. $2:3$	4. $\frac{7}{2}$
5. $\begin{cases} 4x+3y+26=0 \\ 4x+3y-14=0 \end{cases}$	6. $5x+5y-12=0$		

回家功課

( ) 1. 設兩直線 $x-y-2=0$，$2x+y-4=0$ 之交點爲 P，則 P 到直線 $3x+4y+9=0$ 之距離爲 (A) 6 (B) 5 (C) 4 (D) 3 。 代碼：g14204m1

( ) 2. 在坐標平面上，若 $L:\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ 為一直線，試求點 $(16,6)$ 至 L 的距離？ (A) 1 (B) $\frac{22}{5}$ (C) $\frac{22}{7}$ (D) 12 。 代碼：g14095s1

( ) 3. 已知直線 $L_1:3x-4y-3=0$，$L_2:2x-3y-13=0$，$L_3:x+y+1=0$，求 L_2 和 L_3 之交點到直線 L_1 之距離為何？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：g14099s1

( ) 4 設拋物線 $y=x^2$ 與直線 $y=2x+3$ 相交於 P、Q 兩點，則 $\overline{PQ}$ 之中點至直線 $3x+4y-3=0$ 之距離為 (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 。 代碼：g14088k1

( ) 5. 已知 ΔABC 中，頂點 A 的座標為 $(-2,1)$，頂點 B 和 C 位於直線 $2x+3y=12$ 上，試求 $\overline{BC}$ 邊上的高？ (A) 12 (B) 13 (C) $\sqrt{13}$ (D) 24 。 代碼：g14090k1

( ) 6. 已知兩線 $8x-6y+10=0$ 與 $4x-3y+k=0$ 之距離爲 3，則 $k=$ (A) 10 (B) 20 (C) -30 (D) 40 。 代碼：g14206m1

( ) 7. 在座標平面上，若兩平行線 $2x+4y=k$ 與 $-x-2y=4$ 的距離為 $\sqrt{20}$，且 $k>0$，則 $k=$？ (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 28 。 代碼：g14098s1

答案：DDCAC BC

主題四　圓方程式

1.定義：

在坐標平面上，與一定點等距離之所有點所成之圖形，稱為圓。其中此定點稱為圓心，圓心與圓上任一點的距離稱為半徑。

2.標準式：

以$(h\ ,\ k)$為圓心，r為半徑之圓方程式為$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

3.一般式：

(1) 將圓的標準式經展開化簡後，可得$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，此方程式稱為圓的一般式。

(2) 將$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$配方可得$(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=(\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F})^2$

圓心為$(-\frac{D}{2}\ ,\ -\frac{E}{2})$，半徑$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

1 老師講解

求出下列圓方程式之圓心與半徑：

(1) $x^2+(y-2)^2=9$

(2) $(x+1)^2+(y-3)^2=16$

1 學生練習

求出下列圓方程式之圓心與半徑：

(1) $(x-1)^2+(y+3)^2=9$

(2) $(x+4)^2+y^2=12$

【代碼】g21a01m2

2 老師講解

求下列條件之圓方程式：

(1) 圓心$(-2,3)$，半徑5

(2) 圓心$(2,0)$，半徑$\sqrt{7}$

2 學生練習

求下列條件之圓方程式：

(1) 圓心$(1,-3)$，半徑爲6

(2) 圓心$O(3,-4)$，半徑$r=3\sqrt{2}$

【代碼】g21a01m3

3 老師講解

求下列圓方程式之圓心與半徑：

(1) $x^2+y^2-6x+4y+4=0$

(2) $4x^2+4y^2-4x+24y+33=0$

3 學生練習

求下列圓方程式之圓心與半徑：

(1) $x^2+y^2+6x-2y-6=0$

(2) $x^2+y^2-6y-7=0$

(3) $2x^2+2y^2-4x+8y+2=0$

【代碼】g21a01m4

3. 一般式：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

$D^2+E^2-4F>0$ 時，圖形為一圓，其圓心為 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$，半徑 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

$D^2+E^2-4F=0$ 時，圖形為一點，此點坐標為 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$

$D^2+E^2-4F<0$ 時，方程式無圖形

【基本練習】

試判斷下列各方程式的圖形：

(1) $x^2+y^2+2x-2y-2=0$

(2) $x^2+y^2+6x-8y+25=0$

(3) $x^2+y^2-2x+4y+10=0$

4 老師講解

若方程式 $x^2+y^2-4x+6y+k=0$ 表一圓，求 k 之範圍。

4 學生練習

若方程式 $x^2+y^2-2x+4y+k=0$ 表一點，求 k 之值。

【代碼】g21a02m3

4.直徑式：

設 $A(x_1\ ,\ y_1)$ ， $B(x_2\ ,\ y_2)$ 為平面上相異兩點，則以 $\overline{AB}$ 為直徑之圓方程式為

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

5 老師講解

求以 $(-3,1)$ 、 $(5,7)$ 爲直徑的圓方程式。

5 學生練習

已知一圓之直徑兩端點爲 $(1,2)$ 、 $(-2,3)$ ，求此圓方程式爲何？

【代碼】g21a03m2

5.參數式：

已知圓 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \Rightarrow (\frac{x-h}{r})^2+(\frac{y-k}{r})^2=1$ (利用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$)

$\Rightarrow \begin{cases} x=h+r\cos\theta \\ y=k+r\sin\theta \end{cases}$ ， $(0\le\theta<2\pi)$

6 老師講解

試求圓方程式 $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ 之參數式。

6 學生練習

試求圓方程式 $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ 之參數式。

【代碼】g21a05m2

7 老師講解

求以 $(-1,1)$ 爲圓心，過點 $(3,4)$ 之圓方程式。

7 學生練習

已知一圓過點 $(2,3)$ ，圓心爲 $x+y-2=0$ 與 $2x-y-10=0$ 的交點，求此圓方程式。

【代碼】g21a04m2

8 老師講解

求圓心爲 $(1,-2)$ 且與直線 $3x+4y-5=0$ 相切之圓方程式爲何？

8 學生練習

求圓心爲 $(3,3)$ 且與直線 $3x+y-2=0$ 相切之圓方程式爲何？

【代碼】g21b01m2

9 老師講解

已知一圓過三點 $(2,1)$ 、 $(-2,1)$ 、 $(1,4)$ ，求圓方程式。

9 學生練習

已知一圓過三點 $(1,4)$ 、 $(2,3)$ 、 $(1,3)$ ，求圓方程式。

【代碼】g21a04m3

10 老師講解

求過 $(2,2)$ 、 $(5,-1)$ ，且圓心在 x 軸上之圓方程式。

10 學生練習

求過 $(3,5)$ 、 $(4,-2)$ ，且圓心在 y 軸上之圓方程式。

【代碼】g21b02m2

【加強題】

1. 試求過 $A(2,1)$ 且與 x 軸、 y 軸均相切的圓方程式爲

2. 設 $P(1,2)$ 、 $Q(3,-4)$ ， $\overline{PQ}$ 爲圓之一弦，且距離圓心爲 $\sqrt{10}$ ，求此圓方程式爲

【學生練習答案】

1. (1) $O(1,-3)$ ， $r=3$ (2) $O(-4,0)$ ， $r=2\sqrt{3}$	2. (1) $(x-1)^2+(y+3)^2=36$ (2) $(x-3)^2+(y+4)^2=18$	
3. (1) $O(-3,1)$ ， $r=4$ (2) $O(0,3)$ ， $r=4$ (3) $O(1,-2)$ ， $r=2$	4. $k=5$	
5. $x^2+y^2+x-5y+4=0$	6. $\begin{cases} x=5\cos\theta+2 \\ y=5\sin\theta-3 \end{cases}$ ， $(0\le\theta<2\pi)$	
7. $(x-4)^2+(y+2)^2=29$	8. $(x-3)^2+(y-3)^2=10$	
9. $x^2+y^2-3x-7y+14=0$	10. $x^2+y^2-2y-24=0$	

回家功課

( ) 1. 已知一正方形的外接圓為 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$，則此正方形的面積為多少？ (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16 。 代碼：g21093s1

( ) 2. 已知圓 $C_1: x^2+y^2-2x+2y=2$ 及圓 $C_2: x^2+y^2-4y=5$，此兩圓圓心之間的距離為何？ (A) $\sqrt{10}$ (B) 4 (C) $\sqrt{22}$ (D) 5 。 代碼：g21099w2

( ) 3. 試問在坐標平面上，斜率為 $\frac{1}{2}$ 且通過 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 之圓心的直線方程式為何？ (A) $x-2y+5=0$ (B) $2x-y+5=0$ (C) $x+2y+5=0$ (D) $2x+y+5=0$ 。 代碼：g21096k1

( ) 4. 若方程式為 $x^2+y^2+6x-4y+c=0$ 之圖形為一點 (a,b)，則 $a+b+c$ 之值為 (A) 16 (B) 15 (C) 14 (D) 13 (E) 12 。 代碼：g21089g1

( ) 5. 在坐標平面上，圓心爲點 $(2,-3)$ 且通過點 $(-1,5)$ 的圓方程式為何？ (A) $x^2+y^2-4x+6y-60=0$ (B) $x^2+y^2+4x-6y+8=0$ (C) $x^2+y^2-4x+6y-50=0$ (D) $x^2+y^2+4x-6y-8=0$ 。 代碼：g21097s1

( ) 6. 試求圓心為 $(1,-2)$ 且與直線 $4x-3y=0$ 相切的圓方程式 (A) $x^2+y^2+4x-y=5$ (B) $x^2+y^2-2x-4y=5$ (C) $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ (D)以上皆非 。 代碼：g21210m1

( ) 7. 在座標平面上，$A(2,4)$、$B(2,-4)$、$C(8,-2)$ 為圓上相異三點的座標，若 $O(h,k)$ 為其圓心，則 $h+k=$？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：g21097k1

( ) 8. 試求平面上通過 $A(0,0)$，$B(6,6)$ 兩點，且圓心在 Y 軸上的圓方程式為何? (A) $x^2+y^2-12y=0$ (B) $x^2+y^2-6x-6y=0$ (C) $x^2+y^2-4x-8y=0$ (D) $x^2+y^2-8x-4y=0$ 。 代碼：g21091s2

( ) 9. 在坐標平面上，若不計單位，一圓之面積為圓周長 2 倍，則此圓半徑為何？ (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 。 代碼：g21094s1

( ) 10. 在坐標平面上，設圓心在第二象限上的圓與兩坐標軸相切，若圓心在直線 $3x+5y=14$ 上，則此圓的半徑為何？ (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 。 代碼：g21094k1

答案：CAAEA CDABD

主題五　點與圓、線與圓之關係

1.點與圓的關係：

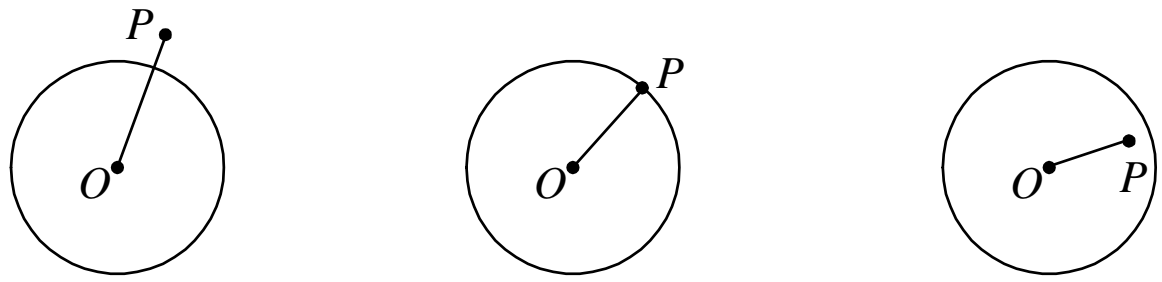
設點 $P(x_0, y_0)$，圓 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ($C:x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$)

圓心 $O(h,k)$ 與點 $P(x_0, y_0)$ 的距離為 $\overline{OP}=\sqrt{(x_0-h)^2+(y_0-k)^2}$，

(1) P 點在圓外 $\Leftrightarrow$ $\overline{OP}>r$ $\Leftrightarrow$ $(x_0-h)^2+(y_0-k)^2>r^2$ $\Leftrightarrow$ $x_0{}^2+y_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F>0$

(2) P 點在圓上 $\Leftrightarrow$ $\overline{OP}=r$ $\Leftrightarrow$ $(x_0-h)^2+(y_0-k)^2=r^2$ $\Leftrightarrow$ $x_0{}^2+y_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F=0$

(3) P 點在圓內 $\Leftrightarrow$ $\overline{OP}<r$ $\Leftrightarrow$ $(x_0-h)^2+(y_0-k)^2<r^2$ $\Leftrightarrow$ $x_0{}^2+y_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F<0$



P 點在圓外　　P 點在圓上　　P 點在圓內

【基本練習】

已知圓 $C:x^2+y^2+4x-2y+1=0$，則判斷下列各點在圓內、圓上或圓外？

(A) $(0,0)$　(B) $(-2,-1)$　(C) $(-3,1)$　(D) $(2,1)$

老師講解 1

設點 $(k+1,k-2)$ 在圓 $C:x^2+y^2=9$ 之內部，求 k 之範圍。

學生練習 1

若 $P(a,2a)$ 爲圓 $C:x^2+y^2-2x=0$ 外部一點，求 a 之範圍。

【代碼】g22a01m3

2.線與圓的關係：

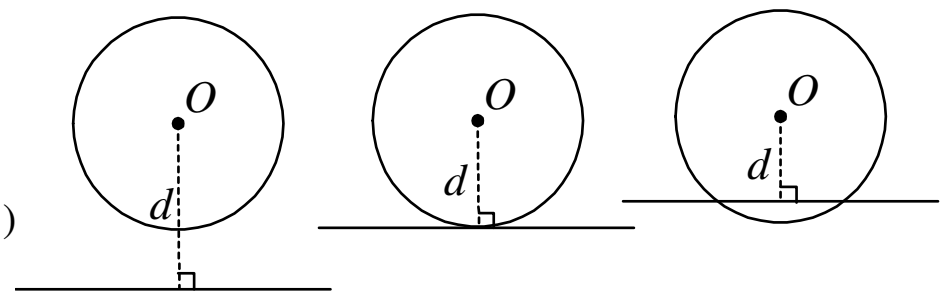
設直線 $L:ax+by+c=0$，圓 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

圓心 $O(h,k)$ 與直線 $L:ax+by+c=0$ 之距離為 $d=\dfrac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(1) $d>r$ $\Leftrightarrow$ L 與圓 C 不相交(相離)

(2) $d=r$ $\Leftrightarrow$ L 與圓 C 相切於一點(相切)

(3) $d<r$ $\Leftrightarrow$ L 與圓 C 相交於相異兩點(相割)



$d>r$　　$d=r$　　$d<r$

【基本練習】

判斷圓 C：$(x-2)^2+(y+3)^2=9$ 與 $L:3x-4y-3=0$ 之關係？

2 老師講解

若 $x+y+k=0$ 與 $x^2+y^2=2$ 的圖形有相交，求 k 的範圍。

2 學生練習

若 $k<0$，且直線 $3x-4y+k=0$ 與圓 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 的圖形相切，求 k 之值。

【代碼】g22a02m3

3 老師講解

若 $x^2+y^2+kx+6y+9=0$ 與 x 軸相切，求 k 之值。

3 學生練習

若 $2x^2+2y^2+5x+4y+k=0$ 與 y 軸相切，求 k 之值。

【代碼】g22b01m2

4 老師講解

求點 $A(1,5)$ 到圓 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ 的最近距離與最遠距離爲何？

4 學生練習

求一點 $A(-1,6)$ 到圓方程式 $x^2+y^2-4x-6y+11=0$ 之最近距離爲何？

【代碼】g22b02m2

5 老師講解

假設 P 為圓 $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ 上之一動點，求 P 到直線 $4x-3y+4=0$ 的最遠距離為何？

5 學生練習

假設 Q 為圓 $x^2+y^2-6y=0$ 上之一動點，求 Q 到直線 $3x+4y+8=0$ 的最遠距離為何？

【代碼】g22b03m2

6 老師講解

直線 $4x+3y-3=0$ 與圓 $x^2+y^2-4x=0$ 相交於 P 、Q 二點，求 $\overline{PQ}$ 之長。

6 學生練習

圓 $C: x^2+y^2-2x-2y-2=0$ 與直線 $L: x-y+2=0$ 交兩點，求此兩點之距離。

【代碼】g22b04m2

3.求切線：

(1) **過圓上一點求切線方程式：**

過圓 $C: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 上一點 $P(x_0, y_0)$

的切線方程式為 $x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + D \times \dfrac{x_0+x}{2} + E \times \dfrac{y_0+y}{2} + F = 0$

過圓 $C: (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 上一點 $P(x_0, y_0)$

的切線方程式為 $(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$

7 老師講解

求過圓 $C: x^2+y^2+2x-4y-5=0$ 上一點 $(2,1)$ 之切線方程式。

7 學生練習

求過圓 $C: x^2+y^2+x+y-12=0$ 上一點 $(2,-3)$ 之切線方程式。

【代碼】g23a01m2

(2) **已知斜率、點在圓外求切線：**

利用直線方程式的觀念假設切線方程式

利用圓心至切線之距等於半徑，求出直線方程式

8 老師講解

已知直線 L 的斜率爲 3，且與 $x^2+y^2=10$ 相切，求直線 L 之方程式。

8 學生練習

求垂直 $L: 3x-y+7=0$ 且與圓 C：$x^2+y^2=10$ 相切的直線方程式。

【代碼】g23a02m2

9 老師講解

求過 $P(2,1)$ 且與 $x^2+y^2=1$ 相切的直線方程式。

9 學生練習

求過點 $(3,1)$ 且與 $x^2+y^2=1$ 相切之直線方程式。

【代碼】g23b01m2

10 老師講解

自圓 $C: x^2+y^2=1$ 外一點 $P(1,3)$ 作圓切線，求其切線方程式。

10 學生練習

自圓 $x^2+y^2=9$ 外一點 $(3,4)$ 作圓切線，求其方程式。

【代碼】g23b02m2

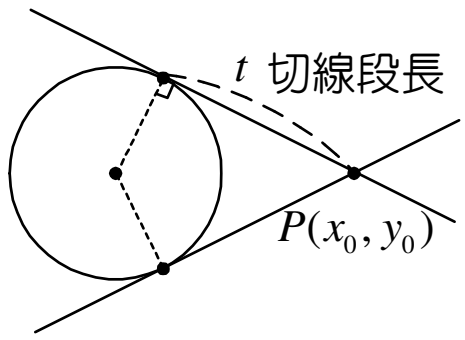
4.切線段長：

(1) 過圓 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 外一點 $P(x_0,y_0)$ 的切線段長

$$t=\sqrt{(x_0-h)^2+(y_0-k)^2-r^2}$$

(2) 過圓 $C:x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 外一點 $P(x_0,y_0)$ 的切線段長

$$t=\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+Dx_0+Ey_0+F}$$



老師講解 11

$P(2,3)$ 爲 $C:x^2+y^2+2x+2y-7=0$ 外一點，求自 P 向圓 C 所作的切線段長。

學生練習 11

求 $(3,1)$ 至 $C:x^2+y^2-3x+5y-3=0$ 所作切線段的長。

【代碼】g23a03m2

【加強題】

1. 設 P 爲圓 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ 上一動點，點 P 至點 $A(1,5)$ 之距離最遠爲_____，求 P 點坐標爲_____。

2. 在坐標平面上 $(7,5)$ 處有一光源，將圓 $x^2+(y-1)^2=1$ 投射到 x 軸的影長爲____。

3. 設直線過 $A(3,-4)$，且與圓 $C: x^2+y^2=16$ 相切於 P、Q 兩點，求：
(1)四邊形 $APOQ$ 的面積爲_____。 (2) $\overline{PQ}$ 的長度爲_____。

【學生練習答案】

1. $a<0$，$a>\frac{2}{5}$	2. -12	3. $k=2$	4. $2\sqrt{2}$
5. 7	6. $2\sqrt{2}$	7. $x-y-5=0$	8. $x+3y\pm10=0$
9. $\begin{cases} y-1=0 \\ 3x-4y-5=0 \end{cases}$	10. $\begin{cases} 7x-24y+75=0 \\ x=3 \end{cases}$	11. $\sqrt{3}$	

回家功課

( ) 1. 在坐標平面上，設 k 為整數，若點 $(k-4,k-2)$ 在圓 $(x+1)^2+(y-2)^2=13$ 的內部(不在圓上)，則 k 共有幾個？ 代碼：g22095s1
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

( ) 2. 已知直線 $L:3x+4y+5=0$ 與圓 $C:x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 兩者的交點個數為 a，且圓 C 的圓心到直線 L 的距離為 b，則下列何者為正確？ 代碼：g22099k1
(A) $a-b=-3$ (B) $a-b=-1$ (C) $a+b=4$ (D) $a+b=5$ 。

( ) 3. 在座標平面上，若圓 $x^2+4x+y^2-6y+k=0$ 與 x 軸相切，則 $k=$？ 代碼：g22098s1
(A) -6 (B) 2 (C) 4 (D) 8 。

( ) 4. 假設 P 爲圓 $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ 上之一動點，求 P 到直線 $4x-3y+4=0$ 的最遠距離爲 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：g22b03m1

( ) 5. 已知直線 $3x+4y+1=0$ 與圓 $x^2+y^2+2x-6y-5=0$ 交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB}=$？ 代碼：g22092k1
(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{11}$ (D) $4\sqrt{11}$ 。

( ) 6. 在座標平面上，設 m、b 為實數，若直線 $y=mx+b$ 與圓 $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ 相切於點 $(-1,1)$，則 $2m+b=$？ 代碼：g23097s1
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 。

( ) 7. 若直線 L 與圓 $x^2+y^2=9$ 相切與 $x+y-5=0$ 垂直，試求 L 之方程式 代碼：g23204m1
(A) $x-y\pm3=0$ (B) $x-y\pm3\sqrt{3}=0$
(C) $x-y\pm2\sqrt{3}=0$ (D) $x-y\pm3\sqrt{2}=0$ 。

( ) 8. 過點 $(-4,4)$ 作 $(x-3)^2+(y-3)^2=25$ 之切線 代碼：g23208m1
(A) $4x-3y+28=0$，$3x+4y-4=0$
(B) $3x-4y+28=0$，$4x+3y+4=0$
(C) $x-4y+20=0$，$4x+y+12=0$
(D) $3x-4y+6=0$，$4x-3y+1=0$ 。

( ) 9. 過圓上一點 $(5,-3)$ 作圓 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ 之切線爲 代碼：g23k07m1
(A) $3x-4y=27$ (B) $4x+3y=11$ (C) $3x+4y=13$ (D) $4x-3y=29$ 。

答案：DCCDC BDBA

歷屆試題

( ) 1. 設點 $(a,2)$ 落在 $(1,3)$ 與 $(2,5)$ 兩點的連線上，則 $a=$？
(A) -1 (B) -0.5 (C) 0.5 (D) 1。
代碼：g12100s1 (100 年統測 B)

( ) 2. 設直線 L 通過 $(3,4)$ 與 $(9,-4)$ 兩點，則原點 $(0,0)$ 與直線 L 的距離與下列何者最接近？ (A) 4 (B) 5 (C) 16 (D) 24。
代碼：g14100s1 (100 年統測 B)

( ) 3. 已知一圓方程式為 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$，則過點 $(0,1)$ 且與此圓相切的直線方程式可為下列何者？
(A) $x=0$ (B) $y=0$ (C) $y=1$ (D) $2x-y+1=0$。
代碼：g23100s1 (100 年統測 B)

( ) 4. 若直線 $24x-7y=53$ 與二直線 $x=0$、$x=7$ 分別交於 A、B 二點，則線段 $\overline{AB}$ 的長度為何？ (A) $\frac{24}{7}$ (B) $\frac{53}{7}$ (C) 25 (D) 53。
代碼：g12100k1 (100 年統測 C)

( ) 5. 設直線 L_1 的斜率為 -2 且通過點 $(0,-4)$，又直線 L_2 的 x、y 軸截距分別為 1、2，則下列何者正確？
(A) L_1 與 L_2 相交於點 $(2,-8)$ (B) L_1 與 L_2 相交於點 $(4,-6)$
(C) L_1 與 L_2 平行且兩線相距 $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (D) L_1 與 L_2 平行且兩線相距 $\frac{6}{\sqrt{5}}$。
代碼：g14100k1 (100 年統測 C)

( ) 6. 已知一圓方程式為 $x^2+y^2+6x-8y=0$。下列敘述何者正確？
(A)點 $(1,0)$ 落在圓外 (B)此圓通過點 $(-3,4)$ (C)此圓的半徑為 25
(D)此圓的圓心為 $(0,0)$。
代碼：g22100k1 (100 年統測 C)

( ) 7. 直線 L_1，L_2 方程式分別為 $L_1:4x+(m-1)y=15$，$L_2:(2m+3)x+6y=7$，且 L_1 垂直 L_2，則 m 之值為何？ (A) $-\frac{13}{7}$ (B) $-\frac{7}{6}$ (C) $-\frac{3}{7}$ (D) $-\frac{3}{8}$
代碼：g12101s1 (101 年統測 B)

( ) 8 直線 $L_1:2x-y-1=0$，$L_2:x+3y-4=0$，$L_3:x+ay+3=0$，若 L_1、L_2、L_3 三直線相交於一點，則 a 之值為何？ (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4
代碼：g13101s1 (101 年統測 B)

( ) 9. 已知圓的面積為 9π，圓的方程式為 $2x^2+2y^2-4x+4y+k=0$，則 k 之值為何？ (A) -7 (B) -14 (C) -21 (D) -28。
代碼：g21101s1 (101 年統測 B)

Chapter 5 直線與圓

( ) 10. 若直線 $L: x-y=1$ 與圓 $C: x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 交於 A、B 兩點，則線段 $\overline{AB}$ 之長為何？ (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$。
代碼：g22101s1 (101 年統測 B)

( ) 11. 平面上四點 $A(1,1)$、$B(a,2)$、$C(b,-1)$、$D(0,-2)$，其中 b 為正數，若 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 互相平行，且 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 互相垂直，求 $a+2b$ 之值為何？ (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10。
代碼：g12101k1 (101 年統測 C)

( ) 12. 設 $P(-2,4)$ 與 $Q(2,-2)$，若直線 $L: ax+3y+b=0$ 為 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線，求 $a+b$ 之值為何？ (A) $-\frac{15}{2}$ (B) -5 (C) -1 (D) $\frac{3}{2}$。
代碼：g13101k1 (101 年統測 C)

( ) 13. 設兩直線 $L_1: 3x+y-4=0$ 與 $L_2: x+3y-4=0$，則 L_1 與 L_2 交角為銳角的角平分線方程式為何？
(A) $x+y-2=0$ (B) $x-y=0$ (C) $2x+y-3=0$ (D) $2x-y=0$。
代碼：g15101k1 (101 年統測 C)

( ) 14. 設直線 $L: kx+3y+10=0$ 與圓 $C: x^2+y^2=4$ 沒有交點，則常數 k 的範圍為何？ (A) $-4<k<4$ (B) $-2<k<2$ (C) $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ (D) $k<-\sqrt{2}$ 或 $k>\sqrt{2}$。
代碼：g22101k1 (101 年統測 C)

( ) 15. 已知 $y=2^x$ 的圖形通過圓 $C: x^2+y^2-2ay=0$ 之圓心。若圓與直線 $L: y=\frac{3x+k}{4}$ 相切，求 $\log_2 a+\log_5(k-4)^2$ 之值為何？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。
代碼：g23101k1 (101 年統測 C)

( ) 16. 已知直角坐標平面兩點 $A(-4,-1)$、$B(-5,4)$，且 C 為線段 $\overline{AB}$ 上的點若 O 為原點，則下列何者可能為 $\overleftrightarrow{OC}$ 的直線方程式？
(A) $y=-2x$ (B) $y=-x$ (C) $y=0.2x$ (D) $y=x$。
代碼：g12102s1 (102 年統測 B)

( ) 17. 已知直角坐標平面上有三點 $A(3,1)$、$B(5,-2)$、$C(-7,3)$，求點 A 到直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的距離 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。
代碼：g14102s1 (102 年統測 B)

( ) 18. 若 a、b 為實數。若直線 $2x+ay+b=0$ 通過 $10x-2y+5=0$ 與 $6x-y+7=0$ 之交點，且斜率為 2，則 $a+b=$？
(A) -12 (B) -10 (C) 10 (D) 12。
代碼：g13102k1 (102 年統測 C)

5-33

( ) 19. 已知 L_1 、 L_2 爲與直線 $3x+4y=0$ 平行的二直線。若 L_1 過點 $(-29,23)$ ，L_2 過點 $(31,23)$ ，則此二平行線間的距離爲何？
(A) 23 (B) 36 (C) 48 (D) 60 。
代碼：g14102k1 (102 年統測 C)

( ) 20. 平面上三點 $A(5,0)$ ， $B(1,-12)$ 及 $C(-4,-7)$ ，若 $D(x,y)$ 爲線段 $\overline{AB}$ 上一點且線段 $\overline{CD}$ 垂直於 $\overline{AB}$ ，則 $x+y=$ ？
(A) -4 (B) -5 (C) -6 (D) -7 。
代碼：g12103s1 (103 年統測 B)

( ) 21. 已知平面上有一圓 $C:(x-a)^2+y^2=1$ 與直線 $L:y=x$ 相交於兩點，則 a 可能爲下列何者？ (A) $a=-2$ (B) $a=1$ (C) $a=2$ (D) $a=3$ 。
代碼：g22103s1 (103 年統測 B)

( ) 22. 設 $A(0,0)$ ， $B(2,2)$ 爲平面上兩點，點 $P(m,n)$ 在線段 $\overline{AB}$ 上，$\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$ ，則 $m+n$ 之值爲何？
(A) 2 (B) 2.5 (C) 3 (D) 3.5 。
代碼：g11103k1 (103 年統測 C)

( ) 23. 若通過 $A(1,1)$ 和 $B(3,k)$ 兩點的直線其斜率爲 3 ，則 $k=$ ？
(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 。
代碼：g12104s1 (104 年統測 B)

( ) 24. 若圓 $C:x^2-2kx+y^2-2y=4$ 的半徑爲 3 ，且圓心 (a,b) 在第一象限，則 $a+b=$ ？ (A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 8 。
代碼：g21104s1 (104 年統測 B)

( ) 25. 已知 $P(a,1)$ 、 $Q(-1,b)$ 爲平面上兩點。若 P 爲直線 $L:3x-4y=2$ 上一點且直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與直線 L 垂直，則 $a+b=$ ？ (A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13 。
代碼：g13104k1 (104 年統測 C)

( ) 26. 已知 ΔABC 的三頂點爲 $A(-1,2)$ 、 $B(-3,-3)$ 、 $C(3,-1)$ ，則 $\overline{AB}$ 邊上的中線長爲何？ (A) $\frac{\sqrt{26}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{71}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{101}}{2}$ (D) $\sqrt{26}$ 。
代碼：g11105s1 (105 年統測 B)

( ) 27. 已知直線 L 過點 $(1,3)$ ，且與 x 軸、 y 軸在第二象限圍出一個等腰直角三角形，則下列何者爲直線 L 的方程式？
(A) $x-y=-2$ (B) $x+y=-2$ (C) $2x-2y=1$ (D) $x+y=2$ 。
代碼：g13105s1 (105 年統測 B)

( ) 28. 若直線 $3x-2y+6=0$ 的斜率爲 a，y 截距爲 b，x 截距爲 c，且此直線與兩坐標軸所圍成的封閉區域面積爲 d，求 $ab-cd$ 之值 (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{9}{2}$ (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{21}{2}$。 代碼：g13105k1 (105 年統測 C)

( ) 29. 已知圓的方程式爲 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$；直線方程式爲 $x+y-1=0$，若圓和直線的交點分別爲 A 與 B，圓心爲 O，則下列何者正確？ (A) $\overline{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B)圓心 O 到直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離爲 $\frac{1}{2}$ (C)圓心 O 與 A，B 形成的三角形 ΔABO 面積爲 $\frac{1}{2}$ (D)交點 A、B 的坐標分別爲 $(-1,0)$，$(0,1)$。 代碼：g22105k1 (105 年統測 C)

( ) 30. 在坐標平面上，若直線 L 通過兩點 $A(2,a)$，$B(a,5)$，且直線 L 的斜率爲 2，則 $a=$？ (A) -2 (B) 1 (C) 2 (D) 3。 代碼：g12106s1 (106 年統測 B)

( ) 31. 設打水漂遊戲中石頭落入水中的漣漪是以圓的形式展現。若某人向河面擲出石頭的方向是沿著直線 $y=x-1$ 行進，下列哪一個圓方程式可爲此漣漪的形式? (A) $x^2-2x+y^2+4y+1=0$ (B) $x^2-4x+y^2-2y+4=0$ (C) $x^2-2x+y^2-4y+4=0$ (D) $x^2-4x+y^2-6y+9=0$。 代碼：g21106k1 (106 年統測 C)

( ) 32. 在坐標平面上，若直線 L 的方程式爲 $ax-y=3$，其中 $a\neq 0$ 且經過點 $(1,2)$，則直線 L 的斜率爲何? (A) 5 (B) 3 (C) -3 (D) -5。 代碼：g13107s1 (107 年統測 B)

( ) 33. 若 $x^2+y^2+kx+2y+k+1=0$ 表示一圓，則 k 的範圍爲何? (A) $2<k<4$ (B) $0<k<3$ (C) $k<2$ 或 $k>3$ (D) $k<0$ 或 $k>4$。 代碼：g21107s1 (107 年統測 B)

( ) 34. 已知直線 L_1 通過 $(2,3)$、$(1,5)$ 兩點，且直線 L_2 的 x 截距是 1、y 截距是 4。若 L_1 與 L_2 的斜率分別爲 m_1 與 m_2，則下列何者正確? (A) $0<m_1<m_2$ (B) $m_1<0<m_2$ (C) $m_2<0<m_1$ (D) $m_2<m_1<0$。 代碼：g13107k1 (107 年統測 C)

( ) 35. 若兩直線 $3x+4y=6$ 與 $9x+12y=k$ 的距離爲 2，則 k 的值可能爲下列何者? (A) -48 (B) -12 (C) 10 (D) 24。 代碼：g14107k1 (107 年統測 C)

( ) 36. 設點 O_1 爲圓 $C: x^2+y^2-6x+4y+9=0$ 之圓心。今以另一點 O_2 爲圓心、$\overline{O_1O_2}$ 爲半徑作一圓，且此圓與圓 C 交於 A 、 B 兩點。若 $\overline{AO_2}=3$，則 $\overline{AB}=?$ (A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ 。 代碼：g22107k1 (107 年統測 C)

( ) 37. 設 $P(x,y)$ 爲圓 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 上的動點，若 $4x+3y+5$ 的最大值爲 M ，最小值爲 m ，則 $M+m=?$ (A) -5 (B) 0 (C) 5 (D) 10 。 代碼：g22107k2 (107 年統測 C)

( ) 38. 已知直線 L 之斜率爲 2 ， x 截距爲 3 。試問 L 與兩坐標軸所包圍三角形之面積爲何? (A) $\frac{9}{4}$ (B) $\frac{9}{2}$ (C) 6 (D) 9 。 代碼：g13108s1 (108 年統測 B)

( ) 39. 已知一圓方程式 $x^2+y^2-2x-6y+9=0$ 。若直線 $y=b$ 與該圓有交點，則下列敘述何者正確?
(A) $b\ge 5$ (B) $b\le -4$ (C) $-1\le b\le 1$ (D) $2\le b\le 4$ 。 代碼：g22108s1 (108 年統測 B)

( ) 40. 已知坐標平面上三直線 $L_1: 3x+3y=2$、$L_2: 2x-3y=3$、$L_3: x-ay=-2$，且這三直線將平面分成六個區域，則 a 不可以是下列哪一個值?
(A) $\frac{3}{2}$ (B) 1 (C) -1 (D) -9 代碼：g13108k1 (108 年統測 C)

( ) 41. 已知坐標平面上三直線 L 、 L_1 與 L_2 ，若直線 L 爲水平線， L_1 與 L_2 的斜率分別爲 $\frac{2}{3}$ 與 $-\frac{3}{2}$ ，且直線 L 被 L_1 與 L_2 所截出的線段長爲 26 ，則此三直線所圍成的三角形面積爲多少平方單位?
(A) 39 (B) 52 (C) 78 (D) 156 。 代碼：g13108k2 (108 年統測 C)

( ) 42. 若 A 、 B 兩點分別是拋物線 $y=x^2$ 與直線 $x=-3$ 、 $x=1$ 的交點，則直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與下列哪一條直線平行？
(A) $y=-2x$ (B) $y=\frac{-1}{2}x$ (C) $y=\frac{1}{2}x$ (D) $y=2x$ 。 代碼：g12109s1 (109 年統測 B)

( ) 43. 已知圓 $C: (x-3)^2+(y-2)^2=1$ 。若點 P 是圓 C 上一點，則 P 到直線 $L: 3x+4y+8=0$ 的最短距離爲何?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：g22109s1 (109 年統測 B)

( ) 44. 若 k 爲實數，且點 $P(1,k)$ 爲曲線 $kx^2+y^2+2x-4y+k-1=0$ 上之一點，求曲線之圖形爲何? (A)圓 (B)拋物線 (C)橢圓 (D)雙曲線 。 代碼：g22109k1 (109 年統測 C)

( ) 45. 若圓 $C: x^2+y^2-8x+6y=0$，則圓 C 之直徑為何？ 代碼：110tcb07
(A)6 (B)8 (C)10 (D)12 。 (110 年統測 B)

( ) 46. 若直線 $L_1: y=mx+b$ 與直線 $L: 2x+3y=1$ 平行，且直線 L_1 與 x 軸的交點之 x 坐標為 2，則下列何者正確？ 代碼：110tcb12
(110 年統測 B)
(A) $m+b=\frac{2}{3}$ (B) $m+b=6$ (C) $m\times b=\frac{2}{3}$ (D) $m\times b=9$ 。

( ) 47. 若圓 $C_1: x^2+y^2-2x+2y=0$、圓 $C_2: x^2+y^2-4x+4y=0$，則直線 $L: x-y-4=0$ 與兩圓 C_1、C_2 共有幾個交點？ 代碼：110tcb13
(110 年統測 B)
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 。

( ) 48. 若圓 C 與 y 軸相切，且圓心為拋物線 $y=x^2+4x+5$ 之頂點，則下列何者為圓 C 的方程式？ 代碼：110tcc08
(110 年統測 C)
(A) $x^2+y^2+4x-2y+4=0$ (B) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$
(C) $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ (D) $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 。

( ) 49. 已知 a、b 為實數。若直線 $L_1: y=ax+b$ 與 $L_2: y=bx+a$ 相互垂直，且 $a^2+b^2=50$，則 L_1 與 L_2 的交點與原點的距離為多少？ 代碼：110tcc13
(110 年統測 C)
(A) $4\sqrt{3}$ (B)7 (C) $5\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{13}$ 。

( ) 50. 若過 $A(3,-a)$、$B(1,10)$ 兩點之直線與直線 $L: y=2ax+7$ 平行，則 $a=$？ (A)4 (B)2 (C) -2 (D) -4 。 代碼：111tcb04
(111 年統測 B)

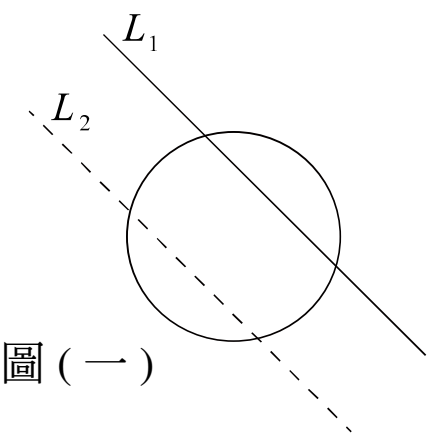
( ) 51. 若直線 $L_1: ax+2y+12=0$ 與直線 $L_2: 2x-8y-6=0$ 垂直，則點 $(1,-9)$ 到直線 L_1 的距離為何？ 代碼：111tcb05
(111 年統測 B)
(A) $\frac{\sqrt{23}}{23}$ (B) $\frac{\sqrt{21}}{21}$ (C) $\frac{\sqrt{19}}{19}$ (D) $\frac{\sqrt{17}}{17}$ 。

( ) 52. 若圓 $x^2+y^2-6x+2ay-7=0$ 的圓心在 x 軸上，則此圓的面積為何？ 代碼：111tcb07
(111 年統測 B)
(A) 4π (B) 16π (C) 49π (D) 64π 。

( ) 53. 已知直角三角形的三個頂點為 $A(1,2)$、$B(4,7)$、$C(a,5)$，且 $\overline{BC}$ 為斜邊，則 $a=$？ (A) -4 (B) -3 (C)3 (D)4 。 代碼：111tcb08
(111 年統測 B)

( ) 54. 若 $A(1,4)$、$B(6,2)$ 所連接的線段 $\overline{AB}$ 與直線 $L: x-y+1=0$ 相交於 P 點，則 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=$？ (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{7}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{5}$ 。 代碼：111tcc07
(111 年統測 C)

(　　) 55. 已知圓 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 與相異直線 $L_1: x+y+1=0$ 及 $L_2: ax+by+10=0$ 分別於兩點，且 $L_1 // L_2$，如圖(一)所示。若此圓圓心到兩直線 L_1、L_2 的距離相等，則 $a+b=$？
(A)2　(B)4　(C)6　(D)10　。



圖(一)

代碼：111tcc09
(111 年統測 C)

答案：　CBACD　ACABA　DBAAB　CBABD　BCCAA　CADCD　BADDB　DDDDB
DADAC　ACDBC　DBAAB

綜合練習

( ) 1. 已知 $A(2,1)$、$B(6,3)$、$C(k,5)$ 三點在坐標平面上無法構成一個三角形，則 $k=$？ (A)8 (B)10 (C)12 (D)14。 代碼：g12091s1

( ) 2. 在坐標平面上，若兩直線 $L_1: my=2x+1$ 與 $L_2: 2y=3x+1$ 互相垂直，則 $m=$？ (A)$-\frac{3}{4}$ (B)-3 (C)$-\frac{4}{3}$ (D)-1。 代碼：g12098s1

( ) 3. 在坐標平面上，設 a、b 爲實數，若 A、B 兩點的坐標分別爲 $(a,1)$、$(b,3)$，且線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分線爲 $2x+y=4$，則 $2a+b=$？ (A)1 (B)2 (C)-1 (D)-2。 代碼：g13097k1

( ) 4. 設過點 $(1,2)$ 且平行 $2x+3y=1$ 的直線爲 $ax+by=1$，則 $a-b=$？ (A)$-\frac{1}{8}$ (B)$-\frac{1}{4}$ (C)$\frac{3}{8}$ (D)$\frac{1}{2}$。 代碼：g13092s1

( ) 5. 設三直線 $L_1: x+3y-2=0$，$L_2: 3x+y+2=0$，$L_3: x-y-2=0$，且 L_1 與 L_2 相交於 A 點，則過 A 點且與 L_3 平行的直線，<u>不通過</u>哪一個象限？ (A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限。 代碼：g13099k1

( ) 6. 已知平行四邊形的二邊在直線 $2x+3y-7=0$ 與 $x-3y+4=0$ 上面，一頂點爲 $(1,1)$，則另二邊所在直線方程式爲
(A) $2x+3y+5=0$ 與 $x-3y+2=0$ (B) $2x+3y-5=0$ 與 $x-3y-2=0$
(C) $2x+3y+5=0$ 與 $x-3y-2=0$ (D) $2x+3y-5=0$ 與 $x-3y+2=0$ 代碼：g13215m1

( ) 7. 在坐標平面上，過點 $(2,-1)$ 且與直線 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ 垂直的直線方程式爲何？
(A) $4x-3y=9$ (B) $4x-3y=10$ (C) $3x-4y=9$ (D) $3x-4y=10$。 代碼：g13095k1

( ) 8. 設直線 L 的斜率爲 2 且在 x 軸之截距爲 3，請問下列哪一點在直線 L 上？ (A) $(5,5)$ (B) $(6,6)$ (C) $(7,7)$ (D) $(8,8)$。 代碼：g13095k2

( ) 9. 下列敘述何者錯誤？ (A)直線 $L: x+2y=4$ 的斜率爲 $-\frac{1}{2}$ 代碼：g13098k1
(B)方程式 $x=4$ 的圖形是一條通過點 $(4,5)$，且平行 y 軸的直線
(C)通過點 $A(1,2)$、$B(-2,3)$ 的直線方程式爲 $3x-y-1=0$
(D)當點 $A(-1,1)$、$B(2,x)$、$C(3,11)$ 爲共線的三點時，則 $x=\frac{17}{2}$。

( ) 10. 若兩點 $A(0,0)$、$B(a,b)$ 對稱於直線 $x-2y=5$，則 $a-b=$？ 代碼：g13092k1
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8。

( ) 11. $L: ax+by-2=0$ 過 $(-2,2)$ 且與二軸在第 I 象限所圍成三角形面積爲1，求 $a+b=$？ (A) -1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。 代碼：g13218m1

( ) 12. ΔABC 中，點 $A(-2,3)$，點 B 和點 C 位於直線 $4x-3y+2=0$ 上，且 $\overline{BC}$ 的長度爲4，試問 ΔABC 的面積爲何？ (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10。 代碼：g14091s1

( ) 13. 設 $L: 6x+8y-3=0$ 爲一直線，則下列方程式中何者與 L 平行，且與 L 之距離爲 $\frac{5}{2}$？ (A) $3x+4y-28=0$ (B) $3x+4y+11=0$ (C) $6x+8y-19=0$ (D) $6x+8y+19=0$。 代碼：g14092k1

( ) 14. 若圓 $C: x^2+6ax+y^2=64$ 的面積爲 100π，則 a 可以是下列中的哪一個？ (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 4。 代碼：g21090s1

( ) 15. 一邊長爲 a 之正方形與一圓有相同周長，設圓面積爲 A，則下列何者正確？ (A) $A=\frac{4a^2}{\pi^2}$ (B) $A=\frac{a^2}{\pi}$ (C) $A=a^2$ (D) $A=\frac{4a^2}{\pi}$。 代碼：g21101w1

( ) 16. 若圓 C 的方程式爲 $x^2+y^2-6x-4y+4=0$，則下列各方程式的圖形，何者與圓 C 相切？ (A) $3x+4y-1=0$ (B) $3x+4y-2=0$ (C) $3x+4y-7=0$ (D) $3x+4y-14=0$。 代碼：g22098k1

( ) 17. 設 $a>0$，若圓 $x^2+y^2+2ax-1=0$ 與直線 $x+y=3$ 相切，則 $a=$？ (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7。 代碼：g22092s1

( ) 18. 設 a 爲實數，且直線 $3x+4y+1=0$ 與圓 $(x-a)^2+y^2=4$ 沒有交點，則 a 可能爲下列哪一個數？ (A) -3 (B) -2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：g22104w1

( ) 19. 設圓 $x^2+y^2-2x+2y+k=0$ (其中 k 爲常數)與直線 $x-2=0$ 相切，則 k 爲何？ (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 。 代碼：g22101w1

( ) 20. 圓 $C: x^2+y^2-4x-2y-20=0$ 與直線 $L: 3x+4y+5=0$ 相交於 A 、 B 兩點，設圓 C 的圓心爲 P ，則 ΔPAB 面積爲 (A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 20 。 代碼：g22204m1

( ) 21. 有一圓 $C: x^2+y^2+2x-4y-4=0$ ，其一弦 $\overline{AB}$ 之中點坐標爲 $(1,1)$ ，則弦 $\overline{AB}$ 的長爲 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：g22205m1

( ) 22. 設點 P 在圓 $O: x^2+y^2=1$ 上移動， P 點與直線 $L: 3x+4y+4=0$ 最長距離爲 M ，最短距離爲 m ，則 $M-m=$ ？ (A) 0 (B) 1.6 (C) 1.8 (D) 2 。 代碼：g22102w1

( ) 23. 設 m 、 b 爲實數，直線 $y=mx+b$ 過 $(-1,1)$ 且與圓 $x^2+y^2-6x+2y-10=0$ 相切，則 $m+b=$ ？ (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 。 代碼：g23096s1

( ) 24. 設直線 L 與圓: $x^2+y^2+6x+4y=12$ 相切於點 $(-6,2)$ ，則點 $(1,1)$ 到直線 L 的距離爲何？ (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 。 代碼：g23099s1

( ) 25. 已知過點 $P(-2,1)$ 可作兩條直線與圓 $x^2+y^2=1$ 相切。若此兩直線的斜率分別爲 m_1 及 m_2 ，求 $m_1+m_2=$ ？ (A) $-\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$ 。 代碼：g23099p1

( ) 26. 過點 $A(3,4)$ 作圓 $x^2+y^2=9$ 之二切線，切點爲 P ， Q ，圓心爲 O ，求 $\overline{PQ}=$ (A) $\frac{12}{5}$ (B) $\frac{24}{5}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{15}{2}$ 。 代碼：g23211m1

( ) 27. 圓心在原點的兩個同心圓，面積分別爲 75π 和 27π 。設 P 點在第一象限。若 P 點到大圓、小圓、 X 軸的距離均相等，則 P 點的坐標爲。 (A) $(3\sqrt{3},\sqrt{5})$ (B) $(5\sqrt{3},\sqrt{5})$ (C) $(3\sqrt{5},\sqrt{3})$ (D) $(5\sqrt{3},\sqrt{3})$ 。 代碼：r13085c1

( ) 28. 坐標平面上的圓 $C:(x-7)^2+(y-8)^2=9$ 上有幾個點與原點的距離正好是整數值 (A)10 (B)11 (C)12 (D)13。 代碼：r13093c1

( ) 29. 坐標平面上，一圓與直線 $x-y=1$ 以及直線 $x-y=5$ 所截的弦長皆爲 14。則此圓的面積 (A) 47π (B) 51π (C) 53π (D) 57π。 代碼：r13102c1

( ) 30. 坐標平面上兩圖形 Γ_1,Γ_2 的方程式分別爲：$\Gamma_1:(x+1)^2+y^2=1$、$\Gamma_2:(x+y)^2=1$。請問 Γ_1,Γ_2 共有幾個交點？
(A)1 個 (B)2 個 (C)3 個 (D)4 個。 代碼：r13105c1

答案：BBAAD DDBCC CBBAD BDDCB DCBDA BCCBB

單元 6　數列級數

主題一　等差數列與等差級數

1. 數列與級數的意義：

(1) 數列：

依照順序列出來一系列的數，就構成一個數列。通常以$<a_n>$表示n項數列

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$。其中第一項$a_1$稱為首項，第$n$項$a_n$稱為末項

①有限數列：數列之項數為有限個時，即$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$

②無窮數列：數列之項數為無限多個時，即$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots$

(2) 級數：

將一數列各項以『+』號予以連接起來所成的式子，就為級數。

①有限級數：$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

②無窮級數：$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

(3) 設S_n表示一級數前n項之和，即$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$，則$\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1} \ (n \geq 2) \end{cases}$

老師講解 1

若一數列$<a_n>$，其中$a_n = n^2 - 3n$，
試寫出它的前四項。

學生練習 1

有一數列$<a_n>$，$a_n = n^2 + 2n$，
試解出其前三項，及第十項。

【代碼】a52a01m2

老師講解 2

已知一數列前n項和$S_n = n^2 - 2n$，試求：
(1) S_5　(2) a_5　(3) $a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{10}$

學生練習 2

已知一數列前n項和$S_n = 2n^2 + n$，試求：
(1) S_8　(2) a_8　(3) $a_{10} + a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20}$

【代碼】a52a01m3

(4) $\sum$ 的運算法則：

① $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

② $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

③ $\sum_{k=1}^{n}(c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$

④ $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n\text{ 項}} = n \cdot c$

3 老師講解

試求下列各式之值：(1) $\sum_{k=2}^{5}(2k-1)$ (2) $\sum_{k=1}^{10} 3$

3 學生練習

試求下列各式之值：(1) $\sum_{k=3}^{5}(k^2+1)$ (2) $\sum_{k=3}^{9} 5$

【代碼】a52a02m2

4 老師講解

設 $\sum_{k=1}^{12} a_k = 20$，$\sum_{k=1}^{14} b_k = 18$，$a_{13} = 3$，$b_{14} = 4$

試求 $\sum_{k=1}^{13}(3a_k - 2b_k + 5)$ 之值。

4 學生練習

設 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 25$，$\sum_{k=1}^{11} b_k = 15$，$a_{11} = 3$，

試求 $\sum_{k=1}^{11}(a_k - 2b_k + 1)$ 之值。

【代碼】a52b01m2

5 老師講解

若 $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=n^2-75$，試求 $\sum_{i=10}^{30}a_i$ 之值。

5 學生練習

若 $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=n^2-19$，試求 $\sum_{i=5}^{20}a_i$ 之值。

【代碼】a52b02m2

(5) $\sum$ 的常用公式：

① $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

④ $\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2})$

6 老師講解

試求級數 $\sum_{k=8}^{15}k^2$ 之和。

6 學生練習

試求級數 $\sum_{k=10}^{20}k^2$ 之和。

【代碼】a52a03m2

7 老師講解

試求下列各級數之和。

(1) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{9\cdot10}$

(2) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{19\cdot21}$

7 學生練習

試求下列各級數之和。

(1) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100}$

(2) $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{4\cdot6}+\frac{1}{6\cdot8}+\cdots+\frac{1}{18\cdot20}$

【代碼】a52a03m3

2. 等差數列與等差級數：

(1) 數列$<a_n>$中，若$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=d$，則稱此數列為等差數列，$d$稱為公差。此時$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$稱為等差級數

(2) 常用公式：

① $a_n=a_1+(n-1)d$

② $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$

③ a、b、c成$A.P.$，則$2b=a+c$

8 老師講解

一等差數列的首項為3，公差為5，求第十項為何？

8 學生練習

一等差數列的首項為5，第15項為47，求此數列之公差。

【代碼】a51a01m2

9 老師講解

等差數列第3項為10，第15項為46，求第23項。

9 學生練習

已知一等差數列之第5項為13，第11項為37，求第16項。

【代碼】a51a01m3

10 老師講解

在-1與29之間插入9個數字，使其成等差數列，求此9個數之和。

10 學生練習

在-5與27之間插11個數字，使其成等差數列，求此11個數之和。

【代碼】a51a02m2

11 老師講解

試求140到250之間的整數中，所有3的倍數總和。

11 學生練習

試求20到200之間的整數中，所有7的倍數總和。

【代碼】a51b01m2

12 老師講解

設等差級數之首項爲5，公差爲2，和爲117，求此級數的項數。

12 學生練習

等差數列之首項爲10，公差爲5，和爲220，求此級數的項數。

【代碼】a51a02m3

13 老師講解

有一等差級數，第5項爲88，第8項爲79，試求此級數總和最大值爲多少？

13 學生練習

數列$<a_k>$爲一等差數列，已知$a_7=75$，$a_{11}=59$，若S_n表此數列的前n項總和，試求S_n的最大值。

【代碼】a51b02m2

【學生練習答案】

1. $a_1=3$，$a_2=8$，$a_3=15$，$a_{10}=120$		2. (1)136 (2)31 (3)649	
3. (1)53 (2)35	4. 9	5. 384	6. 2585
7. (1)$\frac{99}{100}$ (2)$\frac{9}{40}$	8. 3	9. 57	10. 121
11. 2821	12. 8	13. 1275	

回家功課

( ) 1. 設一數列為1，$\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\frac{\sqrt{3}}{9}$，…，$\frac{\sqrt{n}}{n^2}$，…，即 $a_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2}$，則 $a_4+a_9=$ 代碼：a52201m1
(A) $\frac{19}{216}$ (B) $\frac{25}{216}$ (C) $\frac{35}{216}$ (D) $\frac{13}{216}$ 。

( ) 2. 求 $10^2+11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2$ 的總和值為 代碼：a52210m1
(A) 3600 (B) 2585 (C) 3850 (D) 2520 。

( ) 3. 求 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}$ 的值等於 代碼：a54202m1
(A) $\frac{7}{11}$ (B) $\frac{19}{22}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{10}{11}$ 。

( ) 4. 設 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$，則 $\sum_{x=1}^{35}\frac{1}{f(x)}=$ 代碼：a54205m1
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 。

( ) 5. 設 $a_1,a_2,...,a_n$ 為一 n 項等差數列，若第 9 項為 58 且第 15 項為 100，則 674 為等差數列的第幾項？ (A) 94 (B) 95 (C) 96 (D) 97 。 代碼：a51097s1

( ) 6. 等差級數共有 25 項，公差為 $-\frac{3}{4}$，又知第 17 項為 21，則此等差級數的和為何？ (A) 550 (B) 600 (C) 625 (D) 650 。 代碼：a51096s1

( ) 7. 試求 140 到 250 之間的整數中，所有 3 的倍數總和爲 代碼：a51b01m1
(A) 7215 (B) 7313 (C) 7445 (D) 7555 。

( ) 8. 若數列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 的第 n 項 $a_n=\frac{2n}{3}$，則 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$ 之值為何？ (A) 106 (B) $\frac{320}{3}$ (C) $\frac{520}{3}$ (D) 140 。 代碼：a51098s1

( ) 9. 一等差級數，前 n 項和 $S_n=5n^2-3n$，則 $a_{30}=$ 代碼：a51204m1
(A) 218 (B) 242 (C) 272 (D) 292 。

( ) 10. 求 $\sum_{k=1}^{30}(3k-2)=$？ (A) 1320 (B) 1325 (C) 1330 (D) 1335 。 代碼：a52099s1

( ) 11. 若有三個連續正整數，其平方和為 302，則三數之積為 代碼：a51088z2
(A) 900 (B) 990 (C) 800 (D) 890 。

答案：CBDBD BADDD B

主題二　等比數列與等比級數

1. 等比數列與等比級數：

(1) 數列$<a_n>$中，若$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=r$，則稱此數列為等比數列，

r稱為公比。此時$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$稱為等比級數

(2) 常用公式：

① $a_n=a_1r^{n-1}$ (r為公比)　② $S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$　③若a、b、c成$G.P.$，則$b^2=ac$

1 老師講解

設一等比數列，首項為10，公比為2，
試求：　(1)第十項　(2)前十項總和

1 學生練習

若等比數列之首項為64，公比為$-\frac{1}{2}$，
試求第五項。

【代碼】a51a03m2

2 老師講解

設一等比數列第3項為$\frac{1}{27}$，第6項為1，
試求第10項。

2 學生練習

設一等比數列第5項為7，第8項為-56，
試求第12項。

【代碼】a51a03m3

3 老師講解

在3與48之間插入3個正數，使其成等比數列，求此三數爲何？

3 學生練習

在128與4之間插入4個數，使其成等比數列，求插入的第3個數。

【代碼】a51a04m2

4 老師講解

已知一等比級數之首項爲3、公比爲 -2、總和爲 -255，求此級數之項數。

4 學生練習

已知一等比級數之首項6、公比爲2、總和爲378，求此級數之項數。

【代碼】a51a04m3

5 老師講解

設一數列 $16,4,a,b$，其中前三項成等差，後三項成等比，求 $a+b$ 之值。

5 學生練習

設一數列 $9,-3,a,b$，其中前三項成等比，後三項成等差，求 $a+b$ 之值。

【代碼】a51a04m4

6 老師講解

設四正數 a,b,c,d 成等比數列，且 $a+b=12$，$c+d=108$，試求首項與公比。

6 學生練習

設四正數 a,b,c,d 成等比數列，且 $a+b=9$，$c+d=36$，求此數列公比。

【代碼】a51b03m2

7 老師講解

設一等差數列，首10項的和爲50，首20項的和爲200，則求首30項之總和。

7 學生練習

一等比級數，若 $S_{10}=12$，$S_{20}=72$，求 $S_{90}=$_____。

【代碼】f41235m1

【加強題】

1. 首項爲 7，末項爲 448 的等比級數，其總和爲 889，求項數爲_____。

2. 設一等比數列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1+a_2+a_3=26$ 且 $a_1+a_3+a_5=182$，求其公比 $r=$_____。

3. 已知 $\log 1.1=0.0414$，$\log 3=0.4771$，若本金爲 10000 元，年利率 10%，一年一期複利計算，則至少須幾年，本利和始大於 30000 元？ 【代碼】a51b04m1

【學生練習答案】

1. 4	2. -896	3. 16	4. 6
5. 6	6. 2	7. $3(5^9-1)$	

回家功課

( ) 1. 已知一等比數列$<b_n>$，其中$b_3=2$，$b_7=10$。試問$b_{11}=$？ 代碼：a51103p1
(A) 20 (B) 50 (C) 100 (D) 200 。

( ) 2. 設一等比級數的首項為$\frac{1}{4}$，公比為-1，則此等比級數前81項的總和為何？ 代碼：a51104p2
(A) $(\frac{1}{4})^{81}$ (B) $(\frac{1}{4})^{80}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$ 。

( ) 3. 若一等比級數的首項為3，公比為4，和為4095，則此級數共有多少項？ 代碼：a51093s2
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 。

( ) 4. 設a,b,c,d四正數成等比數列，若$ab=\frac{cd}{81}$，則此數列的公比為何？ 代碼：a51094s1
(A) 2 (B) 3 (C) 9 (D) 81 。

( ) 5. 一等比級數共7項，已知前二項和為2，第二項與第三項的和為-4，則此級數的總和為 代碼：a51225m1
(A) 86 (B) 68 (C) -86 (D) -68 。

答案：BCBBC

歷屆試題

( ) 1. 設一等差數列爲$5,12,19,\cdots$，則第101項爲何？ (A)695 (B)698 (C)700 (D)705。 代碼：a51100s1 (100 年統測 B)

( ) 2. 設某人跑10公里路程，第一公里以5分鐘完成，第二公里以5分15秒完成，第三公里以5分30秒完成，依此類推，即全程的每一公里以此等差數列的時間完成，則總共需花多少時間？ (A)58分45秒 (B)59分15秒 (C)60分45秒 (D)61分15秒。 代碼：a51100s2 (100 年統測 B)

( ) 3. 已知數列$a_k=3k-4$，$k=1,2,3,\ldots,100$，則下列敘述何者正確？ (A)此數列爲等差數列，公差爲-4 (B)95爲此數列的第34項 (C)$\sum_{k=1}^{100}(3k-4)=3\sum_{k=1}^{100}k-4$ (D)$a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=85$。 代碼：a52101s1 (101 年統測 B)

( ) 4. 若兩數列$2,2a,18$及$a+4,2,a+7$都是等比數列，則下列何者正確？ (A)$-6<a<-4$ (B)$-4<a<-2$ (C)$2<a<4$ (D)$4<a<6$。 代碼：a51101k1 (101 年統測 C)

( ) 5. 已知$\sum_{k=1}^{100}a_k=205$、$\sum_{k=1}^{100}b_k=26$，求$\sum_{k=1}^{100}(\frac{a_k}{5}-\frac{b_k}{2}+1)$之值？ (A)29 (B)68 (C)80 (D)128。 代碼：a52102s1 (102 年統測 B)

( ) 6. 求102到2013之間個位數字爲7的正整數共有幾個？ (A)190 (B)191 (C)192 (D)193。 代碼：a51102k1 (102 年統測 C)

( ) 7. 設一等比級數的第三項爲4，公比爲$-\frac{1}{3}$，前n項和爲$\frac{6560}{243}$，則n之值爲何？ (A)7 (B)8 (C)9 (D)10。 代碼：a51103k1 (103 年統測 C)

( ) 8. 設a、b、c三個數均爲正實數，且已知$a+c=36$，若a、b、12三數成等差數列，且2、b、c三數成等比數列，則下列敘述何者有誤？ (A)$b+c=32$ (B)$a+b=12$ (C)$b^2=2c$ (D)$2b=a+12$。 代碼：a51103k2 (103 年統測 C)

( ) 9. 已知一等差數列之第3項爲8，第7項爲20，則該等差數列之第32項爲何？ (A)93 (B)95 (C)96 (D)98。 代碼：a51104s1 (104 年統測 B)

( ) 10. 已知四個正數a,b,c,d爲一等比數列，若$a+b=20$，$a+b+c+d=65$，則$a=$？ (A)5 (B)6 (C)7 (D)8。 代碼：a51104k1 (104 年統測 C)

( ) 11. 某細菌每30分鐘分裂一次，即由1個變成2個，則1個細菌經過6小時後，分裂成多少個？ (A)1024 (B)2048 (C)4096 (D)8192。 代碼：a51105s1 (105 年統測 B)

( ) 12. 已知 $S_n=1\frac{1}{1}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+\cdots+(n+\frac{1}{2^{n-1}})$，則 S_{10} 之值爲何？ 代碼：a51105s2 (105 年統測 B)
(A) $56\frac{511}{512}$ (B) $56\frac{1023}{1024}$ (C) $57\frac{511}{512}$ (D) $57\frac{1023}{1024}$ 。

( ) 13. 設 a、b、c、d、e、f 六數成等比數列，已知 $a+c+e=168$，$b+d+f=84$，則 d 之值爲何？ (A) 6 (B) 9 (C) 16 (D) 32 。 代碼：a51105k1 (105 年統測 C)

( ) 14. 若 a 爲正整數，且 1、a、$2a$ 爲等比數列，則 $a^2+1=$？ (A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 10 。 代碼：a51106s1 (106 年統測 B)

( ) 15. 設 a、b、c 三數成等比數列，且滿足 $a+b+c=9$ 及 $a^2+b^2+c^2=189$，則等比中項 $b=$？ (A) -6 (B) -2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 6 。 代碼：a51106k1 (106 年統測 C)

( ) 16. 若一等差數列的第 10 項爲首項的 4 倍，且首項不爲 0，則該數列的第 6 項爲第 2 項的幾倍? (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 。 代碼：a51107s1 (107 年統測 B)

( ) 17. $\sum_{n=1}^{10}(2^n+3n+2)=$？ (A) 1268 (B) 1298 (C) 2017 (D) 2231 。 代碼：a52107k1 (107 年統測 C)

( ) 18. 已知 $\{a_n\}$ 爲等差數列且滿足 $a_1>0$、$a_5=3a_{12}$。則當 n 爲多少時，a_n 開始爲負數? (A) 14 (B) 15 (C) 16 (D) 17 。 代碼：a51108k1 (108 年統測 C)

( ) 19. 某部以“尋寶”爲主題的電影中，男主角進到第二道關卡時看到了一扇巨大的鐵門，門邊有 100 個按鈕，每個按鈕都有一個數字，分別是從 1 到 100。牆上有一個過關提示，上面印著：“有一個等差數列，其第 11 項和第 16 項分別爲 31 和 56，按下該數列第 20 項數字的按鈕，鐵門就會打開”，則按下哪一個數字的按鈕就會開門？ 代碼：a51109s1 (109 年統測 B)
(A) 65 (B) 76 (C) 83 (D) 99 。

( ) 20. 某棒球投手自 4 月 1 日開始每天練投，他每日投球爲等差數列。若 4 月 5 日投球數爲 41 個，4 月 13 日爲 73 個，則他 4 月份有幾天投球數超過 100 個？ (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 。 代碼：a51109k1 (109 年統測 C)

( ) 21. 保險公司推出躉繳型保單（即於一開始存入一固定本金），且宣告年利率爲 3%的複利，每年計算一次。若某人於 20 歲時，花 10 萬元購買此保單，則當保單價值達 20 萬元時，某人約幾歲？($\log_{10}1.03=0.0128$, $\log_{10}1.3=0.1139$, $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$) 代碼：a51109k2 (109 年統測 C)
(A) 24 (B) 34 (C) 44 (D) 54 。

( ) 22. 若無窮級數為 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}$ ，則前 5 項之和為何？ 代碼：110tcb20 (110 年統測 B)
(A)35 (B)40 (C)45 (D)50 。

( ) 23. 若 $a=\sum_{m=1}^{7}\frac{m-2}{2m-1}$ 、$b=\sum_{k=0}^{6}\frac{k-1}{2k+1}$ 、$c=\sum_{i=3}^{8}\frac{i-4}{2i-5}$ ， 代碼：110tcc06 (110 年統測 C)
則下列敘述何者正確？
(A) $b>a>c$ (B) $c>a>b$ (C) $c>a=b$ (D) $a=b>c$ 。

( ) 24. 已知等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項為 -1，公差為 3 ，試求等差級數 代碼：111tcb02 (111 年統測 B)
$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{21}=$？ (A)154 (B)319 (C)580 (D)609 。

( ) 25. 已知等比數列 $\langle a_k\rangle$ 的首項 $a_1=2$，公比 $r=3$。若前 n 項和 代碼：111tcc02 (111 年統測 C)
大於 2022 ，則滿足條件的最小正整數 $n=$？
(A)5 (B)7 (C)9 (D)11 。

答案：DDDBD BBABD CACCA ADCBB CADBB

綜合練習

( ) 1. 設 p_n 表第 n 個質數，即 $p_1=2, p_2=3, p_3=5,\ldots$。若 $<a_n>$ 爲一數列且 $a_n=\dfrac{p_{2n-1}}{P_{2n}}$，則 $a_5=$？ (A)$\dfrac{23}{29}$ (B)$\dfrac{19}{23}$ (C)$\dfrac{17}{19}$ (D)$\dfrac{13}{17}$。 代碼：a52095s1

( ) 2. 已知五個數 80，u，v，w，405 成等差數列，則 $|w-u|=$？ (A)$\dfrac{325}{4}$ (B)90 (C)150 (D)$\dfrac{325}{2}$。 代碼：a51090s1

( ) 3. 若一等差數列的首項爲 -20，第 7 項爲 -11，則此數列從第幾項開始爲正數? (A)12 (B)13 (C)14 (D)15。 代碼：a51092s1

( ) 4. 一個等差級數前十項之和爲 10，而第十項爲 5，則公差是 (A)1 (B)$\dfrac{8}{9}$ (C)$\dfrac{9}{8}$ (D)$-\dfrac{8}{9}$。 代碼：a51087g1

( ) 5. 某集會場爲前窄後寬形狀。已知第一排有 20 位、第二排有 24 位、⋯(即每一後排皆較前排多 4 位)，且恰能提供 504 人座位。請問此集會場共有幾排座位？ (A)10 (B)11 (C)12 (D)13。 代碼：a51104p1

( ) 6. 求級數 $7+8-9+10+11-12+\cdots$ 到第 99 項的和，其中級數每一項的絕對值成等差數列且 3 的倍數項爲負數 (A)1778 (B)1782 (C)1888 (D)1906。 代碼：a51102w1

( ) 7. 設 p、q 爲二相異正整數，且 a_n 爲一等差數列第 n 項。若 $a_p=q$，$a_q=p$，則 $a_{p+q}=$？ (A)0 (B) p (C) q (D) $p+q$。 代碼：a51098k1

( ) 8. 若 a,b,c 三數成等差數列，三數的等差中項爲 8，且三數的平方和爲 242，若公差爲正數，則公差爲 (A)5 (B)4 (C)3 (D)2。 代碼：a51228m1

( ) 9. 試求級數 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+19^2-20^2+21^2$ 之總和？ (A)201 (B)211 (C)221 (D)231。 代碼：a51095s1

( ) 10. 設 $1+2+2^2+\cdots\cdots+2^n=4095$，則 $n=$ (A)10 (B)11 (C)12 (D)13。 代碼：a51219m1

( ) 11. 設四正數 a,b,c,d 成等比數列，且 $a<b<c<d$，$a+d=28$，$b+c=12$，試求其公比之值爲何？ (A)$\dfrac{1}{4}$ (B)$\dfrac{1}{3}$ (C)3 (D) 4。 代碼：a51091s1

( ) 12. 已知一等比數列皆爲正數，且第三項爲18，第五項爲$40\frac{1}{2}$，則其第四項值爲 (A)21 (B)24 (C)27 (D)30。 代碼：a51223m1

( ) 13. 設七個實數$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$成等比數列，公比爲$r$。若$a_1+a_2=2$且$a_6+a_7=486$，則$r=$？ (A)3 (B)4 (C)6 (D)9。 代碼：a51104w1

( ) 14. 設x_1、x_2、x_3、x_4爲等差數列，其公差爲d，$d>0$。若x_2爲x_1與x_4的等比中項，且$x_3=27$，則$x_2=$? (A)16 (B)18 (C)20 (D)24。 代碼：a51105w2

( ) 15. 設有四個正整數的數列，前三項成等比數列，後三項成等差數列，又首末兩項之和爲21，中間兩項之和爲18，則此四數之最大值爲何？(A)12 (B)16 (C)18 (D)19。 代碼：f41230m1

答案：ADDBC BAADB CCABC

單元 7　排列與組合

主題一　計數原理

如果做某事有 k 個步驟，而第 1 個步驟有 m_1 個方法可做，第 2 個步驟有 m_2 個方法可做…，第 k 個步驟有 m_k 個方法可做。

1. 加法原理：

若能選擇第 1 個或第 2 個或第 3 個或…或第 k 個步驟，

則完成這件事的方法共有 $m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k$ 種。

2. 乘法原理：

若必須作第 1 個且第 2 個且第 3 個且…且第 k 個步驟，

則完成這件事的方法共有 $m_1\times m_2\times\cdots\cdots\times m_k$ 種。

1 老師講解

超市上有 3 種芒果，5 種芭樂，
(1) 小明只買一種水果，求買法有幾種？
(2) 小明各買一種水果，求買法有幾種？

1 學生練習

超市有賣 4 種威士忌，5 種葡萄酒，
(1) 今只買一瓶酒，有幾種不同買法？
(2) 今每種酒各買一瓶，求有幾種買法？

【代碼】p11a01m2

2 老師講解

A 地至 B 地有三條路，B 地至 C 地有二條路可選，問今小明由 A 地出發經 B 地至 C 地，走法有幾種？

2 學生練習

設台北到台中有 5 條路線，台中到高雄有 2 條路線，台北到高雄有 3 條路線，試問從台北出發到高雄有幾種不同走法？

【代碼】p11a01m3

3 老師講解

將15元購買1元、2元、5元的郵票，且15元全部用完，則一共有幾種購買方法？

3 學生練習

將15元購買1元、2元、5元的郵票，若每種郵票至少買一張且15元全部用完，則一共有幾種購買方法？

【代碼】p11a02m2

4 老師講解

(1) 360的正因數有多少個？

(2) 2520的正因數有 a 個，可以被12整除的有 b 個，不可以被12整除的有 c 個，求 $a+b-c=$？

4 學生練習

2520的正因數中，不可以被30整除有幾個？

【代碼】p11b01m2

【學生練習答案】

1. (1) 9　(2) 20	2. 13	3. 6	4. 36

回家功課

( ) 1. 餐飲部供應的菜色為肉 4 種、魚 3 種、蔬菜 5 種、甜點 2 種。有位客人要點肉、魚、蔬菜各 1 種，不點甜點。則這位客人有幾種點法？ 代碼：p11090w1
(A) 0 (B) 12 (C) 20 (D) 60 。

( ) 2. 書架上有 5 冊不同的護理課本，3 冊不同的數學課本，若某生欲由護理、數學課本中各選一冊，則共有多少種選法? 代碼：p11092w1
(A) 8 (B) 15 (C) 125 (D) 243 。

( ) 3. 將 50 元兌換成 10 元硬幣或 1 元硬幣之組合，共有幾種兌換法？ 代碼：p11097w1
(A) 6 (B) 11 (C) 20 (D) 22 。

( ) 4. 已知一正整數 $a=2^3\cdot 3^4\cdot 5^6$，求 a 的正因數個數為何？ 代碼：p11102p1
(A) 100 (B) 120 (C) 140 (D) 240 。

( ) 5. 自然數 37800 的所有正因數中，無法被 30 除盡的有多少個？ 代碼：p11090s1
(A) 18 (B) 36 (C) 60 (D) 96 。

答案：DBACC

主題二　排列

1.直線排列：

(1) 定義：

①由 n 件相異物中，任選 r 件($n \geq r$)排成一列的排列總數記為 P_r^n

② $P_r^n = \dfrac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$ (但 $n \geq r$)

(2) 規定：

① $0!=1$　② $P_n^n = n!$　③ $P_0^n = 1$

1 老師講解

求出下列各式之值：

(1) $5!$　(2) P_3^5　(3) P_2^8　(4) P_4^4　(5) P_0^4

1 學生練習

求出下列各式之值：

(1) $5!+6!$　(2) $0!+5!+P_2^6+P_3^5$

【代碼】p12a01m2

2 老師講解

(1) $P_r^{10} = 60P_{r-2}^9$，求 r 之值。

(2) $P_4^{n+2} = 56P_2^n$，求 n 之值。

2 學生練習

(1) $2P_r^7 = 3P_{r-1}^8$，求 r 之值。

(2) $3P_3^n = 14P_2^{n+1}$，求 n 之值。

【代碼】p12a01m3

3 老師講解

求下列情況之方法：
(1) 甲乙丙丁四人坐一排四張椅子，試問有幾種不同方法？
(2) 有一排6個座位的椅子，甲乙丙三人坐，有幾種不同坐法？

3 學生練習

有六間廁所，甲乙丙三人上，方法有幾種？

【代碼】p12a02m2

4 老師講解

求下列情況之方法：
(1) 若甲班全班有50人，今導師選派三人分別參加書法、作文、美術比賽，選法若干？
(2) 縱貫線火車有15個車站，每站之間要準備一種車票，往返以不同計，則要準備多少種的單程車票？

4 學生練習

求下列情況之方法：
(1) 由全班前10名的同學中，今選三人當班長，副班長及學藝股長，選法若干？
(2) 某客運有20站，今甲生要收集各站到各站間的車票(往返以不同計)，則他最少要收集幾張？

【代碼】p12a02m3

5 老師講解

甲、乙等7人排成一列，求下列之排法。
(1) 甲、乙、丙三人必相鄰
(2) 甲、乙、丙三人不相鄰

5 學生練習

甲、乙等六人排成一列，求下列之排法：
(1) 甲、乙兩人必須相鄰的方法有
(2) 甲、乙、丙相鄰，排法有幾種？
(3) 甲、乙、丙不相鄰，排法有幾種？

【代碼】p12a03m2

6 老師講解

設甲、乙、丙…等6人，求下列各排列數有幾種？
(1)全部排法
(2)甲排在首位
(3) 甲不排在首位
(4) 甲必排首位且乙必排尾位
(5) 甲不排首位且乙必排尾位

6 學生練習

設甲、乙、丙...等5人，
求下列各排列數有幾種？
(1) 甲必排在首位
(2) 乙不排尾位
(3) 甲排首位且乙排尾位
(4) 甲不排首位且乙排尾位

【代碼】p12a04m2

7 老師講解

設甲、乙、丙…等6人，求下列各排列數有幾種？
(1) 甲必排首位或乙必排尾位
(2) 甲不排首位且乙不排尾位

7 學生練習

設甲、乙、丙...等5人，則甲不排首位且乙不排尾位的方法有幾種？

【代碼】p12b02m2

8 老師講解

以1、2、3、4、5、6六個數字任取4個不同數字組成四位數，共有幾個四位數？

8 學生練習

以1、2、3、4、5五個數字任取三個數字組成三位數，則有幾個奇數？

【代碼】p12a05m2

9 老師講解

以0、1、2、3、4、5六個數字不重複作成四位數？

(1) 共有幾個四位數？
(2) 求奇數有幾個？
(3) 求偶數有幾個？
(4) 求5的倍數有幾個？

9 學生練習

從0、1、2、3、4、5、6中任選4個數字不重複，作成四位數，則

(1) 偶數有幾個？
(2) 5的倍數有幾個？

【代碼】p12a05m3

2.不盡相異全取排列：

設 n 個物件可分成 k 類(每類之物均相同)，若第1類有 m_1 個，第2類有 m_2 個，……
第 k 類有 m_k 個，此時 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$，
則將此 n 物全部排成一列之排法有 $\dfrac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot\cdots\cdots m_k!}$ 種

10 老師講解

將下列數字"7758585"全取排列，
則可排成幾個不同的數字？

10 學生練習

將 $aaabbbc$ 排列，則求全取排列數？

【代碼】p13a01m2

11 老師講解

將 $banana$ 重新排列，求：
(1) 三個 a 必相鄰的排法
(2) 任二個 a 皆不相鄰的方法

11 學生練習

將 $aabbbcd$ 重新排列，則求：
(1) 三個 b 完全相鄰的排法
(2) 三個 b 完全不相鄰的排法

【代碼】p13a02m2

12 老師講解

將 $TITANIC$ 排成一列，
求 A 排首且 T 排末的方法？

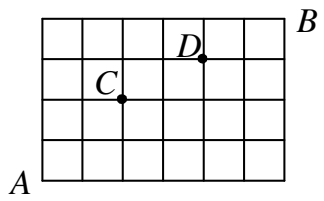
12 學生練習

將 $papaya$ 排一列，則 a 必排首位，方法？

【代碼】p13a02m3

13 老師講解

如圖，設由 A 到 B 的街道，有直街 7 條，
橫街 5 條，則：
(1) 由 A 到 B 有幾種捷徑走法？
(2) 由 A 到 B，必過 C 有幾種捷徑走法？
(3) 由 A 到 B，不過 C、D 有幾種捷徑走法？



13 學生練習

棋盤式街道，橫街 5 條直街 6 條，
由一端走到最遠的另一端取捷徑，
則有幾種不同的走法？

【代碼】p13b01m2

3.重複排列：

(1) 定義：

由 n 種相異物中任取 r 個(可以重複選取)，排成一列之重複排列法有 n^r 種。

(2) 公式：

① n^r 中「接受的」個數當底數，「給予的」個數當指數

② n^r 中以物大為底(即物大者為底數，物小者為指數)

14 老師講解

求下列情況之方法有幾種？
(1) 三人搭二部車
(2) 三封信任意投入五個郵筒
(3) 五個不同的玩具，分給三人

14 學生練習

求下列情況之方法有幾種？
(1) 五人搭三輛公車
(2) 四個不同的玩具，分給三人
(3) 6 位旅客投宿二家旅社

【代碼】p14a01m2

15 老師講解

求下列情況之方法
(1) 5 種不同的酒倒入 4 個不同的杯子，每杯限倒一種酒，則倒法有幾種？
(2) 10 個選舉人，3 位候選人，採記名投票(沒有廢票)，則開票結果有幾種？

15 學生練習

2 種酒倒入 5 個不同的杯子，每杯限倒一種酒，則倒法有幾種？

【代碼】p14a02m2

16 老師講解

將六個不同口味的糖果分給甲、乙、丙三位小朋友，則：
(1) 甲沒有分到的方法有幾種？
(2) 甲恰得一個的方法有幾種？
(3) 甲至少一個的方法有幾種？

16 學生練習

將4支不同的粉筆分給甲、乙、丙三位學生，則甲至少拿一支的方法有幾種？

【代碼】p14a02m3

17 老師講解

有6旅客要搭3架小飛機觀光，
但每架小飛機最多可載5個旅客，
則有幾種觀光的方法？

17 學生練習

有5人要去秀姑巒溪泛舟，船家只有4台橡皮艇，且每台橡皮艇可搭載4人，
則有幾種搭載方法？

【代碼】p14b01m2

【加強題】

1. 以0、1、2、3、4、5六個數字不重複作成三位數中大於240的有_____個。

2. 將0,0,0,5,5,6,6排成七位數， 則：
   (1)可得_____個不同的七位數。
   (2)可得_____個偶數。

3. 試解下列各式：
   (1)將$(x+y+z)^6$展開，則x^3y^2z的係數爲_____。
   (2)求$(2x-y+z)^7$展開中xy^3z^3項係數爲_____。

4. 從$aaabbc$六個字母中，任取三個字母，排成一列，方法有_____種。

【學生練習答案】

1. (1)840 (2)211	2. (1)5 (2)8	3. 120	4. (1)720 (2)380
5. (1)240 (2)144 (3)144		6. (1)24 (2)96 (3)6 (4)18	
7. 78	8. 36	9. (1)420 (2)220	10. 140
11. (1)60 (2)120	12. 30	13. 126	14. (1) 243 (2) 81 (3)64
15. $2^5=32$	16. 65	17. 1020	

回家功課

( ) 1. 某社團有社員13人，若從其中選出社長與副社長各一人，則共有多少種選法？ 代碼：p12093w1
(A) 78 (B) 105 (C) 156 (D) 210 。

( ) 2. A、B、C、…G 七個字母排成一列，求 A、B 相鄰，但 C、D 不相鄰，共有幾種不同排法。 (A) 480 (B) 960 (C) 100 (D) 120 。 代碼：p12b01m1

( ) 3. 若6對夫婦排成一列，且每對夫婦必須相鄰，則共有幾種不同排法？ 代碼：p12095s1
(A) $2\times6!$ (B) $(3!)^2\times2^6$ (C) $2\times(3!)^2\times2^6$ (D) $2^6\times6!$ 。

( ) 4. 4男3女排成一列，若男生之間不排女生，則共有多少種排法? 代碼：p12092w1
(A) $3!\times3!$ (B) $3!\times4!$ (C) $4!\times4!$ (D) $7!$ 。

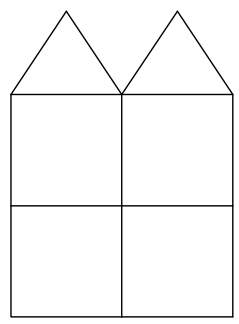
( ) 5. 自排成一列之8個坐位，甲、乙、丙、丁四人任選相連之四個座位而坐，坐法有多少種？ 代碼：p12210m1
(A) 24 (B) 20 (C) 120 (D) 60 種 。

( ) 6. 甲、乙、丙、丁四個人組隊參加400公尺接力賽跑，每人跑100公尺。其中甲不願意跑最後一棒，試問總共可排出幾種接力順序？ 代碼：p12091w1
(A) 3 (B) 9 (C) 18 (D) 24 。

( ) 7. 甲、乙等5人排成一列，甲不排首，且乙必排中的方法有 代碼：p12215m1
(A) 18種 (B) 36種 (C) 48種 (D) 72種 。

( ) 8. 三位數中，十位數是7，個位數字為偶數，共有幾個？ 代碼：p12097s1
(A) 36 (B) 40 (C) 45 (D) 50 。

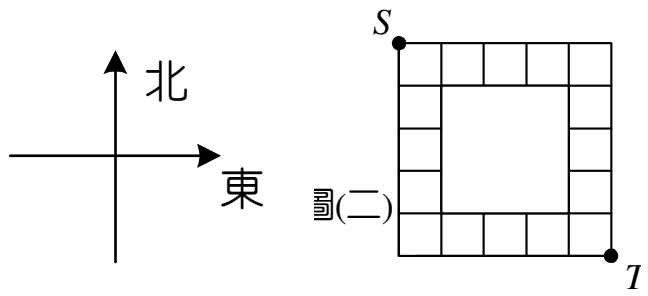
( ) 9. 可用7種不同顏色塗在右圖的6個格子內，若規定顏色不重複使用且同一格子僅塗滿同一色，則共可塗出幾種不同的著色樣式？ 代碼：p12096s1
(A) C_6^7 (B) C_6^{12} (C) P_6^7 (D) 6^7 。



( ) 10. 將『我為人人人人為我』八字重排，則四個『人』皆不相鄰的排法有幾種？ 代碼：p13202m1
(A) 15 (B) 30 (C) 45 (D) 42 種 。

( ) 11. 將 *Pallmall* 一字中之字母重排，其中 a 不排首位，其排法共有幾種？ 代碼：p13205m1
(A) 630 (B) 420 (C) 210 (D) 105 。

(　　) 12. 有一個地區街道線段如圖(二)，現在甲君擬從點 S 走到點 T；如果規定甲君必須沿著街道向東或向南走，則會有多少種不同路線的走法？ 代碼：p13098s1
(A) 44
(B) 52
(C) 74
(D) 95　。



圖(二)

(　　) 13. 某速食店之飲料區提供 4 種飲料。現有甲、乙、丙 3 人拿杯子到飲料區裝盛飲料，每人可任意選擇一種飲料，3 人的飲料可相同或不同，則 3 人裝盛的結果有多少種可能？ 代碼：p14099w1
(A) 64　(B) 27　(C) 12　(D) 7　。

(　　) 14. 假設在招呼站有三輛計程車，每輛最多可搭乘 4 位客人，現招呼站來了 5 位要搭計程車的旅客，試問有幾種不同的載客方式？ 代碼：p14097s1
(A) 122　(B) 125　(C) 240　(D) 243　。

答案：CBDCC　CACCB　ABAC

主題三　組合

(1) 定義：由 n 個相異物中，任取 r 個組合(不排列，$n \geq r$)的總數記為 C_r^n

(2) $C_r^n = \dfrac{P_r^n}{r!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$

(3) 性質：(1) $C_r^n = C_{n-r}^n$　(2) $C_n^n = 1$　(3) $C_0^n = 1$

(4) 巴斯卡定理：$C_r^n = C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1}$

1 老師講解

求下列各式之值：

(1) C_3^8　(2) C_2^9　(3) C_7^9　(4) C_6^6　(5) C_0^5

1 學生練習

求 $P_2^5 + C_2^5 + 5!$ 之值。

【代碼】p21a01m2

2 老師講解

試解下列各式之值：

(1) 已知 $C_6^n = C_4^n$，求 C_n^{12} 之值。

(2) 已知 $C_n^9 = C_{2n-3}^9$，求 n 之值。

2 學生練習

設 $C_{m+1}^{10} = C_{2m}^{10}$，求 C_m^{11} 之值。

【代碼】p21a01m3

3 老師講解

求下列情況之方法：
(1) 老師將從10名學生中任選 3 名學生澆花、掃地、擦黑板，則有幾種方法？
(2) 老師將從10名學生中任選 3 名學生出公差，則有幾種方法？

3 學生練習

數學老師將從10名學生中任選 2 名學生參加比賽，則有幾種不同方法？

【代碼】p21a02m2

4 老師講解

求下列情況之方法：
(1) 數學週考，試題10題，任選5題作答，但前3題必答，則有幾種選法？
(2) 數學週考，試題10題，任選5題作答，但前3題必不答，則有幾種選法？

4 學生練習

某次考試，規定由十題中選五題，但前二題必須作答，此選題方法共有幾種？

【代碼】p21a02m3

5 老師講解

甲、乙等8人，求：
(1) 任選5人組成小組的方法有幾種？
(2) 任選5人必含甲的方法有幾種？
(3) 任選5人必含甲且排成一列的方法有幾種？
(4) 任選5人必含甲、乙且排成一列的方法有幾種？

5 學生練習

甲、乙、丙…等七人，任選五人作直線排列，求其中必含甲、乙的排列個數。

【代碼】p21a03m2

6 老師講解

設有5男4女，今任選4人，求：
(1) 有幾種不同選法？
(2) 恰有 1 女生的選法？
(3) 至少一女生的選法？
(4) 至少三女生的選法？

6 學生練習

設10人中，有女生7名，任選4人，
(1) 則至少有1名男生的方法有幾種？
(2) 則至少有2名男生的方法有幾種？

【代碼】p21b01m2

7 老師講解

平面上有相異10點，試求：
(1) 其中無三點共線，則可連成
①幾條直線？ ②幾個三角形？
(2) 其中有4點共線，其餘任三點
皆不共線，則可連成
①幾條直線？ ②幾個三角形？

7 學生練習

平面上有相異11點，其中有4點共線，
其餘任三點皆不共線，則可連成
(1) 幾條直線？
(2) 幾個三角形？

【代碼】p21b02m2

8 老師講解

設有一凸8邊形，求有幾條對角線？

8 學生練習

設有一凸11邊形，求有幾條對角線？

【代碼】p21b03m2

9 老師講解

求下列情況之方法有幾種？

(1) 有10個不同的書，
①分給甲4本、乙3本、丙3本
②依4、3、3分成三堆

(2) 有6個不同的書，
①平均分發到甲、乙、丙三人
②平均分成三堆

(3) 有6個不同的書，
①分給甲1本、乙2本、丙3本
②依1、2、3分成三堆

9 學生練習

求下列情況之方法有幾種？

(1) 有8個不同的書，
①分給甲3本、乙3本、丙2本
②依3、3、2分成三堆

(2) 有6個不同的書，
①平均分發到甲、乙二人
②平均分成二堆

【代碼】p21b04m2

【學生練習答案】

1. 150	2. 165,11	3. 45	4. 56
5. 1200	6. (1)175 (2)70	7. (1)50 (2)161	8. 44
9. (1)560,280 (2)20,10			

回家功課

( ) 1. 設 P_m^n 及 C_m^n 分別表示從 n 個相異物取 m 個的排列數與組合數，若 $P_5^{n+2}=120C_4^{n+2}$，則 $n=$？ 代碼：p21094s1
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 。

( ) 2. 設有6個足球隊參加比賽，若任意兩隊都互相比賽一場次，則共有多少場次的比賽？ 代碼：p21095s1
(A) 24 (B) 20 (C) 15 (D) 10 。

( ) 3. 一副撲克牌中有黑桃、紅心、方塊、梅花 4 種花色，每種各13張，共有52張，現自其中任取5張，試問5張均為同一花色的情形有多少種？ 代碼：p21210m1
(A) 4190 (B) 5148 (C) 4210 (D) 2320 。

( ) 4. 有一籃球隊共有12位選手，其前鋒、中鋒、後衛的人數分別為 4 人、3 人、5 人，現在要選5位選手上場比賽，一般籃球比賽中，每隊的前鋒、中鋒、後衛人數分別為 2 人、1人、 2 人，問共有幾種<u>不同</u>選法？ 代碼：p21099k1
(A) 120 (B) 154 (C) 180 (D) 225 。

( ) 5. 設一平面上有10條直線，其中4 條互相平行，但無三線共點及其他平行情形，則此10直線可構成的三角形共有 代碼：p21208m1
(A) 80 (B) 50 (C) 40 (D) 30 個 。

( ) 6. 將6 本不同的書分別放在3 個不同的架子上，若每個架子放 2 本，則共有幾種放法？ 代碼：p21097w1
(A) 20 (B) 60 (C) 90 (D) 120 。

( ) 7. 某樂透彩號碼是由1到20 號所組成，每期任意選出6 個相異號碼為中獎號碼。若某人從該20 個樂透彩號碼中，任意選取6 個相異號碼，則其中剛好有5 個號碼為中獎號碼的組合共有幾種? 代碼：p21094w2
(A) 5 (B) 14 (C) 84 (D) 90 。

( ) 8. 假設在10件產品中，有3 件是不良品，由產品中隨機抽取5 件，其中至少有2 件不良品的取法，共有 代碼：p21215m1
(A) 126 (B) 127 (C) 128 (D) 129 種 。

( ) 9. 由1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9任選相異兩個數，試求其和為偶數的選法？ 代碼：p21216m1
(A) 25 (B) 16 (C) 72 (D) 35 。

( ) 10. 六對夫婦中，任選出4 人，其中恰有一對夫婦同時當選的情形有幾種方法？ 代碼：p21218m1
(A) 120 (B) 60 (C) 270 (D) 240 種 。

答案：DCBCA CCABD

歷屆試題

( ) 1. 甲、乙兩人到速食店購買漢堡。若有四種漢堡可供選擇，且兩人各購買一種，則兩人購買不同漢堡的可能情形有多少種？ (A)4 (B)8 (C)12 (D)16。 代碼：p11100s1 (100 年統測 B)

( ) 2. 小明、小華與其他兩位同學負責打掃教室。若兩人一組，則小明與小華不同組的分組結果有多少種？ (A)1 (B)2 (C)3 (D)4。 代碼：p21100s1 (100 年統測 B)

( ) 3. 設三位數的百位數字爲 a、十位數字爲 b、個位數字爲 c。若 a、c 爲偶數，b 爲奇數，且 $a>b>c$，則滿足這些條件的三位數共有多少個？ (A)5 (B)10 (C)15 (D)20。 代碼：p12100k2 (100 年統測 C)

( ) 4. 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚七人排成一列。若甲、乙、丙、丁四人必排在此列的最前面四位，且甲、乙不相鄰，則此七人共有多少種排法？ (A)36 (B)72 (C)144 (D)840。 代碼：p12100k1 (100 年統測 C)

( ) 5. 將 *mhchcm* 這些英文字母任意排列，問共有幾種不同的排列方法？ (A)90 (B)60 (C)45 (D)30。 代碼：p13101s1 (101 年統測 B)

( ) 6. 將 0、0、2、2、9、9、9、9 八個數字全取，排成一列，可得幾個不同的八位數？ (A)155 (B)210 (C)315 (D)420。 代碼：p13101k1 (101 年統測 C)

( ) 7. 由甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛八個人中選取 5 人組成一個委員會，且甲、乙、丙、丁四人中至少有 2 人爲委員，則組成此委員會的方法數共有幾種？ (A)48 (B)50 (C)52 (D)54。 代碼：p21101k1 (101 年統測 C)

( ) 8. 求正二十九邊形的對角線共有幾條？ (A)337 (B)357 (C)377 (D)397。 代碼：p21102s1 (102 年統測 B)

( ) 9. 求正整數 $a=2^5\cdot 3^7\cdot 5^{11}$ 的所有正因數中，8 的倍數有幾個？ (A)576 (B)288 (C)144 (D)96。 代碼：p11103s1 (103 年統測 B)

( ) 10. 將 0、1、2、3、5 五個數字全取，排成一列，可得 4 的倍數的五位數共有多少個？(註：凡是末兩位數是 4 的倍數者即爲 4 的倍數) (A)18 (B)20 (C)24 (D)36。 代碼：p12103k1 (103 年統測 C)

( ) 11. 甲、乙、丙三人至速食店用餐，若該速食店僅提供三種套餐，且甲、乙、丙每人皆點一套餐，則此三人會有多少種點餐方式？ (A)6 (B)9 (C)18 (D)27。 代碼：p14104s1 (104 年統測 B)

( ) 12. 某大賣場一天共有早班、中班、晚班三個值班時段，而每一值班時段皆需二人值班。若某天要安排六名員工值班且每人恰值班一次，則共有多少種排班方式？ (A)45 (B)60 (C)75 (D)90。 代碼：p12104s1 (104 年統測 B)

( ) 13. 有一樂團計畫至甲、乙兩國巡迴表演。甲國有三個城市要去表演，乙國有四個城市要去表演。若先完成甲國的演出後，再到乙國完成演出，則巡迴路線的規劃有多少種可能？ (A)7 (B)12 (C)36 (D)144。 代碼：p12105s1 (105 年統測 B)

( ) 14. 從 $\{1,3,5,7,9\}$ 中選出三個相異數字以形成一個三位數，則所有可能形成的三位數的個數爲何？ (A)20 (B)60 (C)90 (D)120。 代碼：p12105s2 (105 年統測 B)

( ) 15. 某自助餐提供80元的便當，便當中除了白米飯之外，還包含一種主菜以及三種不同的配菜。若今日提供的主菜有雞腿、排骨、魚排3種，另有8種不同的配菜，則共可搭配出多少種不同組合的80元便當？ (A)59 (B)112 (C)168 (D)210。 代碼：p21106s1 (106 年統測 B)

( ) 16. 某飲料店有5爲假日工讀生，工作時間有週六的早班與晚班、週日的早班與晚班等4個不同時段。一個時段排兩位工讀生上班，如果規定同一人不可以連續排班，至少要隔一個時段上班，則共有幾種排班方式？ (A)81 (B)270 (C)900 (D)1000。 代碼：p21106s2 (106 年統測 B)

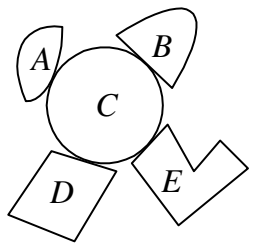
( ) 17. 將繞口令「四十個十四 十四個四十」中的文字全取排成一列，且其中四個「十」須相鄰排在一起，其排法有幾種？ (A)70 (B)105 (C)135 (D)120。 代碼：p13106k1 (106 年統測 C)

( ) 18. 某人想在自家後院的長條空地種植一列菜苗，共有高麗菜5株，萵苣4株，菠菜4株。若他決定在每兩株高麗菜之間任意種植萵苣或菠菜共兩株，則種植的排列方法有幾種? (A)$\frac{8!}{4!4!}$ (B)2^8 (C)$\frac{13!}{4!4!5!}$ (D)$5!4!4!$。 代碼：p13107s1 (107 年統測 B)

( ) 19. 某青年創業開餐廳，擬設計一份有5種菜色的菜單。若在原始構思的7種菜色中有2種爲必選，則有幾種不同的菜單? (A)6 (B)10 (C)21 (D)35。 代碼：p21107s1 (107 年統測 B)

( ) 20. 若從11件相異物中分別取出5、6、7件的組合數分別爲 A、B、C，而從12件相異物中取出6件的組合數爲 D，則下列何者正確?
(A) $B>A$ (B) $C>A$ (C) $D=A+B$ (D) $D=B+C$。
代碼：p21107k1 (107 年統測 C)

( ) 21. 如右圖所示，使用8種不同顏色塗在圖中標號 A、B、C、D、E 的5個格子內，顏色不可重複使用，若規定同一格子僅塗同一顏色，則共可塗出幾種不同的著色樣式?
(A) P_5^8 (B) C_5^8 (C) 5^6 (D) 6^5。
代碼：p12108s1 (108 年統測 B)



( ) 22. 已知向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 及 $\overrightarrow{d}$ 分別自 $(1,0)$、$(0,1)$ 或 $(1,1)$ 三向量中選取出來，例如，$\overrightarrow{a}=(1,0)$、$\overrightarrow{b}=(0,1)$、$\overrightarrow{c}=(0,1)$、$\overrightarrow{d}=(1,1)$，或 $\overrightarrow{a}=(1,1)$、$\overrightarrow{b}=(0,1)$、$\overrightarrow{c}=(1,0)$、$\overrightarrow{d}=(1,0)$ 等等皆屬可能的選取情形。
若計算 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}$ 所有可能的情形後，則可得到幾種不同的結果?
(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 3^4。
代碼：a71108s1 (108 年統測 B)

( ) 23. 某次啦啦隊競賽規定，每隊組隊人數8人且男、女生均至少2人。某班共有4名男生與6名女生想參加啦啦隊競賽，若由此10人中依規定選出8人組隊，則共有多少種組隊方式?
(A) 45 (B) 60 (C) 75 (D) 90。
代碼：p21108k1 (108 年統測 C)

( ) 24. 下列何選項的值爲組合數 C_3^8?
(A)「由8人中選3人分別擔任班長、副班長與康樂股長」所有的可能情形
(B) $(x-1)^8$ 展開式中，x^3 項的係數
(C)「$AAABBBBB$ 共8個字母任意排列」所有的可能情形
(D)「8枝相同的筆全部分給3人且每人至少得到1枝筆」所有的可能情形。
代碼：p23108k1 (108 年統測 C)

( ) 25. 某一個電腦的過關遊戲中，從據點 A 到據點 C 必須經過據點 B。若從據點 A 到據點 B 可以選擇的路徑有2條，從據點 B 到據點 C 可以選擇的路徑有3條，則從據點 A 到據點 C 有幾種走法？
(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 9 。
代碼：p11109s1 (109 年統測 B)

( ) 26. A 學校桌球校隊有甲、乙、丙、丁、戊五位選手，有一天 A 學校桌球校隊與他校進行友誼賽。由於時間關係，只進行單打、雙打比賽各一場，且兩場比賽同時進行。若任意推出選手參賽(不考慮默契等因素)，則 A 學校可推出的參賽選手名單有多少種？
(A) 12 (B) 30 (C) 125 (D) 243 。
代碼：p21109s1 (109 年統測 B)

(　　) 27. 在一次立法委員選舉中，每位選民須投區域立委與不分區政黨兩種選票，且每種選票均只能圈選一位(個)，否則視爲廢票。已知某甲的戶籍地有 6 位區域立委候選人，而全國共有 14 個政黨可選擇。若某甲決定去投票，且兩種選票均不投廢票，試問某甲有多少種的投票組合？
(A) 6　(B) 14　(C) 20　(D) 84　。
代碼：p21109k1
(109 年統測 C)

(　　) 28. 某款電玩在開始闖關前需進行設定：第一個步驟是選擇難度，由入門、普通或高手等 3 種難度擇一；第二個步驟由 4 種盔甲擇一；第三個步驟由 5 種武器擇一。若必須依序完成這三個步驟，設定才算完成，則有幾種闖關前設定？
(A)12　(B)23　(C)36　(D)60　。
代碼：110tcb08
(110 年統測 B)

(　　) 29. 若從 1、2、3、4、5、6、7 七個數字中取兩個相異數字排成二位數，則所有這些不同的二位數之總和爲何？
(A)42　(B)924　(C)1848　(D)3696　。
代碼：110tcb21
(110 年統測 B)

(　　) 30. 跆拳道隊有 8 個隊員，教練安排所有隊員每 2 人一組分別在 A、B、C、D 四個不同場地練習，則共有幾種安排的方式？
(A)105　(B)2520　(C)5040　(D)40320　。
代碼：110tcc12
(110 年統測 C)

(　　) 31. 一個空的書櫃有上、中、下共三層，若將國文、英文、數學三本課本放入書櫃的任一層，且當課本放在同一層左右順序不同時視爲不同排列，則共有幾種不同的排法？　(A)60　(B)36　(C)27　(D)18　。
代碼：110tcc21
(110 年統測 C)

(　　) 32. 「心公司」想要找設計公司製作招牌，而招牌設計中要先選擇底色，中間則是心公司的單色商標，商標下放上一排單色文字寫上心公司，如圖 (三)。已知底色、商標顏色以及文字顏色的選擇有黑、藍、白、黃、紅等五種顏色，且底色不能跟商標顏色相同，也不能跟文字顏色相同，除此之外，並無其他限制。
試問這個招牌的顏色設計有幾種選擇？
(A)60　(B)80　(C)100　(D)120

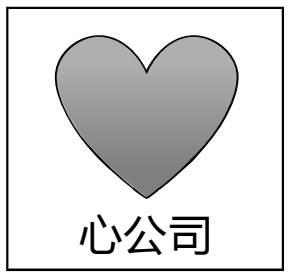


圖 (三)

代碼：111tcb22
(111 年統測 B)

(　　) 33. 某密碼系統是透過(p , q) 兩數字進行加解密，若系統要求 $p\times q$ 除以 8 餘 1，其中 p 、q 均爲比 1 大且比 8 小的正整數，試問 (p , q) 共有幾種組合？
(A)1　(B)2　(C)3　(D)4　。
代碼：111tcb23
(111 年統測 B)

(　　) 34. 某歌手打算在她的演唱會上表演一段由 6 首不同的歌曲串成的組曲，其中 3 首慢歌、3 首快歌。她的音樂總監建議在歌曲的安排上最多只能 2 首慢歌連在一起唱，因爲這樣才會使得整個組曲的節奏比較流暢。若她認同並接受音樂總監的建議，試問這段組曲可以有多少種不同的安排方式？　(A)576　(B)648　(C)696　(D)720　。
代碼：111tcc15
(111 年統測 C)

答案：CBDBA　CCCBA　DDDBC　BBABC　ABACB　BDDCB　ABCA

綜合練習

( ) 1. 設甲、乙兩班比賽棒球，規則是以先取得四勝者爲勝方，且每場比賽皆有勝負。若現已賽畢三場，甲班以二勝一負取得優勢，則往後有幾種可能賽事序列來決定勝方？ (A)8 (B)9 (C)10 (D)11。 代碼：p11102w1

( ) 2. 現有4個男生與3個女生要排成一列，若女生之間不排男生，則共有多少種排法 ？ (A)72 (B)120 (C)720 (D)5040。 代碼：p12092s1

( ) 3. 甲、乙、丙、丁、戊、己六人排成一列。若甲、乙、丙三人相鄰，且丙介於甲、乙之間，則此六人共有多少種排法？ (A)42 (B)44 (C)46 (D)48。 代碼：p12104w1

( ) 4. 將5男生與5女生分組成5對男女混聲二重唱。則有多少種可能之分組？ (A)15 (B)25 (C)120 (D)360。 代碼：p12103p1

( ) 5. 5男5女排一列，則男女相間隔的排法有幾種？ (A)2880 (B)28800 (C)14400 (D)1440。 代碼：p12229m1

( ) 6. 設 A、B、C、D、E 等5位小朋友排成一行郊遊，其中 A 因年紀較小不敢排在首、尾兩個位置，另 C，D 是好朋友，一定要相鄰，則其排法共有多少種？ (A)72 種 (B)24 種 (C)192 種 (D)720 種。 代碼：p12231m1

( ) 7. 某三位數其百位數數字爲偶數，個位數數字爲奇數，這樣的三位數共有多少個？ (A)90 (B)125 (C)200 (D)250。 代碼：p12090s1

( ) 8. 由0，1，2，3，4，5，6中任取相異三數作成三位數，則不小於340 的有多少個？ (A)105 (B)120 (C)165 (D)210。 代碼：p12088f1

( ) 9. 用0,1,2,3,4,5六個數字，可作成多少個大於3200的每一位數字不同的四位數 (A)166 (B)156 (C)168 (D)144。 代碼：p12254m1

( ) 10. 用1，2，3，4四個數字作成四位數，數字不重覆，求這所有四位數之和 (A)66000 (B)11110 (C)29616 (D)66660。 代碼：p12088y1

( ) 11. 已知 A 診所內有10個座位，編號爲1到10，某日有12位病患同時看診，其中有5位老人，3位兒童以及4位成人。若 A 診所安排老人坐編號前5個位置，兒童坐編號6、7、8位置，編號9和10位置各安排坐一位成人，則共有幾種安排方式？ (A) $5!\times 3!\times 2!\times C_2^4$ (B) $5!\times 3!\times 2!\times P_2^4$ (C) $10!$ (D) $10!\times C_2^4$ 。 代碼：p12105w1

( ) 12. $(2x-y+3z)^6$ 中 x^2y^3z 的係數爲 (A) -60 (B) -720 (C) 60 (D) 720 代碼：p13087f1

( ) 13. 將六位數223345的各數字任意排列，若其中的數字2須相鄰，但數字3 不得相鄰，試問可得多少不同的六位數？ (A) 72 (B) 60 (C) 48 (D) 36 。 代碼：p13088s1

( ) 14. 甲、乙、丙、丁、戊、己排一列，甲在乙、丙之左，求方法 (A) 30 (B) 60 (C) 120 (D) 240。 代碼：p13215m1

( ) 15. 3個台灣人、2個日本人、2個韓國人，則台灣人必須排在韓國人前面，方法有幾種？ (A) 252 (B) 504 (C) 72 (D) 84。 代碼：p13231m1

( ) 16. 4人中，至少有2人在同一月份出生的情形有 (A) 8856 (B) 20241 (C) 870 (D) 11880 種。 代碼：p14207m1

( ) 17. 從集合 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 中選取6個不同數字，其中至少有3個奇數的選法有幾種？ (A) 74 (B) 78 (C) 82 (D) 84 。 代碼：p21090s1

( ) 18. 某次數學測驗，規定考生由12題中任選8題作答。若選題方式爲：前4 題中任選2題，後8題中任選6題，則共有多少種選法 ？ (A) 32 (B) 168 (C) 256 (D) 495 。 代碼：p21092s1

( ) 19. 下列各問題中，何者的解答是 C_6^{10} (其中 $C_k^n=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$)？ 代碼：p22098k1
(A) 10位學生任意挑選6位同學排成一列，共有幾種情形？
(B) 10個不同顏色的球中任意挑選4個出來，共有幾種情形？
(C) 10張椅子排成一列，6個同學各自任意挑選1張椅子坐下，共有幾種情形？
(D) 10個相同的白色球任意挑選4個出來，共有幾種情形？

答案：CCDCB BCABD ABDDB AABB

筆記欄

單元 8　三角函數的應用

主題一　和差角公式與二倍角公式

1. 兩角和差公式：

$$\begin{cases}\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta\\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta\end{cases}$$

例：試求 $\sin 75^\circ$ 之值。

解：$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

1 老師講解

試求 $\cos(79^\circ-\theta)\cos(4^\circ-\theta)$
$+\sin(79^\circ-\theta)\sin(4^\circ-\theta)$ 之值。

1 學生練習

試求 $\sin 20^\circ\cos 25^\circ+\cos 20^\circ\sin 25^\circ$ 之值。

【代碼】t21a02m2

2 老師講解

已知 A 在第 III 象限，B 在第 IV 象限，且 $\cos A=-\frac{3}{5}$，$\sin B=-\frac{12}{13}$，試求 $\sin(A+B)$ 之值。

2 學生練習

設 α、β 均為銳角，且 $\cos\alpha=\frac{5}{13}$，$\sin\beta=\frac{3}{5}$，求 $\cos(\alpha+\beta)=$？

【代碼】t21a02m4

3 老師講解

設 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=\frac{-1}{\sqrt{10}}$，試求 $\alpha+\beta$ 之值。

3 學生練習

設 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$，試求 $\alpha+\beta$ 之值。

【代碼】t21b01m2

兩角和差公式：

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

例：試求 $\frac{\tan 85^\circ+\tan 50^\circ}{1-\tan 85^\circ\tan 50^\circ}$ 之值。

解：$\frac{\tan 85^\circ+\tan 50^\circ}{1-\tan 85^\circ\tan 50^\circ}=\tan 135^\circ=-\tan 45^\circ=-1$

4 老師講解

求 $\tan 50^\circ+\tan 10^\circ+\sqrt{3}\tan 50^\circ\tan 10^\circ=$？

4 學生練習

試求 $\tan 25^\circ\tan 20^\circ+\tan 20^\circ+\tan 25^\circ$ 之值。

【代碼】t21a03m3

5 老師講解

設 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 爲 $x^2+4x-2=0$ 之二根，求下列各式之值：

(1) $\tan(\alpha+\beta)$　(2) $\cos^2(\alpha+\beta)$

5 學生練習

設 $\tan\alpha$、$\tan\beta$ 爲 $x^2+3x+2=0$ 之二根，試求 $\cos^2(\alpha+\beta)$ 之值。

【代碼】t21b02m2

2. 二倍角公式：

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

6 老師講解

設 $\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$，$\sin\theta<0$，試求下列各式之值：(1) $\sin 2\theta$　(2) $\cos 2\theta$　(3) $\tan 2\theta$。

6 學生練習

$\cos\theta = \dfrac{-15}{17}$，$\tan\theta>0$，試求 $\dfrac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$ 之值。

【代碼】t22a01m2

7 老師講解

已知 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$，試求 $\sin 2\theta$ 之值。

7 學生練習

已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$，試求 $\sin 2\theta$ 之值。

【代碼】t22a02m2

8 老師講解

若 $\cos 2\theta=-\frac{1}{2}$，求 $\sin^6\theta+\cos^6\theta$ 之值。

8 學生練習

若 $\cos 2\theta=\frac{4}{5}$，求 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 之值。

【代碼】t22a02m3

9 老師講解

試求 $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$ 之值。

9 學生練習

試求 $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$ 之值。

【代碼】t22b03m2

3. 正餘弦疊合求極值：

(1) 設 a 、 b 均不為 0 ，利用和差角公式可將 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 化簡成一個振幅為 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的正弦或餘弦函數。

$$f(x)=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

$$\left[令\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}、\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

故 $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$

(2) 設 a 、 b 均不為 0 ， x 為任意角度，則 $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin x+b\cos x\le\sqrt{a^2+b^2}$

10 老師講解

設 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=r\sin(x+\theta)$ ，
其中 $r>0$ ， $0<\theta<2\pi$ ，求 $r=$ ？ $\theta=$ ？

10 學生練習

設 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=r\cos(x-\theta)$ ，
其中 $r>0$ ， $0<\theta<2\pi$ ，求 $r=$ ？ $\theta=$ ？

【代碼】t21251m1

11 老師講解

試求下列各式之最大值與最小值：

(1) $f(x)=4\sin x+3\cos x$

(2) $f(\theta)=-5\sin\theta+12\cos\theta+3$ 。

11 學生練習

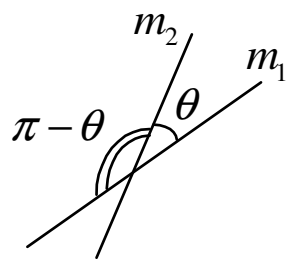
求 $f(\theta)=-8\sin\theta+15\cos\theta+2$ 之最大值與最小值。

【代碼】t21a04m2

4.直線之交角：

直線 L_1 、 L_2 斜率分別為 m_1 、 m_2 ；夾角為 θ (銳角)，

則 $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1\cdot m_2}\right|$ [另一夾角(鈍角)為 $180°-\theta$]



12 老師講解

求二直線 $2x+6y-5=0$ 與 $x-2y+3=0$ 之夾角爲何？

12 學生練習

求二直線 $2x+y-7=0$ 與 $3x-y+1=0$ 之銳角夾角爲何？

【代碼】g14a02m2

13 老師講解

求過 $(-1,3)$ 且與直線 $2x-y=3$ 的夾角爲 $45°$ 之直線方程式爲何？

13 學生練習

設直線 L 過點 $(1,2)$ ，且與另一直線 $L':3x+y-5=0$ 之交角爲 $45°$ ，試求直線 L 之方程式。

【代碼】g14b04m2

【學生練習答案】

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	2. $\dfrac{-16}{65}$	3. $45°$	4. 1
5. $\dfrac{1}{10}$	6. $\dfrac{15}{8}$	7. $-\dfrac{8}{9}$	8. $\dfrac{41}{50}$
9. $-\dfrac{1}{8}$	10. $r=2$ ，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$	11. $19,-15$	12. $45°$
13. $x+2y-5=0$ ，$2x-y=0$			

回家功課

( ) 1. 求 $\sin 76^\circ \sin 46^\circ + \sin 14^\circ \sin 44^\circ =$ ？ 代碼：t21087y1
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

( ) 2. ΔABC 中，$\tan A = \frac{1}{2}$，$\tan B = \frac{1}{3}$，試求 $\angle C$ 之度數。 代碼：t21217m1
(A) 135° (B) 45° (C) 30° (D) 150° 。

( ) 3. 求 $\tan 55^\circ \tan 80^\circ - \tan 55^\circ - \tan 80^\circ$ 之值為 代碼：t21210m1
(A) -1 (B) 1 (C) $\sqrt{3}$ (D) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 。

( ) 4. 設 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 為 $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ 的兩根，則 $\sin 2\theta =$ ？ 代碼：t22099w1
(A) -1 (B) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) 1 (D) 2 。

( ) 5. 已知 $\csc\theta = 3$ 且 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$，則 $\cos 2\theta =$ ？ 代碼：t22100p1
(A) $-\frac{11}{9}$ (B) $-\frac{7}{9}$ (C) $\frac{7}{9}$ (D) $\frac{11}{9}$

( ) 6. $\sin 2\theta \cdot (\tan\theta + \cot\theta) =$ (A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1 。 代碼：t22088s1

( ) 7. 試求 $\sin 37.5^\circ \cos 37.5^\circ \cos 75^\circ =$ (A) $\frac{1}{8}$ (B) $-\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{16}$ (D) $-\frac{1}{16}$ 。 代碼：t22251m1

( ) 8. 試求 $\tan 22.5^\circ + \cot 22.5^\circ =$ ？ (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{2}$ 。 代碼：t22b01m1

( ) 9. 設 $a > 0$，若 $L_1 : 2x - y + 7 = 0$ 與 $L_2 : ax + y - 13 = 0$ 之夾角爲 $\frac{\pi}{4}$，則 $a =$ (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 。。 代碼：g15206m1

( ) 10. 若 $x = 3$ 與 $3x + 4y + 2 = 0$ 之夾角爲 θ，求 $\sin\theta =$ 代碼：g14b05m1
(A) $\frac{3}{5}$ (B) $-\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $-\frac{4}{5}$

答案：AABCC AACBC

主題二　三角測量

三角測量：

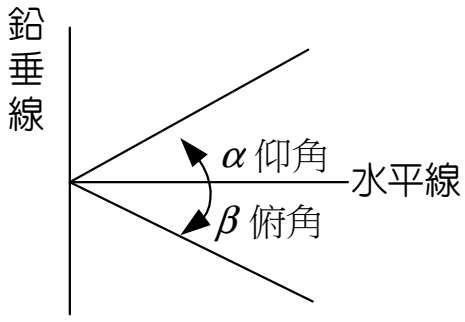
(1) 常用名詞：

①鉛垂線：垂直地面之直線（過地球球心之線）。

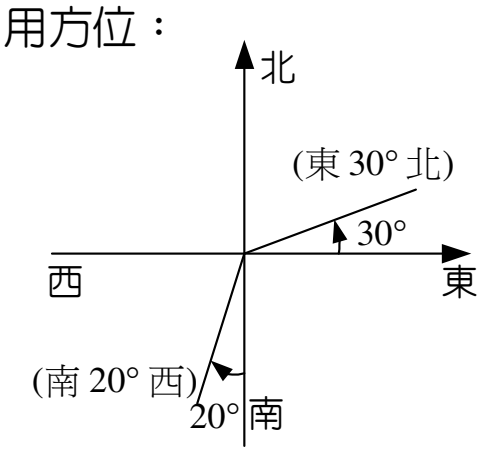
②水平線：垂直鉛垂線之直線。

③仰　角：視線與水平線往上之夾角。

④俯　角：視線與水平線往下之夾角。



(2) 常用方位：



老師講解

某人於地面處測得一山頂的仰角爲30°，往山的方向前進100公尺後，測得山頂的仰角爲60°，試求此山高。

學生練習

一塔高30公尺，位於一山頂上，某人測得塔底與塔頂的仰角分別爲30°與45°，則求此山高？

【代碼】t33a01m3

老師講解 2

氣象局測出，颱風中心位置由恆春東 60° 南，距離 200 公里處，以每小時 20 公里的速度朝正西方直線前進，若行進的速度方向不變。試求在 5 小時後，颱風中心位置距離恆春多少公里？

學生練習 2

A、B 兩地隔一湖泊，在湖泊遠處 C 點，測得 $\overline{AB}=200$ 公尺，且 $\angle BAC=75°$，$\angle ABC=60°$，試求 $\overline{AC}$ 的距離。

【代碼】t33a02m2

老師講解 3

大陸知名旅遊景區九寨溝，其中有一湖泊叫鏡海，在早上 9 點前，湖泊清澈如鏡，將對岸的湖光山色倒映在湖中，今彥臻站在比湖面高 9 公尺的觀景台上測出對岸山頂的仰角爲 45°，湖中山頂倒影的俯角爲 60°，則對岸山頂的高度爲____公尺。

學生練習 3

瑋年坐直升機參加“我愛台北 See Taipei”的活動，忽然間他看見直升機正飛越台北小巨蛋，又過一會兒，他發現他再看小巨蛋時，俯角爲 60°，又過 2 分鐘後，他再觀測時俯角已變爲 30°，若直升機一直保持等速直線飛行，高度固定且此直升機時速爲 36 公里，則此機高度爲_____公尺。

【代碼】t33232m1

4 老師講解

在一高樓之正東方 A 點及正南方 B 點，測得此高樓仰角分別為 $60°$ 及 $45°$，已知 $\overline{AB}=200$ 公尺，試求此高樓之高。

【代碼】t33b01m1

4 學生練習

設在塔之正西方 A 點及塔之正南方 B 點，測得塔頂之仰角各為 $45°$ 及 $30°$，且 $\overline{AB}=400$ 公尺，試求塔高。

【代碼】t33b01m2

【學生練習答案】

1. $15(\sqrt{3}+1)$	2. $100\sqrt{6}$	3. $600\sqrt{3}$	4. 200

回家功課

( ) 1. 一塔高30公尺，位於一山頂上，某人測得塔底與塔頂的仰角分別爲30°與45°，則求此山高＝？ 代碼：t33a01m3
(A)$10(\sqrt{5}+1)$ (B)$15(\sqrt{3}+1)$ (C)$20(\sqrt{2}+1)$ (D)$15(3+\sqrt{3})$ 。

( ) 2. 海邊二瞭望臺 A、B 相距80公尺，今由 A、B 二處瞭望海面上一船 C，測得 $\angle BAC=60°$，$\angle ABC=75°$，已知 $\sin 75°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\cos 75°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，求 $\overline{BC}$ 的長多少公尺？ 代碼：t33090k1
(A)$80(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ (B)$\dfrac{160\sqrt{2}}{3}$ (C)$\dfrac{160\sqrt{6}}{3}$ (D)$40\sqrt{6}$ 。

( ) 3. A、B 兩地隔一湖泊，在湖泊遠處 C 點，測得 $\overline{CA}=3$ 公里，$\overline{CB}=5$ 公里且 $\angle ACB=120°$，試求 $\overline{AB}$ 的距離＝ 代碼：t33a02m3
(A)6 (B)7 (C)$\sqrt{51}$ (D)$\sqrt{57}$ 。

( ) 4. 有 A、B 兩消防站，B 在 A 的正東方12公里，今 C 地發生火災，已知 C 地在 A 消防站的北15°東，在 B 消防站的西北方，試求從 A 或 B 消防站出發到達 C 地之最短距離爲 代碼：t33231m1
(A)4 (B)$4\sqrt{2}$ (C)$4\sqrt{6}$ (D)6 。

( ) 5. 一汽艇在湖上沿直線前進，有人用儀器在岸上先測得汽艇在正前方偏左50°，距離200公尺，一分鐘後，於原地再測，知汽艇駛到正前方偏右70°，距離爲300公尺，那麼此汽艇在這一分鐘行駛了多少公尺。 代碼：s15084c1
(A)$100\sqrt{19}$ (B)$100\sqrt{17}$ (C)$100\sqrt{15}$ (D)$100\sqrt{11}$ 。

( ) 6. 在某海防觀測站的東方12海浬處有 A、B 兩艘船相會之後，A 船以每小時12海浬的速度往南航行，B 船以每小時3海浬的速度向北航行。問幾小時後，觀測站及A、B兩船恰成一直角三角形。 代碼：s15089c1
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 。

答案：BDBCA A

主題三　極坐標與複數之極式

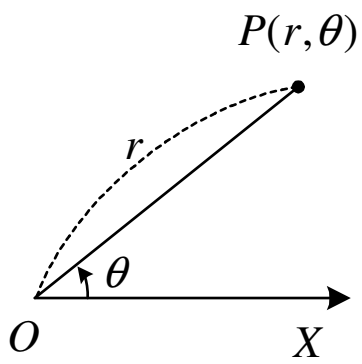
1.極坐標：

在一平面上任取一點 O，過 O 向右作 $\overline{OX}$ ，且在平面上任取 $\overline{OP}=r$ 。以 $\overline{OX}$ 為始邊，$\overline{OX}$ 與 $\overline{OP}$ 之夾角 θ 。

則以 (r,θ) 來表示 P 的位置，此種表示法示稱為極坐標。

其中 r 稱為 P 點的向徑。θ 稱為 P 點的幅角。

當 $r>0$ ，$0\le\theta<2\pi$ ，則 θ 稱為 P 點的主幅角。

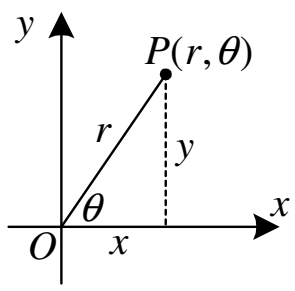


2.直角坐標 (x,y) 與極坐標 (r,θ) ：

(1) 若 P 點的極坐標為 (r,θ) ，則直角坐標為 $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$

(2) 若 P 點不為原點且直角坐標為 (x,y) ，則極坐標為 (r,θ) ，

(其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$)，$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ ，$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$



註：極坐標的表示不唯一，$(2,\dfrac{\pi}{3})$ 與 $(-2,\dfrac{4\pi}{3})$ 皆表示同一個點坐標 $(1,\sqrt{3})$

老師講解 1

將下列各直角坐標化爲極坐標，
並取向徑 $r>0$ ，幅角 $0\le\theta<2\pi$ 。
(1) $(\sqrt{3},1)$　　(2) $(-2,-2)$

學生練習 1

將直角坐標 $(-\sqrt{3},1)$ 化爲極坐標，
並取向徑 $r>0$ ，幅角 $0\le\theta<2\pi$ 。
【代碼】a82a01m2

2 老師講解

將下列極坐標化爲直角坐標：

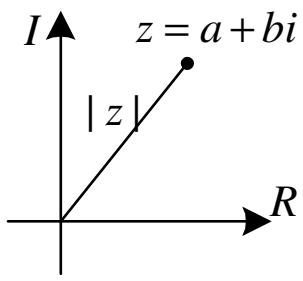
(1) $(3,\frac{2\pi}{3})$　　(2) $(6,\frac{4\pi}{3})$

2 學生練習

將極坐標 $(2,\frac{11\pi}{6})$ 化爲直角坐標：

【代碼】a82a01m3

3. 複數平面：(高斯平面)



設直角坐標平面的 x 軸作為實軸， y 軸作為虛軸，

則由實軸與虛軸所構成的平面稱為複數平面或高斯平面。

設 a , $b\in R$ 則複數 $a+bi$ 和點 (a,b) 形成一對一的對應關係。

4. 複數的絕對值：

(1) 複數 $z=a+bi$ 的絕對值表示複數平面上，點 $P(a,b)$ 與原點的距離，即 $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ 。

例：設 $z=3-4i$ ，求 $|z|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

(2) 設 z_1 、 z_2 為複數，則

①$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$　　②$|\frac{z_1}{z_2}|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$

③$a,b\in R$ ， $z=a+bi\Rightarrow z\cdot\overline{z}=a^2+b^2=|z|^2$　　④$|z^n|=|z|^n$

3 老師講解

求下列各式之值：

(1) 設 $z=3-4i$ ，求 $|z|=$？

(2) 設 $z=(5+12i)(4+3i)$ ，求 $|z|=$？

(3) 設 $z=(7+24i)(3-4i)^2$ ，求 $|z|=$？

3 學生練習

求下列各式之值：

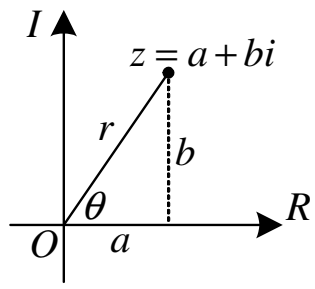
(1) 設 $z=(2+i)(1+3i)$ ，求 $|z|=$？

(2) 設 $z=\frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$ ，求 $|z|=$？

【代碼】a82a02m2

5.複數之極式：

$a, b \in R$ ， $z = \underbrace{a+bi}_{\text{標準式}} = r\cos\theta + ir\sin\theta = \underbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{極式}}$



(1) 如右圖， $\cos\theta = \dfrac{a}{r}, \sin\theta = \dfrac{b}{r} \Rightarrow \begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$

(2) $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} > 0$ ，稱為向徑。

若 $r > 0$ ， $0 \le \theta < 2\pi$ ，則 θ 稱為 z 的主幅角，記作 $\arg(z) = \theta$ 。

老師講解 4

化下列各式爲極式：

(1) $-\sqrt{3}+i$　　(2) $2-2i$

學生練習 4

將複數 $z = -1-\sqrt{3}i$ 化爲極式。

【代碼】a82a03m2

6.極式之性質：

設 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ， $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ，則：

(1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

(2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

(3) 設 $z = r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$ ，則 $z^n = r^n(\cos n\theta \pm i\sin n\theta)$

5 老師講解

若 $Z_1=8(\cos 100°+i\sin 100°)$，

$Z_2=(\cos 70°+i\sin 70°)$，

$Z_3=4(\cos 50°+i\sin 50°)$，求 $\dfrac{Z_1\cdot Z_2}{Z_3}$ 之值。

5 學生練習

化簡 $\dfrac{6(\cos 220°+i\sin 220°)}{3(\cos 70°+i\sin 70°)}$ 之值。

【代碼】a83a01m2

6 老師講解

求 $(1-\sqrt{3}i)^8=$？

6 學生練習

設 $i=\sqrt{-1}$，求 $(-\sqrt{3}+i)^6=$？

【代碼】a83a02m2

7 老師講解

設 $\theta=15°$，則

$$\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^4(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}{(\cos 3\theta-i\sin 3\theta)^2}=?$$

7 學生練習

化簡 $\dfrac{(\cos 5°+i\sin 5°)^4(\cos 9°+i\sin 9°)^8}{(\cos 4°+i\sin 4°)^3(\cos 10°+i\sin 10°)^2}$

【代碼】a83b01m2

【加強題】

1. $\sin^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x$之最大值與最小值之和爲_____。

2. 俊威自某大樓頂樓向正東方眺望，觀測到一家便利商店，此時測得俯角爲$45°$；俊威再向東$30°$南處眺望，觀測到一家速食店，此時測得俯角爲$30°$，已知兩家店相距25公尺，試求此大樓的高度爲_____公尺。

3. 設$z=-2(\cos 40°-i\sin 40°)$，則z的主幅角$=$_____。

4. 求$(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i})^6=$_____。

【學生練習答案】

1. $(2,\frac{5}{6}\pi)$	2. $(\sqrt{3},-1)$	3. (1) $5\sqrt{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	
4. $2(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi)$		5. $-\sqrt{3}+i$	6. -64
7. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$			

回家功課

( ) 1. 極坐標平面上兩點 $(4,60°)$ 與 $(4,120°)$ 的距離為 代碼：a82211m1
(A) $\sqrt{12}$ (B) 2 (C) $\sqrt{26}$ (D) 4 。

( ) 2. 設二複數 Z_1，Z_2 分別為 $2+i$，$1+3i$，則 $|Z_1|\cdot|Z_2|=$ 代碼：a82201m1
(A) $5\sqrt{2}$ (B) $4\sqrt{2}$ (C) $6\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{6}$ 。

( ) 3. 設 $i=\sqrt{-1}$，則求複數 $\dfrac{(\sqrt{3}+i)(2i)^2}{(1-i)^2}$ 的絕對值為 代碼：a82208m1
(A) 2 (B) $\sqrt{2}$ (C) 1 (D) 4 。

( ) 4. 將複數 $z=1-\sqrt{3}i$ 化為極式 代碼：a82206m1
(A) $2(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi)$ (B) $2(\sin\frac{5\pi}{3}+i\cos\frac{5\pi}{3})$
(C) $2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$ (D) $(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi)$ 。

( ) 5. 設 $z=\dfrac{(\cos 8°+i\sin 8°)^6(\cos 25°+i\sin 25°)^4}{(\sin 86°+i\cos 86°)^7}$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 z 之值為 代碼：a83202m1
(A) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (B) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (C) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (D) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 。

( ) 6. 已知 $i=\sqrt{-1}$，化簡 $(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7})(\cos\frac{10\pi}{21}+i\sin\frac{10\pi}{21})=$？ 代碼：a83098k1
(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ (B) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (C) $\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ (D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ 。

( ) 7. 已知 $i=\sqrt{-1}$，則 $(\sqrt{3}+i)^{10}=$？ 代碼：a83091k1
(A) $2^9(1+\sqrt{3}\,i)$ (B) $2^9(1-\sqrt{3}\,i)$ (C) $2^9(\sqrt{3}+i)$ (D) $2^9(\sqrt{3}-i)$ 。

( ) 8. 設 $i=\sqrt{-1}$，則 $(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i})^9$ 等於 (A) $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ (B) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ (C) -1 (D) 1 。 代碼：a83206m1

( ) 9. 設 $i=\sqrt{-1}$ 且複數 z 的主幅角記作 $\arg z$，$0\le\arg z<2\pi$，代碼：a82096k1
試求 $\arg(-\sqrt{3}+i)=$？ (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{7\pi}{6}$ (D) $\frac{11\pi}{6}$ 。

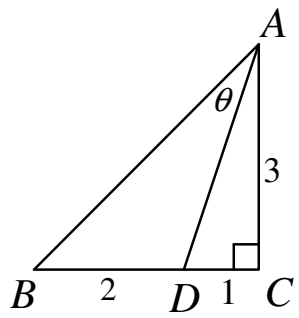
答案：DADCD BBCB

歷屆試題

( ) 1. 已知ΔABC中，$\angle C=90°$，D在$\overline{BC}$線段上，且$\overline{AC}=50$，$\angle ABC=30°$，$\angle ADC=45°$，如圖(一)所示，則$\overline{BD}=$？
(A)50 (B)$50(\sqrt{3}-1)$ (C)$50\sqrt{3}$ (D)100。

代碼：t33100s1
(100 年統測 B)

( ) 2. 已知ΔABC中，$\angle C=90°$，D在$\overline{BC}$線段上，且線段長$\overline{BD}=2$，$\overline{DC}=1$，$\overline{AC}=3$，如圖(二)所示。令$\angle BAD=\theta$，求$\cos\theta=$？
(A)$\frac{1}{\sqrt{10}}$ (B)$\frac{1}{\sqrt{5}}$ (C)$\frac{2}{\sqrt{10}}$ (D)$\frac{2}{\sqrt{5}}$。



代碼：t31100k1
(100 年統測 C)

( ) 3 判斷下列各數值中，何者小於0？($\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$)
(A)$\cos 100°-\sin 2011°$ (B)$\cos^2 100°-\sin^2 100°$
(C)$\cos^2 2011°-\sin^2 2011°$ (D)$\cos 100°\cos 2011°-\sin 100°\sin 2011°$。

代碼：t22100k1
(100 年統測 C)

( ) 4. 已知$i=\sqrt{-1}$。若$z=\cos 78°+i\sin 78°$，則$z^{15}=$？
(A)$-i$ (B)-1 (C)i (D)1。

代碼：a83100k1
(100 年統測 C)

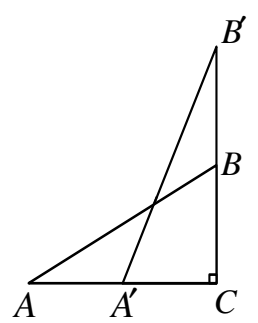
( ) 5. 已知$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，則下列大小關係何者正確？
(A)$\cos\theta<\sin 2\theta<\cos 2\theta<\sin\theta$ (B)$\sin 2\theta<\cos 2\theta<\cos\theta<\theta<\sin\theta$
(C)$\sin 2\theta<\cos\theta<\cos 2\theta<\sin\theta$ (D)$\cos\theta<\cos 2\theta<\sin 2\theta<\sin\theta$。

代碼：t22101k1
(101 年統測 C)

( ) 6. 已知平面上兩點$A(\cos\frac{3\pi}{4},\sin\frac{3\pi}{4})$、$B(\cos\frac{\pi}{12},\sin\frac{\pi}{12})$，求線段$\overline{AB}$之長
(A)1 (B)$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (C)$\sqrt{2}$ (D)$\sqrt{3}$。

代碼：t21102s1
(102 年統測 B)

( ) 7. 已知$\overline{AC}$垂直$\overline{B'C}$，點A'、B分別在$\overline{AC}$、$\overline{B'C}$上，$\overline{AB}=\overline{A'B'}=13$，如圖(三)。若$\angle B'A'C=2\angle BAC$，且$\Delta ABC$的面積爲39，則$\Delta A'B'C$的面積爲何？
(A)48 (B)42 (C)36 (D)30。



圖(三)

代碼：t22102s1
(102 年統測 B)

( ) 8. 若 $2+3\cos 2\theta=0$，則 $\sin^4\theta-\cos^4\theta=$？ 代碼：t22102k1 (102 年統測 C)

(A) $\frac{-\sqrt{5}}{3}$ (B) $\frac{-2}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$。

( ) 9. 已知 a、b 爲實數，$i=\sqrt{-1}$。若 $(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8=a+bi$，則 $a^2+b^2=$？ 代碼：a83102k1 (102 年統測 C)

(A) 16 (B) 64 (C) 256 (D) 1024。

( ) 10. 已知某銳角 θ 滿足 $\cos\theta=\frac{4}{5}$，求 $\tan 2\theta=$ 代碼：t22103s1 (103 年統測 B)

(A) $\frac{13}{12}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{12}{5}$ (D) $\frac{24}{7}$。

( ) 11. 已知一矩形的長爲 $2\cos 1^\circ\cos 2^\circ$，寬爲 $2\sin 1^\circ\csc 4^\circ$，則此矩形面積爲何？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。 代碼：t22103s2 (103 年統測 B)

( ) 12. 設 $\sin(-45^\circ)\cdot\sin 15^\circ=k-\cos 45^\circ\cos(-15^\circ)$，則 k 之值爲何？ 代碼：t21103k1 (103 年統測 C)

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$。

( ) 13. 設 $z=\frac{(5-12i)(3+4i)}{(4-3i)(12-5i)}$，$i=\sqrt{-1}$，則 $|z|$ 之值爲何？ 代碼：a82103k1 (103 年統測 C)

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) 13。

( ) 14. 設 $z_1=(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})^4$，$z_2=(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^2$，則 $\frac{z_1}{z_2}$ 之值爲何？ 代碼：a83103k1 (103 年統測 C)

(A) -1 (B) i (C) 0 (D) 1。

( ) 15. 一位遊客在平地上測得某大樓頂端的仰角爲 30°，他朝該大樓的方向直走了 d 公尺後，再測一次，得到仰角爲 45°。若該大樓高度爲 300 公尺，則 $d=$？ 代碼：t33104s1 (104 年統測 B)

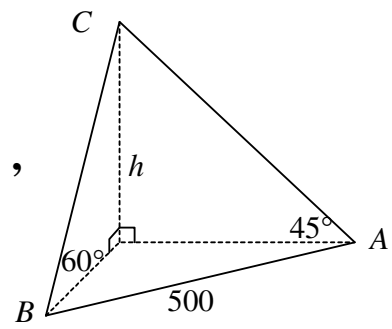
(A) $300(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ (B) $300(\sqrt{2}-1)$ (C) $\frac{300\sqrt{2}}{2}$ (D) $300(\sqrt{3}-1)$。

( ) 16. 若 $\sin\theta=\frac{1}{3}$，則 $\sqrt{2-2\cos 2\theta}=$？ 代碼：t22104k1 (104 年統測 C)

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$。

工職數學金箍棒總複習

( )17. 今有人欲測一山的高度，當此人在此山的正東方一點 A，測得山頂 C 的仰角爲 $45°$，又當他在山的南 $60°$ 西方向一點 B，測得山頂 C 的仰角爲 $60°$，如圖(四)所示。若 A、B 兩點相距 500 公尺，則此山高 h 爲多少公尺？
(A) $\frac{500}{3}\sqrt{3}$ (B) $\frac{500}{7}\sqrt{21}$ (C) $\frac{500}{3}\sqrt{21}$ (D) $500\sqrt{3}$。


C
h
45°
A
60°
B
500
圖(四)

代碼：t33104k1 (104 年統測 C)

( )18. 已知 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$，且 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos\beta=\frac{12}{13}$，則 $\sin(\alpha+\beta)$ 之值爲何？ (A) $-\frac{63}{65}$ (B) $-\frac{33}{65}$ (C) $\frac{33}{65}$ (D) $\frac{63}{65}$。

代碼：t21105s1 (105 年統測 B)

( )19. 設 $a=\cos 40°\cos 80°\cos 160°$，$b=\sin 10°\cos 20°\cos 40°$，則 $a+b$ 之值爲何？ (A) $-\frac{1}{4}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$。

代碼：t22105k1 (105 年統測 C)

( )20. 已知 $z_1=\sqrt{3}+i$，$z_2=1+i$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 $z_1^2z_2^4$ 可表示爲下列哪一個？
(A) $16(\cos 240°+i\sin 240°)$ (B) $16(\cos 300°+i\sin 300°)$
(C) $16(\cos 60°+i\sin 60°)$ (D) $16(\cos 120°+i\sin 120°)$。

代碼：a83105k1 (105 年統測 C)

( )21. 已知 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=a\cdot\sin(\theta+b)$，$a>0$，$0\le b\le 2\pi$，則下列何者正確? (A) $a=4$，$b=\frac{\pi}{6}$ (B) $a=2$，$b=\frac{\pi}{3}$
(C) $a=2$，$b=\frac{4\pi}{3}$ (D) $a=4$，$b=\frac{\pi}{3}$。

代碼：t21106s1 (106 年統測 B)

( )22. 若 $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，則 $\tan 2\theta=$？
(A) $2-\sqrt{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$。

代碼：t22106k1 (106 年統測 C)

( )23. 一輛遙控小車在平坦無坡度的操場行駛，正前方遠處有一座直立水塔，測得塔頂的仰角 $30°$。若小車往水塔方向移動 10 公尺後，測得塔頂的仰角 $45°$，則水塔的高度爲多少公尺?
(A) $5\sqrt{3}$ (B) $5(\sqrt{2}+1)$ (C) $4(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (D) $5(\sqrt{3}+1)$。

代碼：t33107s1 (107 年統測 B)

( )24. 設 $f(x)=4\sin x+\cos(2x)+7$ 的最小值爲 m，最大值爲 M，則 $m+M=$?
(A) -7 (B) 1 (C) 12 (D) 21。

代碼：t22107k1 (107 年統測 C)

8-20

三角函數的應用 Chapter 8

( ) 25. 若 $\tan 19° = a$，則 $\sin 2018° = ?$
(A) $\frac{-2}{1+a^2}$ (B) $\frac{-2a}{1+a^2}$ (C) $\frac{a}{1+a^2}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$。
代碼：t13107k2 (107 年統測 C)

( ) 26. 小明在平地上測得某一直立高樓的頂端之仰角爲 45°。他面向該高樓向前直行 30 公尺之後，測得高樓頂端之仰角爲 60°。試問小明第二次測仰角時，距離高樓的底部約多少公尺?
(A) 30 (B) $15(\sqrt{3}-1)$ (C) $15(\sqrt{3}+1)$ (D) 45。
代碼：t33108s1 (108 年統測 B)

( ) 27. 有一梯子斜靠於牆上，且梯子、地面及牆面構成一個 30°、60°、90° 的直角三角形。若梯子沿牆面下滑 $\frac{1}{2}$ 公尺時，則梯子、地面及牆面構成一個 45°、45°、90° 的直角三角形。試問梯長爲多少公尺?
(A) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$。
代碼：t33108k1 (108 年統測 C)

( ) 28. 在 ΔABC 中，若 $\frac{\cos B + i\sin B}{(\cos A + i\sin A)(\cos C + i\sin C)}$ 爲實數其中 $i=\sqrt{-1}$，則 ΔABC 必爲何種三角形?
(A)等腰三角形 (B)銳角三角形 (C)直角三角形 (D)鈍角三角形。
代碼：a83108k1 (108 年統測 C)

( ) 29. 已知 $O(0,0)$、$P(-3,4)$ 與 $Q(x,y)$ 爲坐標平面上三點。若以 O 爲圓心，$\overline{OP}$ 爲半徑，逆時針方向轉動 30° 後，P 點與 Q 點重疊，則下列何者正確?
(A) $x=\frac{-3\sqrt{3}-4}{2}$ (B) $x=\frac{-3\sqrt{3}+4}{2}$ (C) $y=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$ (D) $y=\frac{4\sqrt{3}+3}{2}$。
代碼：a82108k1 (108 年統測 C)

( ) 30. 若 $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$，則 $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = ?$
(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$。
代碼：t22109s1 (109 年統測 B)

( ) 31. 某甲沿著馬路向正前方一棟大樓直線前進，抬頭看大樓頂端的仰角爲 30 度，走了 100 公尺後，第二次抬頭看大樓頂端，此時的仰角爲 45 度，則第二次抬頭看大樓時距離大樓還有多遠？
(A) $25(\sqrt{3}-1)$ (B) $50(\sqrt{3}+1)$ (C) $100(\sqrt{3}-1)$ (D) $100(\sqrt{3}+1)$。
代碼：t33109s1 (109 年統測 B)

( ) 32. 若 $\sin 80° = a$，$\cos 59° = b$，則 $\cos 21° = ?$
(A) $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}$ (B) $a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}$
(C) $ab-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$ (D) $ab+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$。
代碼：t21109k1 (109 年統測 C)

8-21

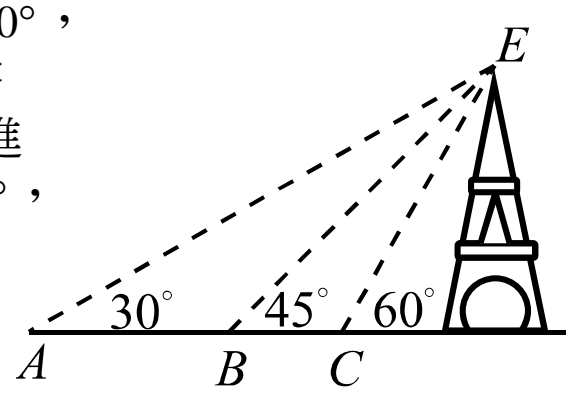
( ) 33. 設 $(\sqrt{3}+i)z=-2\sqrt{3}+2i$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 z 之主幅角為何?
(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{5\pi}{6}$ (D) $\frac{7\pi}{6}$ 。
代碼：a82109k1
(109 年統測 C)

( ) 34. 已知 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且 $\sin\theta=\frac{3}{5}$。若 $\sin 4\theta=a$，則下列何者正確？
(A) $0<a<\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}<a<\frac{3}{4}$ (D) $\frac{3}{4}<a<1$ 。
代碼：110tcb16
(110 年統測 B)

( ) 35. 孫悟空師徒四人取經途中經過一廣闊平原，看到前方有一尊高大佛像，其頂部仰角為 $37°$，四人往佛像前行 31 公尺後，佛像頂部仰角變為 $53°$。求佛像高度約為多少公尺？
(參考資料：$\sin 37°\approx\frac{3}{5}$、$\cos 37°\approx\frac{4}{5}$、$\tan 37°\approx\frac{3}{4}$)
(A)57 (B)53 (C)37 (D)31 。
代碼：110tcb25
(110 年統測 B)

( ) 36. 已知 $i=\sqrt{-1}$，$(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i})^2+(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i})^2=a+bi$，則 $a+b=$？
(A) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ (B) -1 (C) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ (D)1 。
代碼：110tcc19
(110 年統測 C)

( ) 37. 某人由 A 處測量高塔塔頂 E 的仰角為 $30°$，朝高塔方向前進 a 公尺至 B 處時測量塔頂 E 的仰角為 $45°$，繼續朝高塔方向前進 b 公尺至 C 處時測量塔頂 E 的仰角為 $60°$，如圖(二)所示，則 $\frac{a}{b}=$?
(A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 。
代碼：111tcc12
(111 年統測 C)



圖(二)

答案：BDBCC DDCCD ABADD CBDBA BCDCB CCCAD BABCB BA

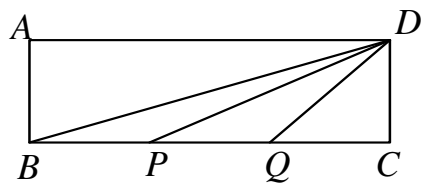
三角函數的應用 Chapter 8

綜合練習

( ) 1. ΔABC 中，$\sin A=\frac{3}{5}$，$\cos B=-\frac{7}{25}$，求 $\sin C=$？ 代碼：t21218m1
(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{3}{11}$ (D) $\frac{4}{7}$。

( ) 2. 設 $A(\cos 130°,\sin 130°)$、$B(\cos 10°,\sin 10°)$，求 $\overline{AB}=$？ 代碼：t21252m1
(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2。

( ) 3. 設 $ABCD$ 爲一矩形，且 $\overline{BC}=3\overline{AB}$。令 P 點與 Q 點爲 $\overline{BC}$ 上之點，且 $\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{QC}$，如右圖。若 $\angle DBC=\alpha$，且 $\angle DPC=\beta$，則 $\tan(\alpha+\beta)=$？ 代碼：t21098k1


A
D
B
P
Q
C

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $2-\sqrt{3}$ (C) 1 (D) $2+\sqrt{3}$。

( ) 4. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，若 $\tan\theta=\frac{3}{4}$，試求 $\cos 2\theta=$？ (A) $\frac{7}{25}$ (B) $\frac{7}{16}$ (C) $\frac{9}{16}$ (D) $\frac{24}{25}$。 代碼：t22091k1

( ) 5. $(1-\tan 35°)(1-\tan 100°)=$ (A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) -1。 代碼：t23201m1

( ) 6. 設 $\cos 10°=a$，則 $\sin 200°=$？ 代碼：t22093k1
(A) $-2\sqrt{1-a^2}$ (B) $-2a\sqrt{1-a^2}$ (C) $2\sqrt{1-a^2}$ (D) $2a\sqrt{1-a^2}$。

( ) 7. 試求 $f(x)=6\cos^2 x+4\sin 2x$ 的最大值 (A) 2 (B) -2 (C) 8 (D) -8。 代碼：t22226m1

( ) 8. 求函數 $f(x)=(\cos x+3\sin x)(\cos x-\sin x)$ 之最小值爲何？ 代碼：t23099k1
(A) $-2\sqrt{5}$ (B) -4 (C) $-\frac{7}{2}$ (D) $-\sqrt{5}-1$。

( ) 9. 設 $L_1:2x-3y-4=0$ 與 $L_2:3x+y-6=0$ 二直線的夾角爲 θ，則 $\sin\theta=$？ 代碼：g15204m1
(A) $-\frac{11}{\sqrt{130}}$ (B) $\frac{11}{\sqrt{130}}$ (C) $-\frac{11}{3}$ (D) $\frac{11}{3}$。

8-23

( ) 10. 某甲在平地上看一直立旗桿桿頂的仰角爲30°，今某甲朝旗桿的方向前進30公尺後，再看同一旗桿桿頂的仰角爲60°，則此時某甲離旗桿有多少公尺？ (A)12 (B)15 (C)18 (D)$15\sqrt{3}$ 。 代碼：t33093s1

( ) 11. 一飛機在高度爲$600\sqrt{3}$公尺的水平面上等速東飛，地面上開始觀測飛機時仰角爲60°，六秒後再觀測仰角只有30°，則飛機的速度爲？ (A)100 (B)$200\sqrt{3}$ (C)200 (D)$100\sqrt{2}$ 公尺/秒。 代碼：t33208m1

( ) 12. 有一測量員發現：當他從A點測量時，山是在他的東邊偏北60°且山的仰角爲45°；若由A點向東行200公尺到B點測量時，則山在他的西邊偏北60°。試求山高是多少公尺？(若由低處觀測點仰望高處的目標時，則目標和觀測點的連線與水平線的夾角稱爲仰角) (A)100 (B)$100\sqrt{2}$ (C)$100\sqrt{3}$ (D)200 。 代碼：t33095k1

( ) 13. 廣場上插了一支紅旗與一支白旗，小明站在兩支旗子之間。利用手邊的儀器，小明測出他與正東方紅旗間的距離爲他與正西方白旗間距離的6倍；小明往正北方走了10公尺之後再測量一次，發現他與紅旗的距離變成他與白旗距離的4倍。試問紅白兩旗之間的距離最接近下列哪個選項？ (A)60公尺 (B)65公尺 (C)70公尺 (D)75公尺。 代碼：s15097c1

( ) 14. 有A、B兩棟大樓，站在A棟樓頂觀測，測得B棟樓底俯角爲60°，在A棟樓底觀測，測得B棟樓頂仰角爲75°，已知A棟大樓的高度60公尺，試求B棟的高度。($\tan 75° = 2+\sqrt{3}$) (A)$30(3+\sqrt{3})$ (B)$20\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$ (C)$60(3+\sqrt{3})$ (D)$60(1+\sqrt{3})$ 。 代碼：s15205m1

( ) 15. 設i爲虛數單位，則$\sin 73° + i\cos 253°$之極式爲 (A)$\cos 17° + i\sin 17°$ (B)$\cos 73° + i\sin 73°$ (C)$\cos 253° + i\sin 253°$ (D)$\cos 343° + i\sin 343°$ 。 代碼：a83087x1

( ) 16. 已知$i=\sqrt{-1}$，求$(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i})^{12}=$？ (A)$-\frac{1}{64}$ (B)$\frac{1}{32}$ (C)$-\frac{1}{8}$ (D)$\frac{1}{4}$ 。 代碼：a83090k1

答案：ACCAB BCDBB CDABD A

單元 9　指數與對數

主題一　指數的運算與指數函數

基礎數學 充電站

次方與指數：代碼 **b04k01m1**

以下題目的國中基礎運算，溫習一下吧～

1. 指數的定義及其運算：

(1) 定義：

①正整數指數：設 $a\in R$，$n\in N$，則 $\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots\cdots a}_{n\text{個}}=a^n$，$a$ 稱為底數，n 稱為指數

②零指數：設 $a\in R$，$a\neq 0$，則 $a^0=1$

(2) 指數律：$a>0$、$b>0$，m、$n\in R$

① $\begin{cases} a^m\cdot a^n=a^{m+n} \\ \dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \end{cases}$　② $(a^m)^n=a^{mn}$　③ $\begin{cases} (ab)^n=a^nb^n \\ (\dfrac{b}{a})^n=\dfrac{b^n}{a^n} \end{cases}$

(3) 負指數：

設 $a\in R$，$a\neq 0$，$n\in N$，則 $\dfrac{1}{a^n}=a^{-n}$

例：$\dfrac{1}{81}=\dfrac{1}{3^4}=3^{-4}$、$2^{-4}=\dfrac{1}{2^4}=\dfrac{1}{16}$、$(\dfrac{2}{3})^{-1}=\dfrac{1}{\frac{2}{3}}=\dfrac{3}{2}$、$(\dfrac{3}{5})^{-3}=(\dfrac{5}{3})^3=\dfrac{125}{27}$

(4) 分數指數：

設 $a\in R$，$a>0$，$m,n\in N$，則 $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

例：$\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$、$\sqrt[3]{9}=3^{\frac{2}{3}}$、$\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}}=3^{-\frac{3}{4}}$、$5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{25}$、$6^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

老師講解 1

試化簡下列各式：

(1) $(\dfrac{8}{27})^{-\frac{2}{3}}$　(2) $(0.25)^{-0.25}$

學生練習 1

試化簡下列各式：

(1) $(\dfrac{8}{27})^{\frac{2}{3}}$　(2) $(\dfrac{16}{81})^{0.25}$　(3) $(0.064)^{-\frac{2}{3}}$

【代碼】a41a03m2

2 老師講解

試化簡下列各式：

(1) $(\frac{1}{8})^2\cdot(\sqrt[4]{2})^8\cdot(\frac{1}{\sqrt[3]{4}})^{-6}$

(2) $27^{\frac{4}{3}}\times\sqrt{243\div\sqrt[3]{81}}$

2 學生練習

試化簡下列各式：

(1) $(0.5)^2\times(0.25)^{-3}\times(8)^{-\frac{1}{3}}$

(2) $27^{\frac{2}{3}}\times\sqrt{729\div\sqrt[3]{9}}$

【代碼】a41a03m3

3 老師講解

試化簡下列各式：

(1) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}$　　(2) $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}\div x^2}$

3 學生練習

試化簡下列各式：

(1) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a}$　　(2) $(\sqrt{a})^{\frac{2}{3}}\times\sqrt[3]{a^2}$

(3) $(\frac{\sqrt[4]{a^2b^6}\cdot\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a^2b}})^6$

【代碼】a41a03m4

4 老師講解

設 $67^x=27$，$603^y=81$，求 $\frac{3}{x}-\frac{4}{y}$ 之值。

4 學生練習

設 $\begin{cases}171^x=243\\19^y=9\end{cases}$，求 $\frac{5}{x}-\frac{2}{y}$ 之值。

【代碼】a41b02m2

5 老師講解

設 $a>0$，且 $a^{2x}=3$，求 $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$ 之值。

5 學生練習

設 $a^{2x}=2$，求 $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$ 之值。

【代碼】a41b04m2

6 老師講解

設 $a^x+a^{-x}=3$，求 $a^{3x}+a^{-3x}$ 之值。

6 學生練習

設 $a^x+a^{-x}=2$，求 $a^{3x}+a^{-3x}$ 之值。

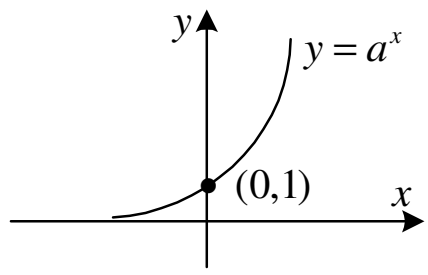
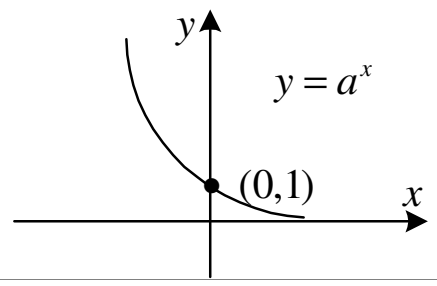
【代碼】a41b05m2

2. 指數函數：

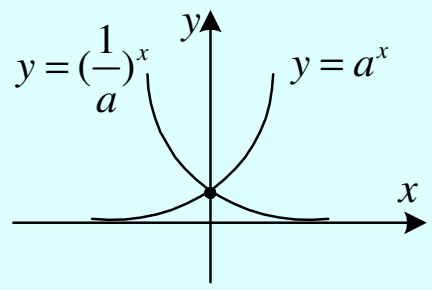
(1) 定義：

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，對任意實數 x，函數 $y=f(x)=a^x$，稱為以 a 為底的指數函數。

(2) 圖形：

項目	(1) $a>1$	(2) $0<a<1$
圖型		
特徵	① 恆過(0,1) ② 圖形均在 x 軸之上方 ③ $a>1$ 時，$y=a^x$ 為遞增函數 $x_1>x_2 \Leftrightarrow a^{x_1}>a^{x_2}$ ④ 以 x 軸之左側為漸近線	① 恆過(0,1) ② 圖形均在 x 軸之上方 ③ $0<a<1$ 時，$y=a^x$ 為遞減函數 $x_1>x_2 \Leftrightarrow a^{x_1}<a^{x_2}$ ④ 以 x 軸之右側為漸近線

(3) $y=a^x$ 與 $y=(\frac{1}{a})^x$ 之圖形對稱於 y 軸(如右圖)



老師講解

比較下列各式之大小：

(1) $a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{5\sqrt[3]{5}}$，$c=\sqrt[6]{25}$

(2) $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt[3]{5}$，$c=\sqrt[4]{7}$

(3) $a=(0.2)^{\frac{1}{3}}$，$b=(0.04)^{\frac{1}{5}}$，$c=(0.008)^{\frac{1}{7}}$

學生練習

試求出下列各式何者最小：

(1) (A) $\sqrt[4]{125}$　(B) $\sqrt[5]{(125)^2}$　(C) $\sqrt[3]{25}$

(2) (A) $\sqrt[4]{2}$　(B) $\sqrt[6]{3}$　(C) $\sqrt[8]{5}$　(D) $\sqrt[12]{12}$

【代碼】a42a02m3

(3) **指數方程式**：若 $a>0$，$a\neq 1$，則 $a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$

8 老師講解

求解出下列各式之 x 值：

(1) $3^{x+2}=(\frac{1}{81})^3$　(2) $(\frac{2}{3})^x=(\frac{3}{2})^{2x+3}$

8 學生練習

求方程式 $(2^{4-x})^x=8$ 的所有解總和。

【代碼】a42b01m2

9 老師講解

已知 $2^{2x}-9\cdot 2^x+8=0$，求出 x 之值。

9 學生練習

求方程式 $3^{2x}-3^{x+1}-54=0$ 之解。

【代碼】a42b02m2

10 老師講解

已知 $15^x-2\cdot 3^x+3\cdot 5^x-6=0$，
求出 5^{x+2} 之值。

10 學生練習

解方程式 $6^x-4\cdot 3^x+2^x-4=0$。

【代碼】a42b03m2

(4) 指數不等式：

若 $a>0$，$a\neq 1$，則 $a^{f(x)}>a^{g(x)}$

①$a>1$時 $\Rightarrow f(x)>g(x)$　　②$0<a<1$時 $\Rightarrow f(x)<g(x)$

11 老師講解

設 $2^{x^2-x}<8^{x+4}$，求 x 的範圍。

11 學生練習

設 $3^{-x}<9^{3-x^2}$，求滿足 x 的最大整數之值。

【代碼】a42a03m3

12 老師講解

解指數不等式 $(0.3)^{x^2-3x-2}>0.09$。

12 學生練習

解指數不等式 $(0.2)^{-2x}>(0.04)^{3x+1}$。

【代碼】】a42a03m4

【學生練習答案】

1. (1) $\frac{4}{9}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{25}{4}$	2 (1) 8 (2) $3^{\frac{14}{3}}$	3 (1) a (2) a (3) b^7	4 2
5. $\frac{3}{2}$	6. 2	7. (1)(C) (2)(A)	8. 4
9. 2	10. 2	11. 1	12. $x>-\frac{1}{4}$

回家功課

( ) 1. 試求 $(0.0625)^{-1.5}=?$ 代碼：a41094h1
(A) 4 (B) 16 (C) 64 (D) 128 。

( ) 2. 設 $\sqrt[3]{81\sqrt[4]{729\div\sqrt[3]{81}}}=3^x$，則 x 等於 代碼：a41203m1
(A) $\frac{31}{36}$ (B) $\frac{25}{36}$ (C) $\frac{25}{18}$ (D) $\frac{31}{18}$ 。

( ) 3. 若 x,y,z 為有理數，且 $2^x\cdot3^y\cdot5^z=6^{\frac{1}{3}}\cdot15^{\frac{1}{4}}\cdot20^{-\frac{1}{2}}$，則 $x\cdot y\cdot z=$ 代碼：a41088f1
(A) $-\frac{1}{24}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{7}{36}$ (D) $\frac{7}{72}$ 。

( ) 4. 已知 $f(x)=3^x$，若 $f(a)=2$ 且 $f(b)=4$，則 $f(a+b)=$？ 代碼：a41093h1
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 。

( ) 5. 設 3^α、3^β 為方程式 $x^2-x+\frac{1}{81}=0$ 的兩根，則 $\alpha+\beta=$？ 代碼：a41098k1
(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4 。

( ) 6. 已知 $a>0$ 且 $a^{2x}=3$，試求 $a^{3x}+a^{-3x}=$ 代碼：a41b03m1
(A) $3\sqrt{3}$ (B) $\frac{28\sqrt{3}}{9}$ (C) $\frac{26\sqrt{3}}{9}$ (D) $4\sqrt{3}$ 。

( ) 7. 設 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=5$，則 $x+\frac{1}{x}=?$ 代碼：a41092w1
(A) 21 (B) 23 (C) 25 (D) 27 。

( ) 8. 已知 $y=2^{\sin^2\theta}$，則 y 的最小值為 代碼：a41206m1
(A) $\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) 1 (D) 2 。

( ) 9. 方程式 $2^{x^2}\cdot4^x\cdot16=8^x\cdot64$ 的所有解總和為何？ 代碼：a42090h1
(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) -2 。

( ) 10. 若方程式 $2^{2x}-2^{x+1}-8=0$，則 $x=$？ 代碼：a42096w1
(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2 。

( ) 11. 解方程式 $16^x-4^x-2=0$，則 $x=$？ 代碼：a42099s1
(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 。

答案：CDDDA BDCAD C

主題二　對數的運算與對數函數

1.對數的定義及其運算：

(1) 定義：

若 $a>0$ 、 $a\neq 1$，且 $b>0$，當 $a^x=b$ 時，我們以 $\log_a b$ 來表示 x (即 $\log_a b=x$)，

其中 a 稱為『底數』，b 稱為『真數』，$\log_a b$ 稱為『以 a 為底時 b 的對數』。

(2) 觀念整理：

①指數與對數的轉換：$a^x=b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b=x$

② $\log_a b$ 有意義 $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{底數}: a>0, a\neq 1 \\ \text{真數}: b>0 \end{cases}$

③當底數 $a=10$ 時可以省略不寫，稱為常用對數。(例： $\log_{10} 2=\log 2$)

(3) 對數的運算性質：

若 a 、 b 、 c 皆為異於1的正實數，且 m 、 n 為正實數：

① $\begin{cases} \log_a a=1 \\ \log_a 1=0 \end{cases}$

② $\begin{cases} \log_a m+\log_a n=\log_a mn \\ \log_a m-\log_a n=\log_a \dfrac{m}{n} \\ \log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b \end{cases}$

老師講解 1

試求 $\log_8 (32)^2+\log_{10}\sqrt[3]{100}+\log_{\sqrt{6}} 36$ 之值。

學生練習 1

試求 $\log_2\sqrt{2}+\log_5\sqrt[3]{25}+\log_8\dfrac{1}{2}$ 之值。

【代碼】a43a02m3

老師講解 2

試求 $2\log_2 6+\log_2 12-3\log_2 3$ 之值。

學生練習 2

試求 $\log_2 6+\log_2 12-2\log_2 3$ 之值。

【代碼】a43a02m5

3 老師講解

試求 $\frac{1}{3}\log_3(\frac{2}{9})^9-\frac{1}{2}\log_3(\frac{10}{3})^4+\log_3(\frac{25}{6})$ 之值。

3 學生練習

試求 $\dfrac{1+\frac{1}{4}\log_{10}81-\frac{1}{2}\log_{10}25}{\frac{1}{4}\log_{10}16+\frac{1}{4}\log_{10}81}$ 之值。

【代碼】a43b02m2

③**換底公式：** $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $\Rightarrow$ 應用 $\begin{cases}\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c\\ \dfrac{1}{\log_a b}=\log_b a\\ a^{\log_a b}=b\end{cases}$

4 老師講解

試求 $\log_9 7\cdot\log_{49}8\cdot\log_4 27$ 之值。

4 學生練習

試求 $(\log_{\frac{1}{9}}8)\cdot(\log_{16}27)$ 之值。

【代碼】a43a03m2

5 老師講解

試求 $5^{3\log_5 2}+2^{\frac{\log 5}{\log 2}}+3^{\frac{1}{\log_2 3}}$ 之值。

5 學生練習

試求 $2^{2\log_2 5}-3^{\frac{\log 25}{\log 3}}+11^{\frac{1}{\log_2 11}}$ 之值。

【代碼】a43a03m4

6 老師講解

設 $\log 2 = p$，$\log 3 = q$，試求 10^{p+2q+1} 之值。

6 學生練習

設 $x = \log 3$， $y = \log 5$，試求 10^{2x+y} 之值。

【代碼】a43b03m2

7 老師講解

試求 $\log_3(\log_2 7) + \log_3(\log_7 8)$ 之值。

7 學生練習

試求 $\log_4(\log_7 25) + \log_4(\log_5 7)$ 之值。

【代碼】a43b04m2

8 老師講解

試求 $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$ 之值。

8 學生練習

試求 $(\log_7 4 + \log_7 8)(\log_4 7 + \log_8 7)$ 之值。

【代碼】a43b05m2

9 老師講解

試求 $(\log 2)^3 + (\log 5)^3 + 3\log 2 \log 5$ 之值。

9 學生練習

$(\log 2)^2 + (\log 5)^2 + 2\log 2 \log 5 = ?$

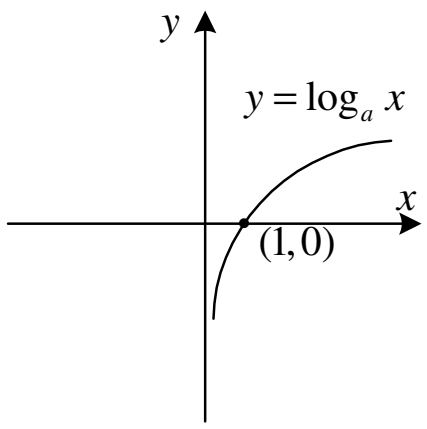
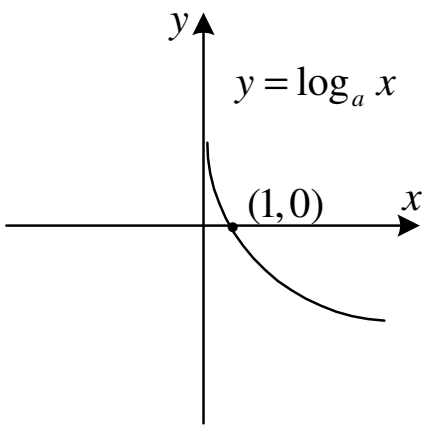
【代碼】a43b06m2

2.對數函數：

(1) **定義**：

設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，對任意正實數 x，函數 $y=f(x)=\log_a x$，稱為以 a 為底的對數函數。

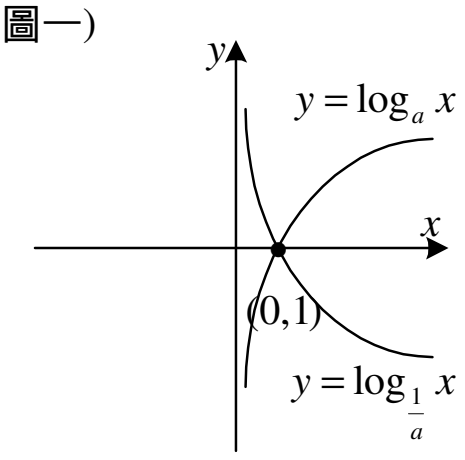
(2) **圖形**：

項目	(1) $a>1$	(2) $0<a<1$
圖型		
特徵	①恆過 $(1,0)$ ②圖形均在 y 軸之右方 ③ $a>1$， $y=\log_a x$ 遞增函數， $x_1>x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1>\log_a x_2$ ④以 y 軸為漸近線	①恆過 $(1,0)$ ②圖形均在 y 軸之右方 ③ $0<a<1$， $y=\log_a x$ 為遞減函數， $x_1>x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1<\log_a x_2$ ④以 y 軸為漸近線

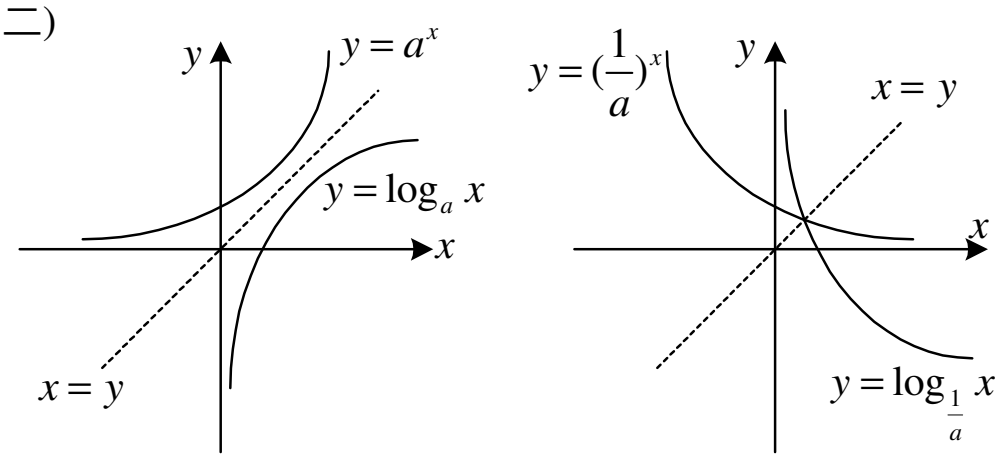
(3) $y=\log_a x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$ 之圖形對稱於 x 軸(如圖一)

(4) $y=\log_a x$ 與 $y=a^x$ 互為反函數，圖形對稱於 $x=y$ (如圖二)

(圖一)



(圖二)



10 老師講解

試比較下列各式之大小：

(1) $a=1.5$ 、 $b=2\log_3 2$ 、 $c=\log_9 8$

(2) $a=3$ 、 $b=\log_5 50$ 、 $c=\log_2 10$

10 學生練習

試比較 a,b,c 之大小：

$a=\dfrac{3}{2}$ 、 $b=\dfrac{4}{3}\log_{25} 27$ 、 $c=\log_5 10$

【代碼】a44a02m3

(3) **對數方程式**：$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$ ，$(a>0\ ,\ a\neq 1)$

11 老師講解

求下列各式中之 x 值： (1) $\log_{\frac{1}{27}} x=-\dfrac{1}{3}$

(2) $\log_x \sqrt[4]{8}=\dfrac{3}{4}$ (3) $\log_x 27=-\dfrac{3}{2}$

11 學生練習

求下列各式中之 x 值： (1) $\log_8 x=-\dfrac{1}{3}$

(2) $\log_x \sqrt[3]{25}=\dfrac{2}{3}$ (3) $\log_x 25=\dfrac{4}{3}$

【代碼】a44a03m2

12 老師講解

解方程式 $\log_2(x-1)+\log_2(x-3)=3$ 。

12 學生練習

解方程式 $\log_2(x+2)+\log_2(x-1)=2$ 。

【代碼】a44a03m4

13 老師講解

解方程式 $(\log_2 x)^2+\log_2 x^2-3=0$ 。

13 學生練習

解方程式 $(\log_3 x)^2-\log_3 x-2=0$ 。

【代碼】a44b02m2

14 老師講解

解方程式 $x^{\log_3 x}=9x$ 。

14 學生練習

設 $x^{\log_2 x}=\dfrac{x^5}{64}$ 有二根，試求二根之和。

【代碼】a44b03m2

(4) 對數不等式：

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$　$(f(x)>0$，$g(x)>0)$

① $a>1$　$\Rightarrow$　$f(x)>g(x)$

② $0<a<1$　$\Rightarrow$　$f(x)<g(x)$

15 老師講解

求 $\log_2(x^2-4x)<5$ 的所有整數解總和。

15 學生練習

解不等式 $\log x+\log(x-3)<1$。

【代碼】a44a04m2

16 老師講解

解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$。

16 學生練習

解不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)>\log_{\frac{1}{3}}(6-x)$。

【代碼】a44a04m3

【學生練習答案】

1. $\frac{5}{6}$	2. 3	3. 1	4. $-\frac{9}{8}$
5. 2	6. 45	7. $\frac{1}{2}$	8. $\frac{25}{6}$
9. 1	10. $a>c>b$	11.(1) $\frac{1}{2}$ (2) 5 (3) $\sqrt{125}$	12. 2
13. 9 或 $\frac{1}{3}$	14. 12	15. $3<x<5$	16. $\frac{3}{2}<x<3$

回家功課

( ) 1. 求 $\log_{\frac{1}{8}}\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{125}}\frac{1}{5}+\log_{\frac{1}{27}}\frac{1}{3}=$ 。 代碼：a43b01m1
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

( ) 2. 設 a,b,c 均為異於1的正數，且滿足 $abc=1$，則 代碼：a43098s1
$\log_a b+\log_a c+\log_b c+\log_b a+\log_c b+\log_c a$ 之值為何？
(A) 3 (B) 1 (C) -3 (D) -6 。

( ) 3. 設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，若 $a^x=3$，$a^y=7$，則 $\log_a 21$ 之值為： 代碼：a43089g1
(A) $x\cdot y$ (B) $x+y$ (C) $\frac{y}{x}$ (D) $x-y$ (E) x^y 。

( ) 4. $\frac{\log_8 3+\log_8 9}{\log_2 3+\log_4 9}=$ 代碼：a43090h1
(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$ 。

( ) 5. 試求 $(\log_3 4)(\log_2 3+\log_8 27)=?$ 代碼：a43094w1
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 。

( ) 6. 設 m,n 為大於1的實數，若 $\frac{\log_2 m}{\log_2 n}=3$，則 $\log_m n=$？ 代碼：a43095s1
(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) 3 。

( ) 7. 設 $\log_{10} x=\frac{1}{3}$，則 $\log_{10}(10x)=$？ 代碼：a43093h1
(A) $\frac{1}{30}$ (B) 1 (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{10}{3}$ 。

( ) 8. 已知 $a=2^{\log_2 4}$，$b=8^{\frac{1}{2}}$，$c=\log_2 10$，則此三數的大小關係為何？ 代碼：a44096h2
(A) $a>b>c$ (B) $a>c>b$ (C) $c>a>b$ (D) $c>b>a$ 。

( ) 9. $\log_x 8\sqrt{2}=\frac{7}{2}$，則 $x=$？ 代碼：a44090s1
(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) 7 (D) 8 。

( ) 10. 若 $2\log\sqrt{3x}=4\log 2+2\log\sqrt{2}$，則 $x=$？ 代碼：a44097w2
(A) 3 (B) 4 (C) $\frac{16}{3}$ (D) $\frac{32}{3}$ 。

(　　) 11. 設方程式$\log_2(x^2-5x+12)=1+\log_2 x$的根為$a$、$b$，則$a+b=$？ 代碼：a44096s1
(A)-5　(B)5　(C)-7　(D)7　。

(　　) 12. 解方程式$\log_4 x^2+2\log_{\frac{1}{2}} x=3$，則$x=$　(A)$\frac{1}{12}$　(B)$\frac{1}{8}$　(C)$\frac{1}{6}$　(D)$\frac{1}{4}$。 代碼：a44b01m1

(　　) 13. $x\in R$，求滿足不等式$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{4}}(2x+1)$之$x$的範圍 代碼：a44088y1
(A)$1<x<4$　(B)$0<x<4$　(C)$-\frac{1}{2}<x<3$　(D)$x>4$　。

(　　) 14. 若$\log_2 x+\log_2 y=1$且$x^2+y^2=117$，則$x+y=$？ 代碼：a44095w2
(A)11　(B)12　(C)121　(D)144　。

(　　) 15. 設α、β為方程式$\log_2 x=\log_x 2$的兩根，則$\alpha^3+\alpha\beta+\beta^3=$？ 代碼：a44091s1
(A)$\frac{55}{8}$　(B)$\frac{57}{8}$　(C)$\frac{71}{8}$　(D)$\frac{73}{8}$　。

答案：ACBAB　BCBBD　DBAAD

主題三　常用對數與其應用

1.對數值：

$\log 2=0.3010$	$\log 3=0.4771$	$\log 4=2\log 2$	$\log 5=1-\log 2$
$\log 6=\log 2+\log 3$	$\log 7=0.8451$	$\log 8=3\log 2$	$\log 9=2\log 3$

1 老師講解

已知 $\log 2=0.3010$、$\log 3=0.4771$，
求 $\log_2 60$ 最接近的整數爲何？

1 學生練習

已知 $\log 2=0.3010$、$\log 3=0.4771$，
求 $\log_3 240$ 最接近的整數爲何？

【代碼】a45a01m2

2 老師講解

設 $\log 2=a$、$\log 3=b$，試以 a、b 表示：
(1) $\log_5 24$　　(2) $\log_2 1080$

2 學生練習

設 $\log_c 2=a$，$\log_c 3=b$，
試以 a、b 表示 $\log_c 72$。

【代碼】a45a01m3

2. 位數：

若 $\log x = n + a$，n 為整數，a 為正的純小數，則 n 稱為 $\log x$ 的首數，a 稱為尾數

(1) $x > 1$ 時　　$\Rightarrow$ x 為 $n+1$ 位數

(2) $0 < x < 1$ 時　　$\Rightarrow$ x 在小數點後第 $|n|$ 位始不為 0

3 老師講解

若 $\log 1.2 = 0.0791$，試求下列各式之值：

(1) $\log 1200$　　(2) $\log 0.00012$

3 學生練習

若 $\log 5.566 = 0.7456$，試求下列各式之值：

(1) $\log 55660$　　(2) $\log 0.005566$

【代碼】a45a02m2

4 老師講解

若 $\log 2 = 0.3010$，求 2^{45} 展開後是幾位數？

4 學生練習

若 $\log 3 = 0.4771$，求 3^{100} 展開後是幾位數？

【代碼】a45a03m2

5 老師講解

已知 $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$ ，

$\frac{1}{6^{20}}$ 乘開後小數點下第幾位不爲零？

5 學生練習

已知 $\log 2 = 0.3010$ 、 $\log 3 = 0.4771$ ，

將 $(\frac{2}{3})^{40}$ 化成小數，則從小數點以下

第幾位起，開始出現異於 0 的數字？

【代碼】a45a03m3

6 老師講解

已知 $\log 2 = 0.3010$ ，且 $(0.4)^n < 0.01$ ，

求 n 的最小正整數解。

6 學生練習

已知 $\log_{10} 3 = 0.4771$ ，$(\frac{1}{3})^n < 10^{-4}$ ，

求最小整數 n 之值。

【代碼】a45b04m2

【加強題】

1. 設 $x, y, z > 1$，$a > 0$，已知 $\log_x a = 20$，$\log_y a = 30$，$\log_{xyz} a = 4$，則 $\log_z a =$_____。

2. 設 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 均爲實數，若 $3^{x_1} = 4$，$4^{x_2} = 5$，$5^{x_3} = 6$，$6^{x_4} = 7$，$7^{x_5} = 8$，$8^{x_6} = 9$，則此六數 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 乘積之值爲_____。

3. 若 $(\log x)^2 - 2\log x - \sqrt{12} = 0$ 之二根爲 α, β，求 $\alpha\beta =$_____。

4. 若 $\log_9 x + \log_3 y = 1$，則 $3x + 2y$ 最小值爲_____。

5. 若 $\log\log_{\frac{1}{3}}\log_2 x$ 有意義，則 x 的範圍爲_____。

【學生練習答案】

1. 5	2. $3a + 2b$	3. (1) 4.7456 (2) -2.2546	4. 48
5. 8	6. 9		

回家功課

( ) 1. 設 $a=\log_{10}2$，$b=\log_{10}3$，若以 a、b 表示 $\log_{10}15$，則 $\log_{10}15=$？ 代碼：a45092h1
(A) $a-b-1$ (B) $a+b-1$ (C) $-a+b+1$ (D) $a+b+1$ 。

( ) 2. 設 $\log_{10}2=a$，則 $\log_2 5=$？ 代碼：a45098w1
(A) $2a$ (B) $\frac{1}{a}$ (C) $\frac{a}{1-a}$ (D) $\frac{1-a}{a}$ 。

( ) 3. 令 $\log_{10}25=a$，則 $\log_{10}2$ 之值為 代碼：a45211m1
(A) $1+\frac{a}{2}$ (B) $1-\frac{a}{2}$ (C) $1+a$ (D) $1-a$ 。

( ) 4. $\log_{10}0.0436$ 之首數為何？ 代碼：a45092w1
(A) -3 (B) -2 (C) -1 (D) 0 。

( ) 5. 已知 $\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$，2^{45} 為幾位數？ 代碼：a45206m1
(A) 14 (B) 18 (C) 20 (D) 19 位數。

( ) 6. 已知 $\log 2=0.3010$，$(\frac{1}{2})^{40}$ 的值，從小數點後第 n 位開始出現不為 0 的數，則 n 的值為何？ 代碼：a45207m1
(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 。

( ) 7. 已知 $2^n>10^7$，求 n 的最小正整數解為 代碼：a45218m1
(A) 22 (B) 23 (C) 24 (D) 25 。

( ) 8. 設某種細菌，每 10 秒鐘自我分裂一次，得 2 倍的細菌數。若有 25 個細菌，欲使其繁殖的總數超過 200 萬個，問從分裂開始，至少要多少時間後才可達到此數目？(已知 $\log_{10}2=0.3010$) 代碼：a45088x1
(A) 140 (B) 150 (C) 160 (D) 170 秒。

答案：CDBBA ACD

歷屆試題

( ) 1. 已知 $\log 2 \approx 0.3010$，$\log 3 \approx 0.4771$，則 $\log(1\times2\times3\times4\times5\times6)$ 的值與下列何者最接近？ (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。 代碼：a45100s1 (100 年統測 B)

( ) 2. 若 $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{8\cdot\sqrt[5]{64}}=4^a$，則 $a=$？ (A) $\frac{19}{20}$ (B) $\frac{29}{30}$ (C) $\frac{19}{10}$ (D) $\frac{29}{15}$。 代碼：a41100k1 (100 年統測 C)

( ) 3. 求 $\log_{\sqrt{2}}\frac{3}{2}-\log_2\frac{27}{160\sqrt{2}}+\log_4\frac{36}{25}=$？ (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{9}{2}$ (D) $\frac{11}{2}$。 代碼：a43100k1 (100 年統測 C)

( ) 4. 求 $\log_{0.1}\sqrt{1000}-\log_9\sqrt{27}$ 之值？ (A) $\frac{9}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{9}{4}$。 代碼：a43101s1 (101 年統測 B)

( ) 5. 已知 $3^x=2$，則 27^{-x} 之值為何？ (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{16}$。 代碼：a41101s1 (101 年統測 B)

( ) 6. 下列何者與 $\log1+\log2+\log3+\log4+\log5-\log6$ 的值最為接近？ (已知 $\log2$ 的值約為 0.301，而 $\log3$ 的值約為 0.4771) (A) 0.1 (B) 1.5 (C) 5.3 (D) 6.2。 代碼：a45101k1 (101 年統測 C)

( ) 7. 已知 $a=\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$、$b=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot4^{\frac{1}{3}}$，則下列敘述何者為真？ (A) $a\cdot b<2$ (B) $a+b<2$ (C) $a<b$ (D) $b^3<a^2$。 代碼：a41102s1 (102 年統測 B)

( ) 8. 若 $\log_{10}2=x$、$\log_{10}3=y$，則 $\log_{12}15$ 等於下列哪一式？ (A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{x+y-1}{x+2y}$ (C) $\frac{x-y+1}{2x+y}$ (D) $\frac{y+1-x}{2x+y}$。 代碼：a45102s1 (102 年統測 B)

( ) 9. 若 $3^{x+2}=3^x+24\sqrt{3}$，則 $x=$？ (A) $\frac{-1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2。 代碼：a42102k1 (102 年統測 C)

( ) 10. 已知 $a>0$，$b>0$，$a\neq1$。若 $a^5=b^3$，則 $\log_a b=$？ (A) $\frac{-5}{3}$ (B) $\frac{-3}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{5}{3}$。 代碼：a43102k1 (102 年統測 C)

( ) 11. 設 $49^x+5\cdot 7^x-24=0$，則 $7^{x+1}=$？ (A)10 (B)14 (C)21 (D)28。 代碼：a42103s1 (103 年統測 B)

( ) 12. 求 $\dfrac{\log_5\sqrt{2}\cdot\log_7 9}{\log_5(\frac{1}{3})\cdot\log_7\sqrt[3]{4}}=$？ (A)$\dfrac{-5}{2}$ (B)$\dfrac{-3}{2}$ (C)$\dfrac{-2}{3}$ (D)$\dfrac{1}{3}$。 代碼：a43103s1 (103 年統測 B)

( ) 13. 化簡 $\dfrac{2+\log_{10}4-\frac{1}{3}\log_{10}216+\frac{1}{4}\log_{10}625+\frac{1}{5}\log_{10}243}{1+\log_2\frac{5}{3}+\log_2\frac{6}{5}+\log_2\frac{7}{6}+3\log_8\frac{8}{7}+2\log_4\frac{9}{8}-\log_4 9}$ 代碼：a43103k2 (103 年統測 C)

(A)1 (B)$\dfrac{3}{2}$ (C)2 (D)3。

( ) 14. 設 $(\frac{1}{2})^a=\frac{1}{70}$，$(\frac{1}{4})^b=\frac{1}{2500}$，$(\frac{1}{8})^c=\frac{1}{216000}$，則 a、b、c 三個數的大小關係為何？ 代碼：a43103k1 (103 年統測 C)

(A)$b<c<a$ (B)$c<b<a$ (C)$c<a<b$ (D)$a<b<c$。

( ) 15. 下列何者可為不等式 $\log_2 x^2<\log_2(4x-3)$ 的解？ 代碼：a44104s1 (104 年統測 B)

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4。

( ) 16. 已知 m、n 為整數，若 $m\log_{500}5+n\log_{500}\sqrt{2}=1$，則 $m+n=$？ 代碼：a44104k1 (104 年統測 C)

(A)7 (B)8 (C)9 (D)10。

( ) 17. 已知 a,b 為實數，且 $3^a=5$，$5^b=9$，則 $ab=$？ 代碼：a41104k1 (104 年統測 C)

(A)$\log_{15}45$ (B)$\log_3 5$ (C)2 (D)3。

( ) 18. $\log 2=a$，$\log 7=b$，則 $\log 35$ 等於下列何者？ 代碼：a45105s1 (105 年統測 B)

(A)$1+a+b$ (B)$1+a-b$ (C)$1-a-b$ (D)$1-a+b$。

( ) 19. 已知 $A=(\frac{729}{1000})^{\frac{2}{3}}-(\frac{27}{343})^{-\frac{1}{3}}+(5\frac{4}{9})^{\frac{1}{2}}$，則 A 之值為何？ 代碼：a41105s1 (105 年統測 B)

(A)$\dfrac{79}{100}$ (B)$\dfrac{80}{100}$ (C)$\dfrac{81}{100}$ (D)$\dfrac{82}{100}$。

( ) 20. 已知 $\log_{10}2=p$，$\log_{10}3=q$，求 $\log_{\sqrt{6}}36-\log_{\frac{1}{6}}6+\log_6\sqrt{12}$ 之值 代碼：a43105k1 (105 年統測 C)

(A)$5+\dfrac{2p+q}{2p+2q}$ (B)$3+\dfrac{2p+q}{2p+2q}$ (C)$3+\dfrac{2p+q}{2p-2q}$ (D)$5+\dfrac{2p+q}{2p-2q}$。

( ) 21. 設 $a=(0.1)^{\frac{1}{4}}$，$b=(0.2)^{\frac{1}{4}}$，$c=(0.2)^{\frac{1}{5}}$，則下列何者正確？
(A) $a<b<c$ (B) $c<a<b$ (C) $b<a<c$ (D) $b<c<a$。
代碼：a42105k1 (105 年統測 C)

( ) 22. 求 $(0.027)^{\frac{2}{3}}+(\frac{243}{32})^{\frac{1}{5}}$ 的值 (A) $\frac{3}{32}$ (B) $\frac{159}{100}$ (C) $\frac{12}{5}$ (D) $\frac{81}{32}$。
代碼：a41106s1 (106 年統測 B)

( ) 23. 求 $(\log 2)^2+\log 2\cdot\log 5+\log 5$ 的數值 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1。
代碼：a45106s1 (106 年統測 B)

( ) 24. 設 $a=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$，$b=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$，$c=(\frac{1}{6})^{\frac{1}{6}}$，則 a、b、c 大小順序為何？
(A) $a>c>b$ (B) $a>b>c$ (C) $c>a>b$ (D) $b>c>a$。
代碼：a42106k1 (106 年統測 C)

( ) 25. 已知 $\log_{10}3=0.4771$ 且 $x=(\frac{1}{3})^{20}$，其中 $\log_{10}x$ 的首數為 m，而尾數的小數點後第一位數字為 n，則 $m+n=$？
(A) -9 (B) -7 (C) -6 (D) -5。
代碼：a45106k1 (106 年統測 C)

( ) 26. 若 $2^4\times4^{3x}\times8^2=16^x\times32$，則 $x=?$
(A) -3 (B) -2.5 (C) 2.5 (D) 3。
代碼：a42107s1 (107 年統測 B)

( ) 27. 已知 $\log 2$ 之近似值為 0.3010。若 $2^x=10$，則 x 之值最接近下列何者?
(A) 3.16 (B) 3.23 (C) 3.32 (D) 3.52。
代碼：a45107s1 (107 年統測 B)

( ) 28. 若 $x=\frac{\log_{10}7}{\log_{10}9}$，則 $81^x=?$ (A) 3 (B) 7 (C) 25 (D) 49。
代碼：a43107k1 (107 年統測 C)

( ) 29. 設 $a=\log_{0.3}0.5$、$b=\log_3 5$、$c=\log_{30}50$，則 a、b、c 大小順序為何?
(A) $c>b>a$ (B) $b>a>c$ (C) $b>c>a$ (D) $a>b>c$。
代碼：a44107k1 (107 年統測 C)

( ) 30. 下列何值與 $\log_2 5$ 相等?
(A) $\log 5-\log 2$ (B) $\log(\frac{5}{2})$ (C) $\frac{\log 50}{\log 20}$ (D) $\frac{\log 25}{\log 4}$。
代碼：p43108s1 (108 年統測 B)

( ) 31. 設 $(3^m)^3=729$ 且 $4^{n-m}=\frac{1}{256}$，則 $m+n=?$
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。
代碼：a42108s1 (108 年統測 B)

( ) 32. 若 $3<\log_{0.5}(2x+1)<4$，則 x 的範圍爲何?
(A) $-\frac{3}{8}<x<-\frac{1}{4}$ (B) $-\frac{7}{16}<x<-\frac{3}{8}$
(C) $-\frac{15}{32}<x<-\frac{7}{16}$ (D) $-\frac{31}{64}<x<-\frac{15}{32}$。
代碼：a44108k1 (108 年統測 C)

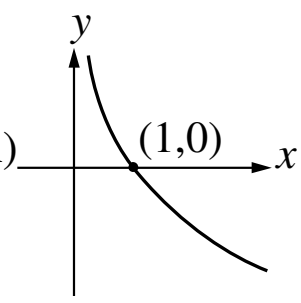
( ) 33. 已知 $\log_4(4^x-2^x+52)=x+1$，試問 $\log(x^2\cdot 5^x)=?$
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。
代碼：a44108k2 (108 年統測 C)

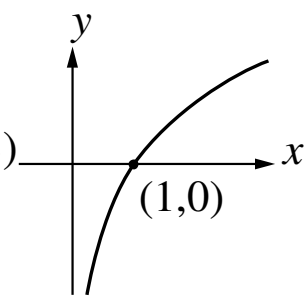
( ) 34. 2^{1000} 大約等於下列何者?
(A) 10^{100} (B) 10^{200} (C) 10^{300} (D) 10^{400} 。
代碼：a45109s1 (109 年統測 B)

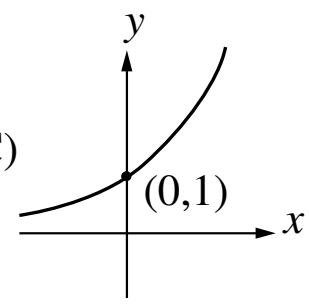
( ) 35. 若 $a+a^{-1}=2$，則 $a^3+a^{-3}=?$
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 。
代碼：a41109s1 (109 年統測 B)

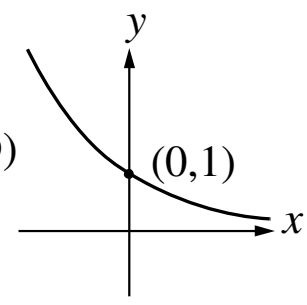
( ) 36. 滿足 $\log_{10-x^2}(x^2+3x+2)$ 有意義的整數 x 共有多少個?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7 。
代碼：a44109k1 (109 年統測 C)

( ) 37. 若 $f(x)=(\frac{\pi}{4})^x$，則下列何者爲 $f(x)$ 之圖形？
代碼：110tcb01 (110 年統測 B)

(A)


(B)


(C)


(D)


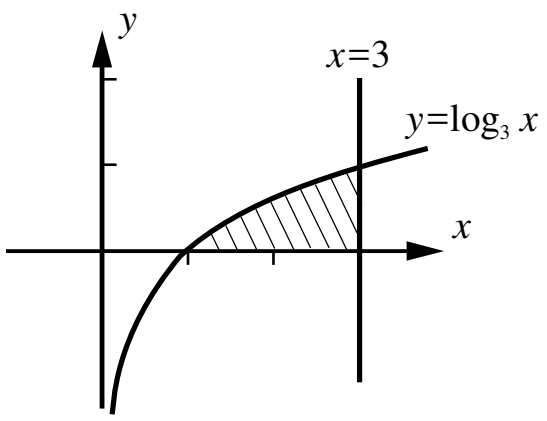
。

( ) 38. 若 $a=\log 2$，$b=\log 3$，則 $10^{2a+b}=$？
(A)2 (B)3 (C)12 (D)24 。
代碼：110tcb06 (110 年統測 B)

( ) 39. 設 $I(t)$ 爲 A 城市某種傳染病在時間 t 的感染率，
且 $I(t)=\dfrac{1}{1+49(7^{\frac{-t}{3}})}$，$t\geq 0$ 。若 a、b、c 分別表示 $t=0$、$t=3$、$t=6$ 時的感染率，則下列何者正確？
(A) $b=6a$ (B) $c=20a$ (C) $c=4b$ (D) $b=7a$ 。
代碼：110tcc07 (110 年統測 C)

工職數學金箍棒總複習

( ) 40. 假設 A 表函數 $y=\log_3 x$ 圖形與直線 $y=0$、$x=3$ 所圍區域面積，如圖(一)。若以幾何圖形的觀念來判斷 A 的大小範圍，則下列何者正確？
(A) $0\le A<\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}\le A<1$
(C) $1\le A<2$ (D) $A\ge 2$ 。



圖(一)

代碼：110tcc25
(110 年統測 C)

( ) 41. 設 $f(x)=\log_3 x$。若 $f(a)=6$、$f(b)=2$ 且 $f(c)=5$，則 $f(\frac{\sqrt[3]{a}\times b^2}{c})=$？
(A)6 (B)5 (C)2 (D)1 。

代碼：111tcb10
(111 年統測 B)

( ) 42. 某日課堂上，老師對學生勉勵：「若每天增加百分之一的功力，則一年後至少會增加三十六倍的可觀效應；反之，每天減少百分之一的功力，則一年後至少流失現今功力的九成七」，這段勉勵運用了指數函數成長及衰退的概念，其數學上的表達最貼切下列哪一個選項？
(A) $1.01^{365}\ge 37$ 且 $0.99^{365}\le 0.03$
(B) $365^{1.01}\le 37$ 且 $365^{0.99}\ge 0.03$
(C) $1.01^{365}\ge 63$ 且 $0.99^{365}\le 0.97$
(D) $365^{1.01}\le 63$ 且 $365^{0.99}\ge 0.97$ 。

代碼：111tcb18
(111 年統測 B)

( ) 43. 若 $x=\log_3 7$，則下列何者正確？
(A) $7^x=3$ (B) $3^x=7$ (C) $x^7=3$ (D) $x^3=7$ 。

代碼：111tcc01
(111 年統測 C)

( ) 44. 爲了響應節能減碳政策，某公司基於成本考量決定在六年後將公司該年二氧化碳排放量降爲目前排放量的 50 %。公司希望每年依固定的比率 r（當年和前一年排放量的比）逐年降低二氧化碳的排放量。若要達到這項目標，則下列敘述何者正確？
（參考數值：$\log 0.5\approx -0.301$、$\log 8.91\approx 0.950$）
(A) $0.91<r<0.93$ (B) $0.88<r<0.91$ (C) $0.85<r<0.88$
(D) $0.82<r<0.85$ 。

代碼：111tcc21
(111 年統測 C)

答案： BACDC BADCD CBDAB ACDCA ABDCC BCDCD BCACA ADCCC DABB

綜合練習

( ) 1. 已知 x, y 爲整數且滿足 $8^x(\sqrt{6})^y = 2^9 3^3$，則 $x-y=$？ 代碼：a41104p1
(A) -6 (B) -5 (C) -4 (D) -3。

( ) 2. 若 a 是 $x^2+2=2\sqrt{2}x$ 之解，則 $(a^{-5})^4\cdot(a^2)^{11}$ 之值爲何？ 代碼：a41090w1
(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) $4\sqrt{2}$。

( ) 3. 設 n 爲自然數，且 $x=3^n+3^n+3^n$，則下列何者等於 x^2？ 代碼：a41100w1
(A) 9^{3n} (B) 3^{2n+2} (C) 27^{2n} (D) 3^{3n+3}。

( ) 4. 設 $C(x)$ 與 $S(x)$ 均爲定義於實數的函數，若 $C(x)=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$ 及 代碼：a41094w2
$S(x)=\dfrac{3^x-3^{-x}}{2}$，則 $C(2x)=$? (A) $2S^2(x)+1$ (B) $2S^2(x)-1$ (C) $S^2(x)+1$
(D) $S^2(x)-1$。

( ) 5. 設 r 爲有理數，且 $5^r=4(\sqrt[3]{40}+\dfrac{\sqrt[3]{5}}{2})^2$，則 $r=$？ 代碼：a41099k1
(A) $\dfrac{8}{3}$ (B) $\dfrac{10}{3}$ (C) 8 (D) 10。

( ) 6. 設 $a=(\dfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$，$b=(\dfrac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$，$c=(\dfrac{1}{4})^{\frac{1}{4}}$，下列選項何者爲眞？ 代碼：f32090c1
(A) $a>b>c$ (B) $a<b<c$ (C) $a=c>b$ (D) $a=c<b$ 。

( ) 7. 設「$\cdot$」表示四則運算中的乘號，若 $2^{2x+1}+2^{3x}=5\cdot 2^{x+4}$，試求 $x=$? 代碼：a42094h1
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。

( ) 8. 指數函數 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$，若 $f(a)=\dfrac{1}{4}$，$f(b)=\dfrac{1}{3}$，求 $f(a+b)=$？ 代碼：f32255m1
(A) $\dfrac{7}{13}$ (B) $\dfrac{11}{5}$ (C) $\dfrac{9}{11}$ (D) $\dfrac{5}{7}$。

( ) 9. $\log_2(\log_{10}\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}})$ 可化爲下列何者？ (A) -2 (B) -3 (C) -4 (D) -5。 代碼：a43101w1

( ) 10. 求 $\log_2(\dfrac{\cos 30^\circ - \tan 45^\circ}{\tan 60^\circ - 2\cot 45^\circ}) = ?$ (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 。 代碼：a43102w1

( ) 11. 化簡 $\dfrac{1}{2}\log_3(\dfrac{2}{9})^6 - \dfrac{1}{4}\log_3(\dfrac{10}{3})^8 + \log_3(\dfrac{25}{6}) =$ (A) -5 (B) 0 (C) 1 (D) 5 。 代碼：a43093s1

( ) 12. 化簡 $\dfrac{1+\dfrac{1}{4}\log_{10}81 - \dfrac{1}{3}\log_{10}125}{\dfrac{1}{4}\log_{10}16 + \dfrac{1}{3}\log_{10}27} = ?$ (A) 1 (B) $\dfrac{3}{2}$ (C) $\dfrac{5}{3}$ (D) 2 。 代碼：a43092s1

( ) 13. 化簡 $(\log_4 3)(\log_3 25)(\log_5 16) = ?$ (A) 1 (B) 4 (C) 8 (D) 16 。 代碼：a43093w1

( ) 14. 下列哪個 $f(x)$ 具有「對於任意兩正實數 a 及 b ， $f(ab) = f(a) + f(b)$ 均成立」的性質？ (A) $f(x) = 3x + 4$ (B) $f(x) = 5^x$ (C) $f(x) = \cos(\pi x)$ (D) $f(x) = \log x$ 。 代碼：a43094s1

( ) 15. 設 $y = \log_{x-5}(8 + 7x - x^2)$，且 x 爲整數，若 y 有意義時，則 $x + y$ 之值爲 (A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 10 。 代碼：a46087s1

( ) 16. 若 $\log_8(\log_5 x) = \dfrac{1}{3}$，則 $x = ?$ (A) 5 (B) 8 (C) 25 (D) 125 。 代碼：a44093w1

( ) 17. 已知二次方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的二根爲 $\log a$ ， $\log b$ ， 求 $\log_a b + \log_b a$ 之值 (A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 10 。 代碼：f34284m1

( ) 18. 設 x 、 y 爲正實數，若 $2\log(x - 2y) = \log x + \log y$ ，則 $\dfrac{x}{y}$ 之值爲何？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：a44098k1

( ) 19. 設 p 與 q 爲方程式 $\log_9(10x^2 - 6x + 5) - \log_3 x - 1 = 0$ 的兩根，則 $\dfrac{1}{p+q} = ?$ (A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{5}{7}$ 。 代碼：a44099k1

( ) 20. 下列何者爲不等式 $\log_{\frac{2}{3}}(2x - 8) > 1 + \log_{\frac{2}{3}}(x + 6)$ 的解？ (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12 。 代碼：a44102w1

指數與對數 Chapter 9

( ) 21. 關於對數，下列何者不正確？ 代碼：a44215m1
(A) $\log_{10} 4 > 0$ (B) $\log_{0.5} 4 < 0$ (C) $\log_3 2 < 1$ (D) $\log_{0.3} 0.2 < 1$。

( ) 22. 在坐標平面上，直線 $x + y = 5$ 與 $y = 2^x$ 與 $y = \log_2 x$ 的圖形分別交於 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 兩點，求 $x_1 + x_2 =$ (A) 10 (B) $\frac{5}{2}$ (C) 1 (D) 5。 代碼：f34288m1

( ) 23. 設 $x = \frac{\log 30}{\log 2}$，則 x 落在哪兩個整數之間？ 代碼：a45201m1
(A) $3 < x < 4$ (B) $4 < x < 5$ (C) $5 < x < 6$ (D) $6 < x < 7$。

( ) 24. 設 $\log_{10} x = -2.51$，則 (A) x 不存在 (B) $-3 < x < -2$ (C) $0.1 < x < 0.3$ (D) $0.001 < x < 0.01$。 代碼：a45215m1

( ) 25. 已知 39^{100} 是 160 位數，則 39^{40} 是幾位數？ 代碼：a45216m1
(A) 61 (B) 62 (C) 63 (D) 64。

( ) 26. $\log x$ 的首數與 $\log 39527$ 相同，尾數與 $\log 317$ 相同，求 $x =$？ 代碼：a45217m1
(A) 395.27 (B) 31700 (C) 39500 (D) 3170。

( ) 27. 有一疾病，其感染人數每年加倍，若於 1980 年 10 月發現有 10 人感染該疾病，則在下列那一年 10 月，感染人數會首次超過四百萬人？ 代碼：a45091w1
(已知 $\log 2 = 0.3010$) (A) 1999 (B) 2001 (C) 2003 (D) 2005 年。

答案：CABAA CDABA AABDD CCDAB DDBDD BA

9-29

筆記欄

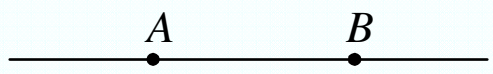
單元 10　空間向量

主題一　空間概念

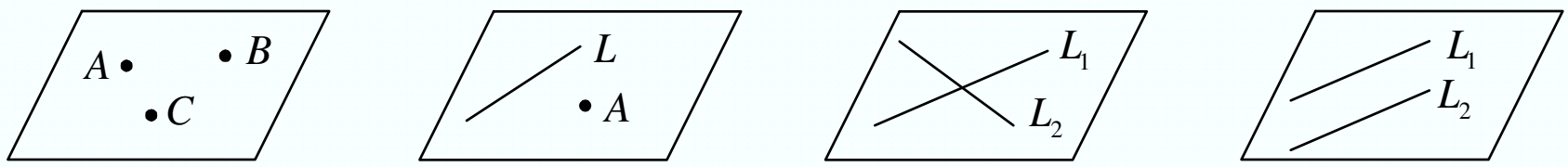
1. 空間中直線與平面的關係：

(1) 決定直線的條件：

相異兩點可決定一條直線

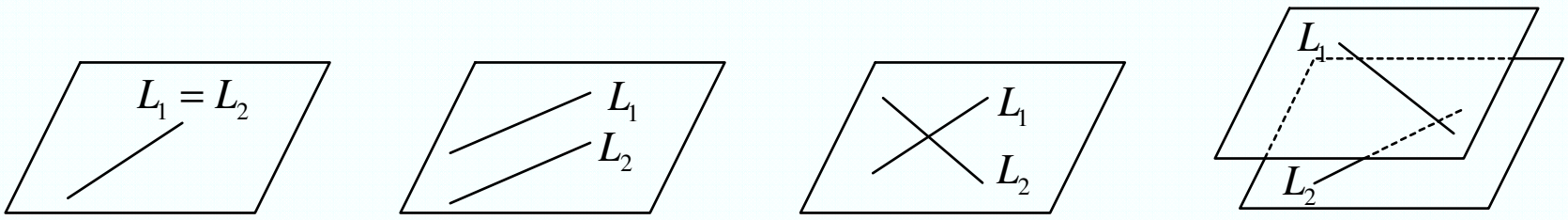


(2) 決定平面的條件：



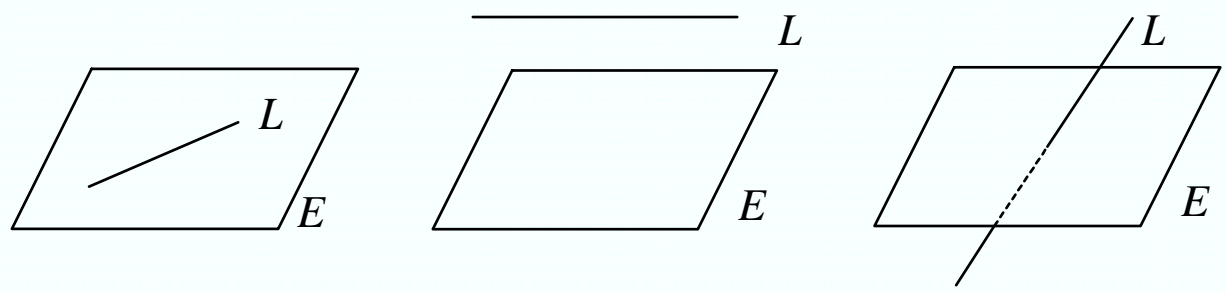
不共線的三點　　一直線及線外一點　　兩相交直線　　兩平行直線

(3) 直線與直線的關係



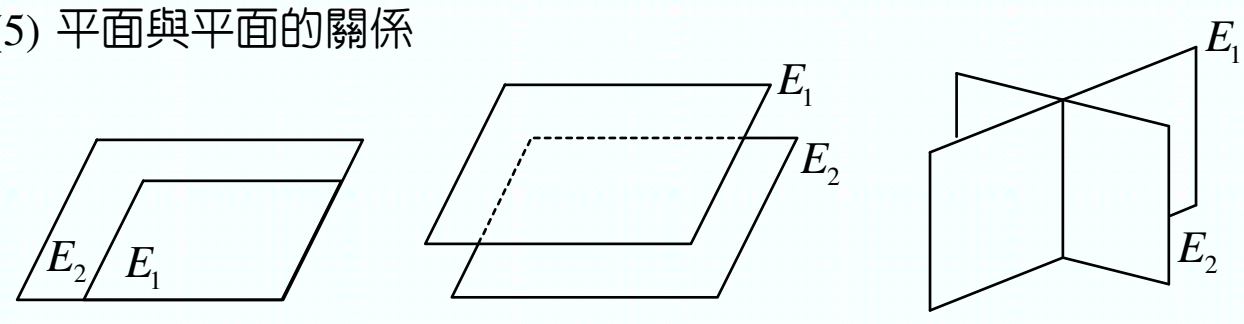
重合　　平行　　交一點　　歪斜

(4) 直線與平面的關係



直線落在平面上　　平行　　交一點

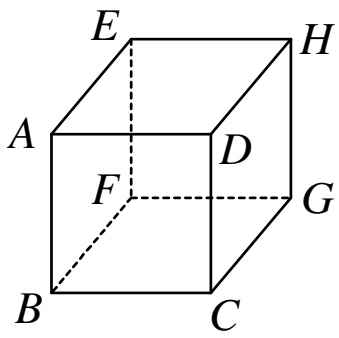
(5) 平面與平面的關係



重合　　平行　　交一直線

1 老師講解

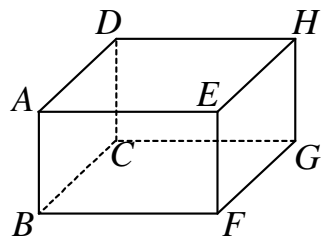
如右圖，在正立方體 $ABCD-EFGH$ 的 8 個頂點中，若每兩個頂點決定一直線，則與 $\overleftrightarrow{AD}$ 互爲歪斜線的有_____條。



1 學生練習

長方體中，互爲歪斜線的稜線共有___對。

【代碼】r31204m1



2 老師講解

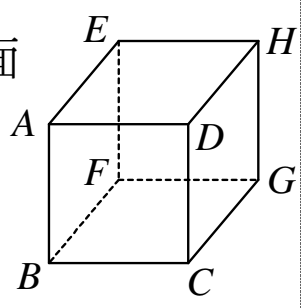
已知 $ABCD-EFGH$ 爲正立方體的 8 個頂點，如右圖，下列選項何者錯誤?

(A)線段 $\overline{AH}$ 垂直線段 $\overline{AB}$

(B)線段 $\overline{AG}$ 與線段 $\overline{AB}$ 共平面

(C)線段 $\overline{BD}$ 與線段 $\overline{HF}$ 歪斜

(D)向量 $\overrightarrow{AH}$ 與向量 $\overrightarrow{CD}$ 垂直



2 學生練習

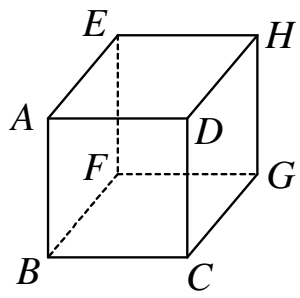
如右圖所示的正立方體中，下列敘述何者是不正確的？

(A) H，F 連線平行於平面 $ABCD$ 所在的平面

(B) 頂點 A，G 連線與另一組頂點 C，E 連線不相交

(C) A，G 連線與 C，H 連線互爲歪斜

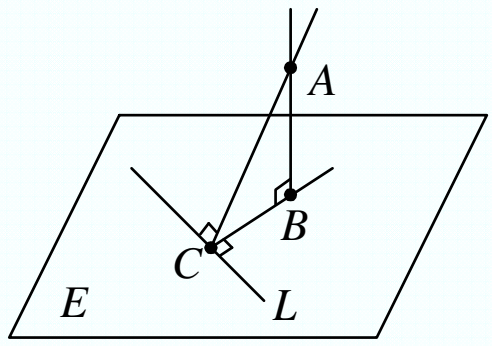
(D) A，E 連線垂直於平面 $ABCD$ 所在的平面。



【代碼】r31205mk

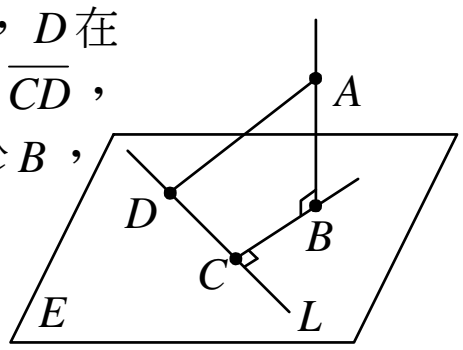
2. 三垂線定理：

設直線 AB 垂直平面 E 於 B 點，若在平面 E 上，直線 BC 垂直直線 L 於 C 點，則直線 AC 必垂直 L 於 C 點。



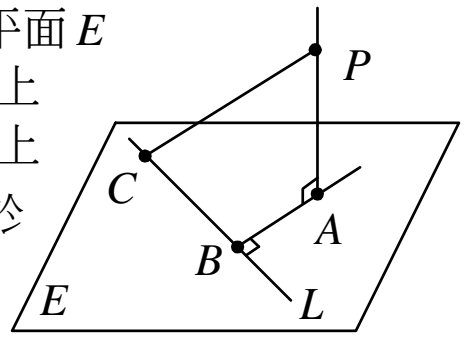
老師講解 3

如右圖，設 B，C，D 在平面 E 上，且 $\overline{BC}\perp\overline{CD}$，又 $\overline{AB}$ 垂直平面 E 於 B，已知 $\overline{BC}=\overline{CD}=4$，$\overline{AD}=\sqrt{41}$ 則 $\overline{AB}=$_____，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$_____。



學生練習 3

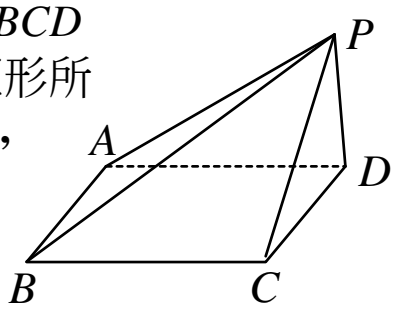
如右圖，設 $\overleftrightarrow{PA}$ 垂直平面 E 於 A 點，L 是平面 E 上一條直線，且 C 是 L 上一點，若 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直 L 於 B 點，$\overline{PA}=4$，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=12$，則 $\overline{PC}=$_____。



【代碼】r31206m1

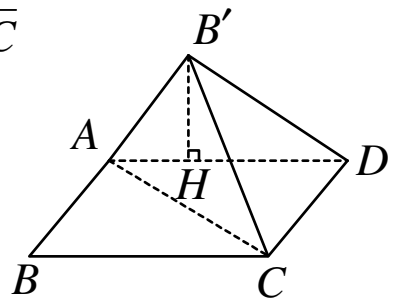
老師講解 4

如右圖所示，過矩形 $ABCD$ 的頂點 D，作垂直此矩形所在平面之垂直線段 $\overline{PD}$，若 $\overline{PA}=12\sqrt{3}$，$\overline{PD}=5$，$\angle PBA=60^\circ$，求 $\overline{PC}$ 的長度為_____。



學生練習 4

一矩形紙板 $ABCD$ 沿 $\overline{AC}$ 上折至 $AB'C$ 之位置，由 B' 作 ACD 平面之垂足 H 在 $\overline{AD}$ 上如圖，$\overline{AD}=2$，$\overline{AB}=1$，則 $\overline{B'D}$ 之長為_____。



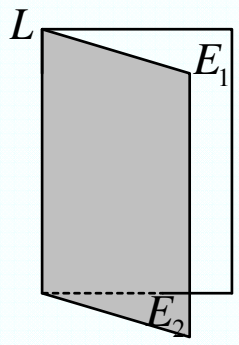
【代碼】r31207m1

3. 兩平面夾角(二面角)：

(1) 定義：

平面上一條直線 L 把該平面分成兩個部分，每個部分都稱為半平面，而 L 就是這兩個半平面的界線。空間中，由共有一條界線的兩個半平面及此界線所組成的圖形稱為二面角，如右圖。

這條界線稱為此二面角的稜，這兩個半平面 E_1 ， E_2 稱為二面角的面。

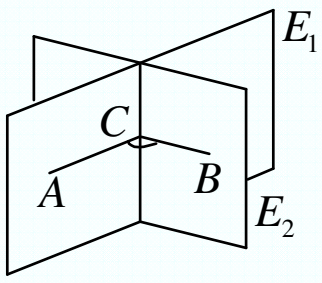


(2) 二面角大小：

若 L 為 E_1 ， E_2 之交線且 $\overline{AC} \perp L$ ， $\overline{BC} \perp L$ ，

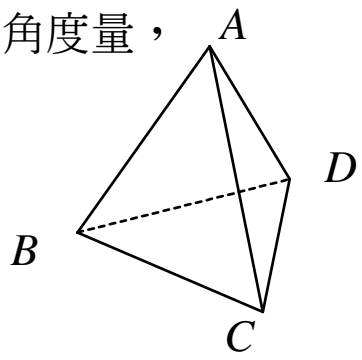
則 $\angle BCA$ 為 E_1 與 E_2 之夾角，

又稱為兩面角。



5 老師講解

正四面體邊長為 a ，若 θ 為平面 ABC 與平面 BCD 所夾成之兩面角度量，則 $\cos\theta =$ _____ 。



5 學生練習

一四面體 $O-ABC$ 中，

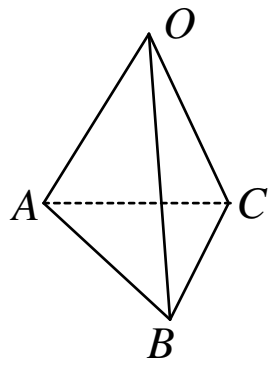
$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = 4$ ，

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 2$ ，

若 θ 為平面 OAB 與平面 ABC 所夾成之兩面角度量，則:

(1) $\cos\theta$ _____ 。

(2)四面體體積為_____ 。



【代碼】r31212m1

6 老師講解

將一張正方形的紙 $ABCD$，沿著對角線 $\overline{BD}$ 折起，使得 $\angle ABC=30^\circ$，則平面 ABD 與 BCD 的夾角的餘弦值爲_____。

6 學生練習

將正方形 $ABCD$ 沿對角線 $\overline{BD}$ 對折，使 $\angle ABC=60^\circ$，則所成二面角的角度爲_____。

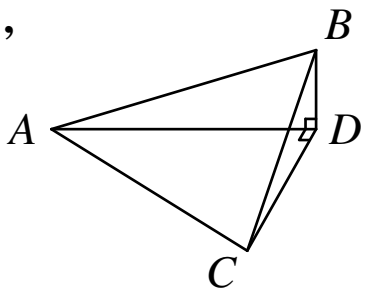
【代碼】r31210m1

【學生練習答案】

1. 24	2. (B)	3. 13	4. $\sqrt{3}$
5. (1) $\frac{\sqrt{5}}{15}$ (2) $\frac{2\sqrt{11}}{3}$	6. 90°		

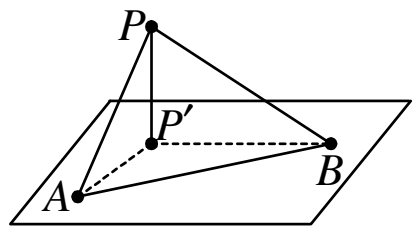
回家功課

( ) 1. 如右圖，四面體 $ABCD$ 的稜 $\overline{BD}$ 垂直於平面 ACD，$\overline{AD}\perp\overline{CD}$，$\overline{BD}=1$，$\overline{AD}=4$，$\overline{CD}=3$，試求頂點 B 至 $\overline{AC}$ 稜的(垂直)距離爲 (A)$\frac{12}{5}$ (B)$\frac{13}{5}$ (C)$\frac{3}{5}$ (D)$\frac{4}{5}$。



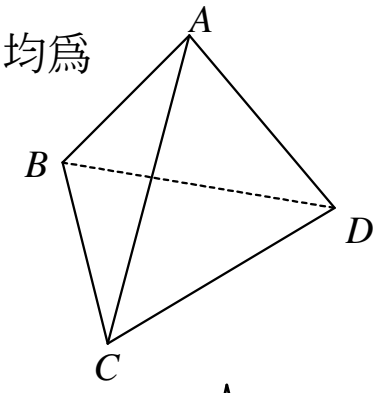
代碼：r31222m1

( ) 2. 如圖，A、B 兩點都在平面 E 上，P 在 E 的投影點爲 P'，已知 $\overline{PP'}=3$，$\overline{AB}=6$，$\Delta P'AB$ 面積爲12，則 ΔPAB 面積爲 (A)15 (B)16 (C)17 (D)18。



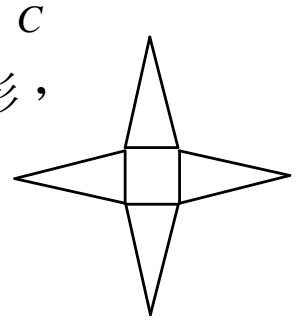
代碼：r31208m1

( ) 3. 如右圖，$ABCD$ 爲一四面體，已知 ΔACD 與 ΔBCD 均爲等腰三角形，$\overline{AC}=\overline{AD}=5$，$\overline{BC}=\overline{BD}=3$，$\overline{AB}=4$，$\overline{CD}=2$，求 ΔACD 與 ΔBCD 的二面角的餘弦值爲 (A)$\frac{\sqrt{6}}{3}$ (B)$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C)$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D)$\frac{1}{\sqrt{6}}$。



代碼：r31224m1

( ) 4. 如右圖的四角錐展開圖，四角錐底面爲邊長 2 的正方形，四個側面都是腰長爲 4 的等腰三角形，則此四角錐的高度爲 (A)3 (B)$\sqrt{10}$ (C)$2\sqrt{3}$ (D)$\sqrt{14}$。



代碼：r31090c1

( ) 5. 有一個底爲正方形的五面體，每一稜之長都是 a，設四邊形 $ABCD$ 爲其底，O 爲其錐頂，試求側面與底面之夾角的正弦值爲 (A)$\frac{\sqrt{6}}{3}$ (B)$\frac{2}{3}$ (C)$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D)$\frac{1}{\sqrt{6}}$。

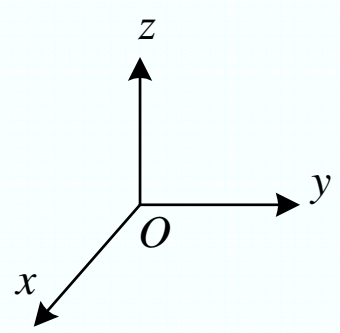
代碼：r31214m1

答案：BACDA

主題二　空間向量的坐標表示法

1. 空間坐標系：

(1) 在空間任取一點 O 為原點，過 O 點作兩兩垂直的三直線，如右圖，在三直線上各取一方向為正向，另一方向為負向，並取適當長為單位長，如此，這三條直線就變成以 O 為原點的數線，分別稱為 x 軸、y 軸、z 軸。而此三個坐標軸所形成的坐標系就稱為空間坐標系。



(2) **坐標軸與坐標平面**：

①原點 O 的坐標為 $(0,0,0)$

② x 軸：$y=z=0$，故在 x 軸上的點坐標形式為 $(a,0,0)$

y 軸：$x=z=0$，故在 y 軸上的點坐標形式為 $(0,b,0)$

z 軸：$x=y=0$，故在 z 軸上的點坐標形式為 $(0,0,c)$

③ xy 平面：$z=0$，故在 xy 平面上的點坐標形式為 $(a,b,0)$

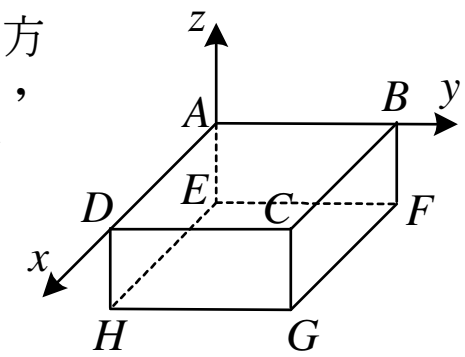
yz 平面：$x=0$，故在 yz 平面上的點坐標形式為 $(0,b,c)$

zx 平面：$y=0$，故在 zx 平面上的點坐標形式為 $(a,0,c)$

(3) 三個坐標平面將坐標空間分成 8 個部分，稱為卦限，其中規定三個坐標軸正向所圍的區域稱為第一卦限。

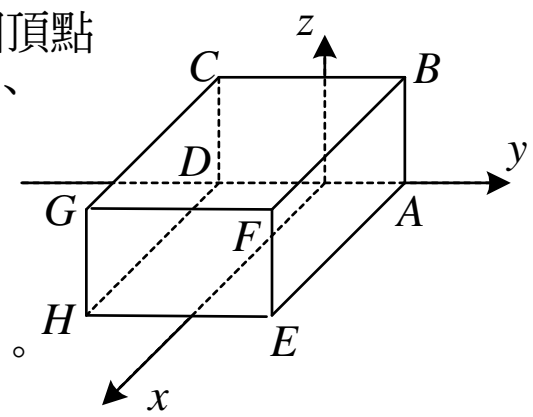
老師講解 1

空間坐標中有一長方體 $ABCD-EFGH$，各邊長均與坐標軸平行，如右圖，已知 $\overline{AB}=4$，$\overline{AD}=5$，$\overline{AE}=3$，試求此長方體各頂點坐標。



學生練習 1

如右圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 中，A、B、H 三個頂點分別爲 $A(0,2,0)$、$B(0,2,3)$、$H(6,-3,0)$，試求長方體其他五個頂點的坐標。



【代碼】r32201m1

(4) **中點公式：**

設 $P(x_1, y_1, z_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2)$，若 P、Q 兩點的連線段中點為 M，

則 M 點坐標為 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$

(5) **距離公式：**

設 $P(x_1, y_1, z_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2)$，則 $\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

【例】：$A(1,2,-2)$，$B(3,6,-4)$，求

① $\overline{AB}=\sqrt{4+16+4}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$　　② $\overline{AB}$ 之中點 $=(2,4,-3)$

2 老師講解

已知點 $P(1,3,2)$ 與 y 軸上一點 Q 的距離爲 3，求 Q 點坐標。

2 學生練習

已知點 $P(-1,1,2)$ 與點 $Q(k,2,2)$ 的距離爲 $\sqrt{5}$，求 Q 點坐標。

【代碼】r32201mk

3 老師講解

若 $P(-3,4,1)$，試完成下列表格

	投影點	對稱點	距離
x 軸			
y 軸			
z 軸			
原點			
xy 平面			
yz 平面			
zx 平面			

3 學生練習

關於空間中一點 $P(-1,2,-3)$ 之敘述，下列何者不正確？

(A) P 點在 xy 平面的投影點爲 $(-1,2,0)$

(B) P 點在 z 軸的投影點爲 $(0,0,-3)$

(C) P 點關於 x 軸的對稱點爲 $(1,2,-3)$

(D) P 點到 y 軸的距離爲 $\sqrt{10}$

【代碼】r32202mk

4 老師講解

P 在第一卦限內，其到 x ， y ， z 軸的距離分別爲 $\sqrt{41}$ ，5 ， $\sqrt{34}$ ，求出 P 點坐標爲

4 學生練習

空間中一線段 $\overline{AB}$ 在 xy 平面、yz 平面、zx 平面上之正射影長分別爲 $\sqrt{13}$ ， $\sqrt{34}$ 、 $\sqrt{29}$ ，求此線段 $\overline{AB}$ 之長度爲_____。

【代碼】r32204m1

2. 空間向量的運算：

(1) 空間向量的坐標表示法：

①若點 A 的坐標為 (a,b,c) ， O 為原點，則向量 $\overrightarrow{OA}=(a,b,c)$

②若點 $A(x_1,y_1,z_1)$ ， $B(x_2,y_2,z_2)$ ，則 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ 。

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(2) 空間向量的加減法與係數乘法：

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ， $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 為空間中兩向量，且 $r\in R$

① $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$ 。

② $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$ 。

③ $r\overrightarrow{a}=(ra_1,ra_2,ra_3)$ 。

④若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}\Leftrightarrow a_1=b_1$ ， $a_2=b_2$ ， $a_3=b_3$

⑤若 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ， $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 且分量均不為 0 ，且 $\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$ ，則 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

(3) 單位向量：

若 $|\overrightarrow{V}|=1$ ，則 $\overrightarrow{V}$ 稱之單位向量。

5 老師講解

已知空間中三點 $P(2,-1,2)$，$Q(1,3,4)$，$R(2,1,0)$，若 $\overrightarrow{a}=3\overrightarrow{PQ}-2\overrightarrow{PR}$，

則(1) $\overrightarrow{a}=$_____ (2)$|\overrightarrow{a}|=$_____。

5 學生練習

設 $A(3,1,-1)$，$B(2,0,1)$，$C(1,-1,2)$，$P(3,-2,1)$，令 $\overrightarrow{V}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$，

則 $\overrightarrow{V}=$_____，又若 $2\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{V}$，

則 Q 點之坐標爲_____。

【代碼】r32209m1

6 老師講解

已知兩向量 $\overrightarrow{a}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{b}=(2,-1,1)$，

若 $\overrightarrow{c}=2\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$，$t\in R$，則當 $t=$___時，

$|\overrightarrow{c}|$ 有最小值爲_____。。

6 學生練習

$\overrightarrow{a}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{b}=(3,4,5)$，令 $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$

(t 爲實數)， 則當 $t=$_____時，

$|\overrightarrow{x}|$ 有最小值爲____，此時 $\overrightarrow{x}=$_____。

【代碼】r32210m1

7 老師講解

設 $\overrightarrow{a}=(k-2,1,3)$，$\overrightarrow{b}=(6,3,2k+1)$，

若 $\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$，則 $k=$_____。。

7 學生練習

若兩向量 $\overrightarrow{a}=(x+1,3x,2y-1)$，

$\overrightarrow{b}=(2,4,y+5)$ 互相平行，

則 $x=$_____，$y=$_____。

【代碼】r32211m1

8 老師講解

設 $ABCD$ 爲空間中的一平行四邊形，

若 $A(4,1,0)$，$B(0,4,3)$，$C(3,2,1)$，

則 D 的坐標爲_____。

8 學生練習

設 $A(2,1,-3)$，$B(5,2,-1)$，$C(3,-2,4)$ 爲

平行四邊形 $ABCD$ 的三個頂點，

則 D 點坐標爲_____。

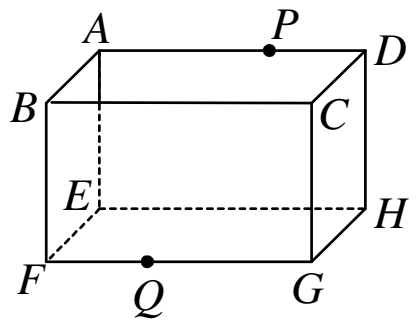
【代碼】r32213m1

【學生練習答案】

1. $C(0,-3,3)$、$D(0,-3,0)$、$E(6,2,0)$、$F(6,2,3)$、$G(6,-3,3)$		2. $Q(-3,2,2)$ 或 $Q(1,2,2)$
3. (C)	4. $\sqrt{38}$	5. $\overrightarrow{V}=(4,4,-5)$、$Q(9,4,-\frac{13}{2})$
6. $t=-\frac{6}{25}$、$\lvert\overrightarrow{x}\rvert$ 有最小值 $\frac{\sqrt{3}}{5}$、$\overrightarrow{x}=(\frac{7}{25},\frac{1}{25},-\frac{1}{5})$		
7. $x=2$，$y=17$		8. $D(0,-3,2)$

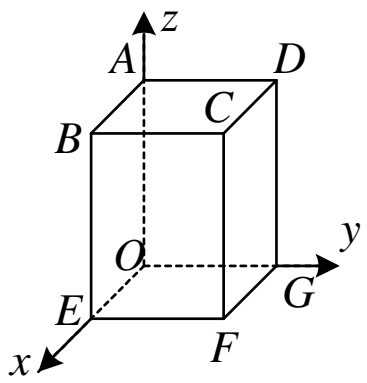
回家功課

( ) 1. 長方體 $ABCD-EFGH$，如右圖，
P 在 $\overline{AD}$ 上，Q 在 $\overline{FG}$ 上，
且 $\overline{AB}=1$，$\overline{AE}=2$，$\overline{AD}=3$，
$\overline{PD}=1$，$\overline{FQ}=1$，則 $\overline{PQ}=$_____。
(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $2\sqrt{2}$。



代碼：r32223m1

( ) 2. 已知 $ABCD-OEFG$ 爲一長方體，
E 點坐標爲 $(3,0,0)$，G 點坐標爲 $(0,4,0)$，
A 點坐標爲 $(0,0,5)$，若 M 爲 ΔBDF 之重心，
則 M 點坐標爲_____。
(A) $(2,\frac{8}{3},\frac{10}{3})$ (B) $(\frac{8}{3},3,4)$
(C) $(\frac{7}{3},\frac{8}{3},\frac{5}{3})$ (D) $(\frac{5}{3},\frac{7}{3},\frac{10}{3})$。



代碼：r32226m1

( ) 3. 設點 P 在第一卦限，且與三個坐標平面等距離，若 P 到 y 軸的距離爲 2，則 P 點到原點的距離爲_____。
(A) $\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $2\sqrt{2}$。

代碼：r32222m1

( ) 4. 令 $A(5,0,12)$、$B(-5,0,12)$ 爲坐標空間中之兩點，且令 P 爲 xy 平面上滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=13$ 的點。請問下列哪一個選項中的點可能爲 P？
(A) $(5,0,0)$ (B) $(5,5,0)$ (C) $(0,12,0)$ (D) $(0,0,0)$。

代碼：r32103c1

( ) 5. 令 $A(-1,6,0)$，$B(3,-1,-2)$，$C(4,4,5)$ 爲坐標空間中三點，若 D 爲空間中的一點且滿足 $3\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}$，則點 D 的坐標爲_____。
(A) $(-8,23,17)$ (B) $(11,-5,8)$ (C) $(-7,30,18)$ (D) $(5,23,15)$。

代碼：r32097c1

( ) 6. 若 $P(-2,-3,1)$、$Q(2,2,-2)$，若 $\overrightarrow{u}=(a,b,c)$ 與 $\overrightarrow{PQ}$ 同向，且 $|\overrightarrow{u}|=2\sqrt{2}$，求 $a+b+c=?$
(A) $\frac{12}{5}$ (B) $\frac{11}{3}$ (C) $\frac{11}{5}$ (D) $\frac{13}{3}$。

代碼：r32301m1

( ) 7. 假設坐標空間中三相異平面 E_1，E_2，E_3 皆相通 $(-1,2,0)$ 與 $(3,0,2)$ 兩點，試問以下哪些點也同時在此三平面上?
(A) $(2,2,2)$ (B) $(1,1,1)$ (C) $(4,-2,2)$ (D) $(-2,4,0)$

代碼：r32094c2

答案：BABDC AB

主題三　空間向量的內積與外積

1. 向量的內積：

(1) 定義：

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 為空間中兩向量，且其夾角為 θ，其中 $0°\le\theta\le180°$，

則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$。

(2) 內積性質：

① $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2$ ($\because \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{a}|\cdot\cos0°=|\overrightarrow{a}|^2$)

②若 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 且分量均不為 0，且 $\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}$，則 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

③若 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ 則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$

(3) 內積應用：

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 為空間中兩向量，且其夾角為 θ，其中 $0°\le\theta\le180°$，

則 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$。

老師講解 1

設 $A(3,-1,4)$，$B(3,0,3)$，$C(4,-2,4)$，則

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$_____。

(2) $\angle BAC=$_____。

學生練習 1

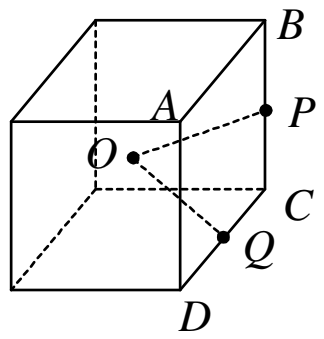
坐標空間中，$\overrightarrow{a}=(1,1,2)$，

$\overrightarrow{b}=(2,-4,-2)$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角=___。

【代碼】r33201m1

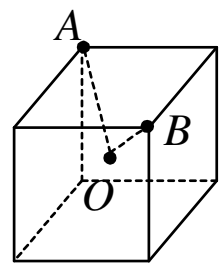
2 老師講解

如右圖，$ABCD$ 爲正立方體的一側面，P、Q 分別爲 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 的中點，O 爲正立方體的中心，則 $\cos\angle POQ=$_____。



2 學生練習

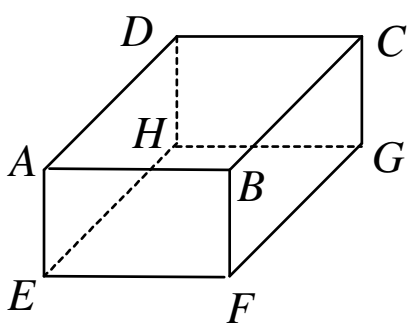
如右圖所示，設一正立方體中心爲 O，而 A，B 爲此正立方體同一面上的兩個對頂點，則 $\cos\angle AOB=$_____。



【代碼】r33094b1

3 老師講解

右圖爲長方體 $ABCD-EFGH$，其中 $\overline{AB}=2$，$\overline{AD}=3$，$\overline{AE}=1$，則下列何者的內積值最大?



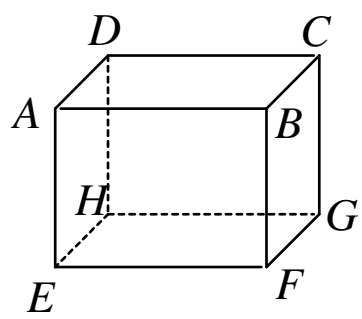
(A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}$　(B) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HE}$

(C) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EG}$　(D) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}$　(E) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{HB}$

3 學生練習

如右圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{AD}=2$，$\overline{AE}=3$，

則 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{GD}=$_____。



【代碼】r33203m1

4 老師講解

設 $A(-7,3,1)$，$B(-2,1,3)$，若 C 點在 x 軸上，且 $\angle ACB$ 爲直角，則 C 點坐標爲_____。

4 學生練習

設三向量 $\overrightarrow{a}=(1,2,r)$，$\overrightarrow{b}=(-1,s,1)$，$\overrightarrow{c}=(t,1,2)$ 兩兩互相垂直，則序組 $(r,s,t)=$_____。

【代碼】r33204m1

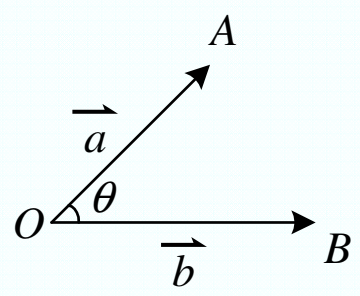
2. 正射影：

設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 是兩個非零向量，則：

(1) $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影長為 $\left|\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}\right|$

(2) $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影為 $\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\cdot\overrightarrow{b}$

(3) $\overrightarrow{a}$ 在 $t\overrightarrow{b}$ $(t\neq 0)$ 上之正射影為 $\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\cdot\overrightarrow{b}$



5 老師講解

空間中有三點 $A(3,2,1)$，$B(5,1,2)$，$C(2,3,-1)$，自點 B 作直線 AC 的垂直線，求垂足的坐標爲_____。

5 學生練習

設空間中有三點 $A(1,1,3)$，$B(0,2,4)$ 與 $C(3,2,3)$，

(1) $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上的正射影爲_____。

(2) 點 C 在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的投影 P 點的坐標爲_____。

【代碼】r33207m1

3. 空間向量的外積：

(1) 外積定義：

若 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，則 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

【討論】：

① $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 是一向量，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 是一純量

②若 $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$，則 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{N}$ 且 $\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{N}$，即 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之一種公垂向量

(2) **外積運算性質**：

$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 皆不為0

① $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=-(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a})$ (比較 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$)

② $\overrightarrow{a}$ 不平行 $\overrightarrow{b}$，則 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{a}$，$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$ [即 $(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{a}=0$，$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=0$]

6 老師講解

已知 $\overrightarrow{n}$ 和 $\overrightarrow{a}=(1,3,0)$，$\overrightarrow{b}=(-1,0,2)$ 均垂直，且 $|\overrightarrow{n}|=14$，求 $\overrightarrow{n}$。

6 學生練習

設 $\overrightarrow{V_1}=(3,4,-1)$，$\overrightarrow{V_2}=(-2,-2,1)$，若 $|\overrightarrow{u}|=6$，且 $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{V_1}$，$\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{V_2}$，則 $\overrightarrow{u}=$____。

【代碼】r34208m1

7 老師講解

若 $\overrightarrow{a}=(1,1,2)$，$\overrightarrow{b}=(2,3,1)$，$\overrightarrow{c}=(-2,1,-1)$，試求下列各式之值：

(1) $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}=$_____

(2) $\overrightarrow{c}\times\overrightarrow{b}=$_____

(3) $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})=$ _____

(4) $(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{b}=$ _____。

7 學生練習

若 $\overrightarrow{a}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{b}=(2,2,1)$，$\overrightarrow{c}=(3,1,2)$，試求下列各式之值：

(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{a}$　(2) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$

(3) $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$　(4) $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$

(5) $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c}$　(6) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$。

【代碼】r34206m1

4. 外積運算與三角形面積：

三角形面積

若 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 為兩邊所形成三角形面積 $=\frac{1}{2}|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|$

8 老師講解

若 $A(3,0,2)$，$B(5,2,3)$，$C(3,4,5)$，求 ΔABC 面積=_____。

8 學生練習

設 $A(3,3,2)$，$B(0,4,1)$，$C(2,4,-1)$ 爲空間中相異三點，試求:

(1) ΔABC 面積爲_____。

(2) A 點到直線 BC 之最短距離爲_____。

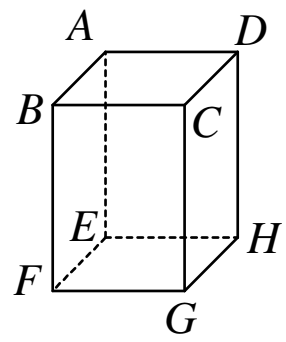
【代碼】r34209m1

【學生練習答案】

1. $120°$	2. $\frac{-1}{3}$	3. -7	4. $(-3,2,4)$
5. (1) $(\frac{1}{3},\frac{-1}{3},\frac{-1}{3})$ (2) $P(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{8}{3})$		6. $\pm(4,-2,4)$	
7. (1) 0 (2) $(-1,3,-4)$ (3) $(1,-3,4)$ (4) 0 (5) $(4,4,-8)$ (6) $(4,4,-8)$		8. (1) $3\sqrt{2}$ (2) 3	

回家功課

( ) 1. 設 $ABCD-EFGH$ 爲空間中長、寬、高分別爲 2 、3 、5 的長方體。已知 $\overline{AB}=2$ 、$\overline{AD}=\overline{BC}=3$ ，且 $\overline{DH}=5$ ，則內積 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$ 之值爲_____。
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 。

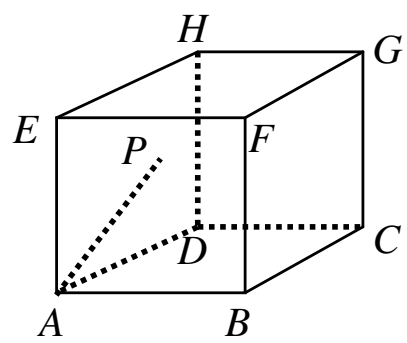


代碼：r33103a1

( ) 2. $\overrightarrow{u}=(2,-1,3)$ 、 $\overrightarrow{v}=(-2,1,1)$ ，已知 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{u}+k\overrightarrow{v}$ 垂直，則 $k=$_____。
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 。

代碼：r33302m1

( ) 3. 如圖所示， $ABCD-EFGH$ 爲邊長等於1之正立方體。若 P 點在立方體之內部且滿足 $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ ，則 P 點至直線 AB 之距離爲____。
(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$ 。



代碼：r32094c1

( ) 4. 在空間中，設 $\overrightarrow{a}=(2,1,2)$ ，$|\overrightarrow{b}|=12$ ， $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角爲 $120°$ ，則 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 的正射影爲____。
(A) $(-4,-2,-4)$ (B) $(4,2,4)$ (C) $(-2,-1,-2)$ (D) $(2,1,2)$ 。

代碼：r33216m1

( ) 5. 已知 $A(1,0,-1)$ 、 $B(7,0,5)$ 、 $C(3,2,k)$ 爲空間中三點，若 $k\neq 0$ ，且 ΔABC 的面積爲 9 ，求 k 值=_____。
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 。

代碼：r34211m1

( ) 6. 空間中有 A 、 B 、 C 、 D 四點。已知 $\overline{AB}=1$ ， $\overline{BC}=2$ ， $\overline{CD}=3$ ， $\angle ABC=\angle BCD=120°$ ，而 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 之夾角爲 $60°$ ，則 $\overline{AD}$ 之長
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 。

代碼：r33086a1

答案：CABAD A

主題四　三階行列式與六面體體積

1. 二階與三階行列式的定義：

(1) 二階行列式的定義：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(2) 三階行列式的定義：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

老師講解

已知 $\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$，求 x 之值。

學生練習

設 $\begin{vmatrix} x & 7 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$，求 $\begin{vmatrix} x+9 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & x+11 \end{vmatrix}$ 之值。

【代碼】a22a01m2

2. 行列式性質：

(1) 列與行依次交換，行列式值不變。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) 任兩列(或兩行)互換，其值異號。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$ (第二、三行對調)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ (第一、二列對調)

(3) 某一列(或一行)諸元皆為 0，其值為 0。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{、} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(4) 某二列(或二行)對應元相同(成比例)，其值為 0。

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(第一、二行成比例)}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(第一、三列成比例)}$$

(5) 某一列(或一行)諸元有公因數，可將公因數提出。

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(第一列提出 } k\text{)}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & kc_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(第三行提出 } k\text{)}$$

(6) 某一列(或一行)諸元皆為二項式，可分成二個同階行列式的和。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1+d_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+d_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(7) 某一列(或一行)諸元乘 k 倍加至另一列(或一行)的對應元，其值不變。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+ka_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+ka_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+ka_3 \end{vmatrix} \quad \text{(第一行乘上 } k \text{ 倍後加到第三行)}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 & c_2+kc_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(第一列乘上 } k \text{ 倍後加到第二列)}$$

2 老師講解

求行列式 $\begin{vmatrix} -6 & 8 & 2 \\ 15 & -20 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ 之值。

2 學生練習

求行列式 $\begin{vmatrix} 15 & 10 & 15 \\ 15 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ 之值。

【代碼】a22a03m2

3 老師講解

若 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}=3$，$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ l & m & n \end{vmatrix}=2$，

則 $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ g+2l & h+2m & k+2n \end{vmatrix}=$_____。

3 學生練習

若 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ l & m & n \end{vmatrix}=3$，$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ l & m & n \end{vmatrix}=-2$，

求 $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d+3p & e+3q & f+3r \\ l & m & n \end{vmatrix}$之值。

【代碼】a22a03m3

4 老師講解

若 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4$，求 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a+1 \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$之值。

4 學生練習

若 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 2 & b \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4$，求 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 2 & b+2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$之值。

【代碼】a22b01m2

5 老師講解

若 $\begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 1 & b & y \\ 1 & c & z \end{vmatrix}=3$，求 $\begin{vmatrix} 2+x & x & a \\ 2+y & y & b \\ 2+z & z & c \end{vmatrix}$ 之值。

5 學生練習

若 $\begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 1 & b & y \\ 1 & c & z \end{vmatrix}=6$，求 $\begin{vmatrix} 2 & a+x & a \\ 2 & b+y & b \\ 2 & c+z & c \end{vmatrix}$ 之值。

【代碼】a22b02m2

3. 三階行列式的降階法：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$ (利用第一行降階)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}-c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$ (利用第二列降階)

6 老師講解

求三階行列式 $\begin{vmatrix} 2015 & 2001 & 1974 \\ 7 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 之值。

6 學生練習

求三階行列式 $\begin{vmatrix} 99 & 9 & 7 \\ 199 & 4 & 3 \\ 299 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 之值。

【代碼】a22a04m2

7 老師講解

若行列式 $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & 3+x \end{vmatrix}=0$，

求 x 所有解之總和。

7 學生練習

若行列式 $\begin{vmatrix} 9+x & 2 & 3 \\ 9 & 2+x & 3 \\ 9 & 2 & 3+x \end{vmatrix}=0$，

求 x 所有解之總和。

【代碼】a22b03m2

4. 平行六面體體積：

在空間中若 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\overrightarrow{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 為三個非零向量

(1) 則 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 所張開之平行六面體體積 $=|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

(2) 則 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 所張開之四面體體積 $=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$

8 老師講解

設空間中相異四點 $A(-1,3,-2)$、$B(0,4,0)$、$C(1,3,-1)$、$D(-2,6,-3)$

(1) 以 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 爲相鄰三條稜線的平行六面體的體積爲_____。

(2) 四面體 $ABCD$ 的體積爲_____。

8 學生練習

設空間中相異四點 $A(0,4,2)$、$B(2,5,2)$、$C(-1,1,5)$、$D(3,2,3)$

(1) $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 爲相鄰三條稜線的平行六面體的體積爲_____。

(2) 四面體 $ABCD$ 的體積爲_____。

【代碼】r34215mk

9 老師講解

若空間中四點 $A(1,2,3)$，$B(0,0,4)$，$C(4,1,2)$，$D(a,3,2)$ 共平面，則 $a=$_____。

9 學生練習

設 $A(4,1,a+1)$，$B(7,0,-3)$，$C(10,a,-2)$，$D(7,1,0)$ 四點共平面，則 $a=$_____。

【代碼】r34217m1

【學生練習答案】

1. 27	2. 330	3. -6	4. 16
5. -12	6. -399	7. -14	8. (1)16 (2)$\frac{8}{3}$
9. 1			

回家功課

( ) 1. 設 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & 2 \\ 3 & x & 1 \end{vmatrix} = 36$ 的解爲 a 與 b，則 $a+b=$？ 代碼：a22093k1 (93 年統測 C)

(A) $\frac{4}{3}$ (B) 4 (C) $\frac{20}{3}$ (D) $\frac{28}{3}$。

( ) 2. 設 a,b,c,d,e,f 爲實數，若 $\begin{vmatrix} a & 1 & d \\ b & 1 & e \\ c & 1 & f \end{vmatrix} = 2$，則 $\begin{vmatrix} 2a & -3 & 4d \\ 2b & -3 & 4e \\ -10c & 15 & -20f \end{vmatrix} =$？ 代碼：a22096k1 (96 年統測 C)

(A) 120 (B) -120 (C) 240 (D) -240。

( ) 3. 設 k 爲自然數，若行列式 $\begin{vmatrix} 1-k & 2 & 3 \\ 1 & 2-k & 3 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0$，則 $k=$? 代碼：a22094k1 (94 年統測 C)

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6。

( ) 4. 設 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 7$，則 $\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} =$____。 代碼：a22211m1

(A) 0 (B) 1 (C) 7 (D) -7。

( ) 5. 設 $ax+by+c=0$，求 $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & -x & -y \\ x^2+2y^2 & -x & -2y \\ c & a & b \end{vmatrix} =$____。 代碼：a22210m1

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -1。

( ) 6. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2+\sqrt{5} & 3+\sqrt{5} & 4+\sqrt{5} \\ 9+4\sqrt{5} & 14+6\sqrt{5} & 21+8\sqrt{5} \end{vmatrix}$ 的值爲 代碼：a22216m1

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。

( ) 7. 於空間中有四點 $O(0,0,0)$，$A(0,1,1)$，$B(1,2,-1)$，$C(3,1,2)$，試求點 A 到平面 OBC 的距離爲_____。 代碼：r34219m1

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{2}$。

答案：ACDCA AB

主題五　空間中的平面

1. 平面方程式：

(1) 平面的法向量：

①坐標空間中，如果直線 L 垂直平面 E，且 $\overrightarrow{n}//L$，則稱 $\overrightarrow{n}$ 是平面 E 的一個法向量，

也稱 $\overrightarrow{n}$ 與平面 E 垂直，記作 $\overrightarrow{n}\perp E$。

②平面的法向量並不是唯一的，但他們彼此互相平行。

(2) 平面方程式：

①點向式：

設平面 E 過點 $P(x_0,y_0,z_0)$，法向量 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$，

則平面 E 之方程式為 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$。

②一般式：

以 (a,b,c) 為法向量之平面可表為 $ax+by+cz+d=0$，其中 $a^2+b^2+c^2\neq 0$。

例；設平面 E 過 $A(1,2,3)$，法向量 $\overrightarrow{n}=(4,-1,1)$，則平面 E 之方程式

【解】：　設 $P(x,y,z)$ 在平面上，則 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{n}$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AP}=(x-1,y-2,z-3)\\ \overrightarrow{n}=(4,-1,1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n}=0\Rightarrow 4(x-1)-(y-2)+(z-3)=0$$

$$\Rightarrow 4x-y+z=5$$

【另解】：設平面 $E:4x-y+z=d$

$A(1,2,3)$ 代入 E，得 $d=5$，故 $E:4x-y+z=5$

【討論】：

①平面中，直線 $L:ax+by=c$ 法向量 (a,b)

②空間中，平面 $E:ax+by+cz=d$ 法向量 (a,b,c)

③若平面與 xy 平面平行(垂直 z 軸)，法向量 $\vec{n}=(0,0,1)$，則平面為 $z=d$，$d\in R$。

【例】(1) xy 平面之方程式為 $z=0$。

(2) 平行 xy 平面，且過 $(0,0,5)$ 之平面方程式 $z=5$。

1 老師講解

已知點 $A(3,1,2)$ 在平面 E 上的投影點為 $B(-1,4,4)$，求則平面 E 的方程式。

1 學生練習

空間中有三點 $A(0,2,-3)$ 、 $B(1,1,1)$ 、 $C(1,-1,3)$，若平面 E 過點 C，且與直線 AB 垂直，求平面 E 的方程式。

【代碼】r41201m1

2 老師講解

若 $A(-1,3,0)$ ， $B(5,1,2)$，求:
$\overline{AB}$ 之垂直平分面方程式爲_____。

2 學生練習

在空間中，連接點 $P(2,1,3)$ 與點 $Q(4,5,5)$ 的線段 PQ 之垂直平分面_____。

【代碼】r41088c1

3 老師講解

若 $A(4,6,5)$ ， $B(6,4,3)$ ， $C(4,3,1)$，則 A,B,C 三點所決定之平面方程式爲___。

3 學生練習

設 $A(0,2,3)$， $B(3,1,-2)$， $C(6,2,-1)$，則：

(1) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=$_____。

(2) $\triangle ABC$ _____。

(3) 平面 ABC 的方程式爲_____。.

【代碼】r41203m1

4 老師講解

求過 $A(2,1,-1)$ ， $B(1,1,2)$ 且垂直 $E:7x+4y-4z=0$ 之平面 F 的方程式。

4 學生練習

與二平面 $x+2y-z+1=0$，$x-y+z-1=0$ 均垂直，且通過點 $(1,-2,1)$ 的平面之方程式為_____。

【代碼】r41204m1

2. 二平面的夾角：

已知平面 $E_1:a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ 與 $E_2:a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$，

若 θ 為 $\overrightarrow{n_1}$ 與 $\overrightarrow{n_2}$ 的夾角，亦為 E_1 與 E_2 的夾角，

則 $\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|=\left|\dfrac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\times\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$，

故兩平面的夾角為 θ 及 $180°-\theta$。

5 老師講解

求二平面 $x+2y-z=10$ 與 $x-y+2z=8$ 的夾角。

5 學生練習

已知二平面 $2x+2y+z=5$ 與 $x+2y+2z=8$ 的夾角爲 θ，求 $\sin\theta=$__ 。

【代碼】r41301m1

6 老師講解

若平面 $ax+y+3z+2=0$ 與平面 $y+z-3=0$ 所夾的銳夾角 $45°$，求 $a=$__。

6 學生練習

若 yz 平面與平面 $E:kx-2y+z+2=0$ 之夾角爲 $45°$，則 $k=$_____。

【代碼】r41208m1

3. 點到平面的距離：

(1) **點面距離**：

點 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $E:ax+by+cz+d=0$ 之距離為 $d(P,E)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

(2) **兩平行面距離**：

兩平行平面 $\begin{cases}E_1:ax+by+cz+d_1=0\\E_2:ax+by+cz+d_2=0\end{cases}$ 之間的距離為 $d(E_1,E_2)=\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

7 老師講解

設 $P(1,-2,3)$，$E:4x+3y-12z-1=0$ 求點 P 到平面 E 的距離=_____。

7 學生練習

求 $P(1,-1,2)$ 到平面 $E:2x+3y-6z=1$ 之距離爲_____。.

【代碼】r41302m1

8 老師講解

若 $P(a,b,c)$ 爲 $2x-4y-z-1=0$ 上一點，則 $\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2+(c+2)^2}$ 之最小值=__。

8 學生練習

點 $P(1,3,2)$ 到平面 $E:2x-y+2z+k=0$ 之距離爲 5，則 $k=$_____。

【代碼】r41210m1

9 老師講解

$A(8,5,3)$ 對平面 E 之對稱點爲 $A'(-4,-1,-1)$，試求 $B(3,4,4)$ 對平面 E 之距離 =_____。

9 學生練習

原點 O 在平面 E 上的投影點爲 $(2,-2,1)$，求 $P(1,1,1)$ 到平面 E 的距離。

【代碼】r41211m1

10 老師講解

若 $E_1: x-2y+2z=8$，
$E_2: 2x-4y+4z=5$，
則求此二平面之距離_____。

10 學生練習

若 $E_1: 2x-4y+5z=2$，
$E_2: 2x-4y+5z=17$，
則求此二平面之距離_____。
【代碼】r41303m1

11 老師講解

設兩平面 $E_1: 2x-y+2z-4=0$，
$E_2: ax+by+cz+10=0$，已知 $E_1 // E_2$，
且 E_1 與 E_2 的距離爲 2，
求序對 $(a,b,c)=$____。

11 學生練習

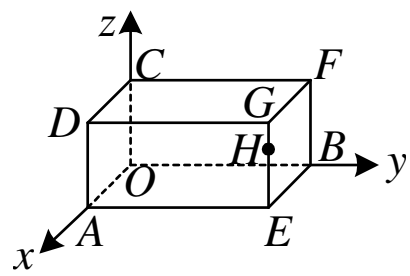
二平行平面 $E_1: x+2y-2z+3=0$、
$E_2: 2x+4y-4z=k$，已知 E_1 與 E_2
的距離爲 $\frac{5}{2}$，則 $k=$_____。
【代碼】r41214m1

【學生練習答案】

1. $x-y+4z=14$	2. $x+2y+z=13$	3. (1) $(4,-18,6)$ (2) $\sqrt{94}$ (3) $2x-9y+3z=-9$	
4. $x-2y-3z=2$	5. $\frac{\sqrt{17}}{9}$	6. $\pm\sqrt{5}$	7. 2
8. $k=12$ 或 -18	9. $\frac{8}{3}$	10. $\sqrt{5}$	11. $k=9$ 或 -21

回家功課

( ) 1. 右圖的長方體中，$\overline{OA}=2$，$\overline{OB}=4$，$\overline{OC}=3$，且 $\overline{GH}:\overline{HE}=1:2$，則通過點 D 且與 $\overline{CH}$ 垂直的平面方程式為_____。 代碼：r41202m1



(A) $x+2y-z=-1$ (B) $2x+4y-z=1$
(C) $2x+4y-z=5$ (D) $x+2y-z=10$。

( ) 2. 空間中有一直線 L 與平面 $E: x+2y+3z=9$ 垂直。試求通過點 $(2,-3,4)$ 且與直線 L 垂直的平面方程式為_____。 代碼：r41089c1
(A) $x+2y+3z=8$ (B) $x+2y+3z=5$
(C) $2x+y+z=5$ (D) $2x+y+z=8$。

( ) 3. 若空間中三平面 $E_1: 2x-3y+z=3$，$E_2: ax+6y+bz=-6$，$E_3: x-2y+cz=2$，其中 E_2 和 E_3 重合，且已知 E_1 和 E_3 垂直，則 $a+b-c$ 的值=_____。 代碼：r41223m1
(A) 29 (B) 27 (C) 25 (D) 23 。

( ) 4. 垂直 xy 平面，且過兩點 $A(3,0,1)$，$B(4,1,6)$ 之平面 E 的方程式為___。 代碼：r41219m1
(A) $z=1$ (B) $x-y=3$ (C) $x+2y-z=2$ (D) $2x-3y=6$ 。

( ) 5. 設 P，Q 為平面 $ax+by+cz=5$ 上相異兩點，且 $\overrightarrow{PQ}=(x_0,y_0,z_0)$，則 $\overrightarrow{PQ}\cdot(a,b,c)$ 為 代碼：r41086c1
(A)不定值，隨 (x_0,y_0,z_0) 而改變 (B) 25 (C) 5 (D) 0 。

( ) 6. 設 θ 為兩平面 $E_1: 2x-y+2z-6=0$ 與 $E_2: 3x-4z-2=0$ 的夾角(取銳角)，則 θ 最接近的整數度數為____。其中 $\sin 6°=0.1045$，$\sin 7°30'=0.1305$，$\sin 7°40'=0.1334$，$\sin 7°50'=0.1363$，$\sin 8°=0.1392$。 (A) 7° (B) 8° (C) 83° (D) 82°。 代碼：r41086c2

( ) 7. 空間中，設 $A(0,4,4)$，$B(2,4,5)$，$C(4,-4-4)$，$D(3,3,8)$，則在四面體 $D-ABC$ 中，以 ΔABC 為底面時，高的長度為 代碼：r41226m1
(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{7}$ 。

( ) 8. 設平面 E_1 與平面 $E_2: 2x+3y-6z+3=0$ 平行，且點 $P(1,2,3)$ 到此兩平面等距離，則平面 E_1 之方程式為____。 代碼：r41215m1
(A) $2x+3y-6z+17=0$ (B) $2x+3y-6z+7=0$
(C) $2x+3y-6z+13=0$ (D) $2x+3y-6z+11=0$。

答案：BAABD DCA

歷屆試題

( ) 1. 已知$\Delta=\begin{vmatrix}1-x & 2 & 3\\ 1 & 2-x & 3\\ 1 & 2 & 3-x\end{vmatrix}$，則$\Delta$與下列哪一式<u>不恆等</u>？ 代碼：a22101s1 (101 年統測 B)

(A)$\begin{vmatrix}6-x & 2 & 3\\ 6-x & 2-x & 3\\ 6-x & 2 & 3-x\end{vmatrix}$ (B)$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2-x & 3\\ 1 & 2 & 3-x\end{vmatrix}$ (C)$(6-x)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -x & 0\\ 0 & 0 & -x\end{vmatrix}$ (D)$x^2(6-x)$。

( ) 2. 求二次方程式$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -6 & x\\ 1 & x & 4\end{vmatrix}=0$的解集合 代碼：a22102s1 (102 年統測 B)

(A)$\{1,2\}$ (B)$\{-1,2\}$ (C)$\{1,-2\}$ (D)$\{-1,-2\}$。

( ) 3. 若三階行列式$\begin{vmatrix}x & 13 & 16\\ 11 & 14 & 17\\ 12 & 15 & 18\end{vmatrix}$之值爲3，則階行列式$\begin{vmatrix}x+2 & 13 & 16\\ 11 & 14 & 17\\ 12 & 15 & 18\end{vmatrix}$之值爲何？ (A)$-9$ (B)-3 (C)3 (D)9。 代碼：a22102k1 (102 年統測 C)

( ) 4. 下列行列式之值何者與$\begin{vmatrix}b & c\\ e & f\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}a & c\\ d & f\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}$之值相等？ 代碼：a22103s1 (103 年統測 B)

(A)$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}$ (B)$\begin{vmatrix}d & e & f\\ 1 & -2 & 3\\ a & b & c\end{vmatrix}$ (C)$\begin{vmatrix}a & d & -1\\ b & e & 2\\ c & f & -3\end{vmatrix}$ (D)$\begin{vmatrix}a & d & 1\\ b & e & 2\\ c & f & 3\end{vmatrix}$。

( ) 5. 三階行列式$\begin{vmatrix}101 & 102 & 103\\ 201 & 202 & 203\\ 301 & 302 & 304\end{vmatrix}$之值爲何？ 代碼：a22103k1 (103 年統測 C)

(A)-202 (B)-201 (C)-101 (D)-100。

( ) 6. 三階行列式$\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -2 & 3\\ 3 & -3 & 4\end{vmatrix}$之值爲何？ (A)$-2$ (B)-1 (C)1 (D)2。 代碼：a22104s1 (104 年統測 B)

( ) 7. 若行列式$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=2$，則$\begin{vmatrix}a_1 & c_1+a_1 & b_1-2c_1\\ a_2 & c_2+a_2 & b_2-2c_2\\ a_3 & c_3+a_3 & b_3-2c_3\end{vmatrix}=$？ 代碼：a22104k1 (104 年統測 C)

(A)-4 (B)-2 (C)2 (D)4。

( ) 8. 設 a、b、c 均爲實數，若 $(a-b)(b-c)(c-a)=-2$，則 $\begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 6c & 3c & 3b \\ 2c-2a & c-a & c-a \end{vmatrix}$ 之值爲何？ (A) -12 (B) -6 (C) 6 (D) 12。

代碼：a22105k1 (105 年統測 C)

( ) 9. 若兩個三階行列式的和 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ 之值爲 20，則 $a=$？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3。

代碼：a22106s1 (106 年統測 B)

( ) 10. 求三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 10 & 121 \end{vmatrix}=0$ 所有解的和爲何？

(A) 11 (B) $\frac{34}{3}$ (C) 12 (D) $\frac{40}{3}$。

代碼：a22106k1 (106 年統測 C)

( ) 11. 若二階行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 2 \end{vmatrix}=5$，且 $\begin{vmatrix} x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$，則 $x+y$ 之值爲何?

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 5。

代碼：a23107s1 (107 年統測 B)

( ) 12. 設 b_1、b_2、b_3、c_1、c_2 及 c_3 均爲實數，若二階行列式 $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=13$、$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=7$、$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=2$，則三階行列式 $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 2 & b_2 & c_2 \\ 3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=$？

(A) 5 (B) 13 (C) 25 (D) 33。

代碼：a22107k1 (107 年統測 C)

( ) 13. 若實數 x 滿足行列式 $\begin{vmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 4 & 6-2x & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}=4$，則 $\begin{vmatrix} 2 & 3-x & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1-x & -1 & -1 \end{vmatrix}=$？

(A) 4 (B) -4 (C) 8 (D) -8。

代碼：a22108s1 (108 年統測 B)

( ) 14. 利用降階法將行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 依第二列展開，

可得 $a\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ x & 1 \end{vmatrix}+b\cdot\begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+c\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & z \end{vmatrix}$，則 $a+b+c+x+y+z=$？

(A) -4 (B) 0 (C) 5 (D) 6。

代碼：a22109s1 (109 年統測 B)

( )
15. 已知三階行列式 $\begin{vmatrix} a_1-2b_1-3c_1 & a_1-2c_1 & a_1 \\ a_2-2b_2-3c_2 & a_2-2c_2 & a_2 \\ a_3-2b_3-3c_3 & a_3-2c_3 & a_3 \end{vmatrix}=8$，則 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=?$

(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4 。

代碼：a22109k1
(109 年統測 C)

( )
16. 若 x、y、z 爲相異實數，則三階行列式 $\begin{vmatrix} x+y & x-y & x \\ y+z & y-z & y \\ z+x & z-x & z \end{vmatrix}=$?

(A) 0
(B) $(x-y)(y-z)(z-x)$
(C) $(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$
(D) $(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$ 。

代碼：110tcc11
(110 年統測 C)

( ) 17. 正四面體 (四個面皆爲正三角形) $ABCD$ 的四個頂點坐標爲 $A(0,0,0)$、$B(2,0,0)$、$C(1,\sqrt{3},0)$、$D(x,y,z)$，其中 $z>0$，則 $z=$? (A) $\sqrt{3}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 。

代碼：111tcc13
(111 年統測 C)

( ) 18. 今有一飛機失事落海，救難直升機於失事地點附近偵測到黑盒子 (飛行記錄器的俗稱)，其所發出的訊號恰好位於直升機的正下方，但無法確定深度，直升機將位置訊息告知水上工作船，經船上人員推算，直升機位於工作船東方 140 公尺、北方 80 公尺的海平面上方 100 公尺處，並且偵測到該黑盒子與水上工作船的直線距離爲 180 公尺，如圖 (三) 所示。根據上述訊息，若黑盒子在海平面下深度爲 x 公尺，則 $x=$? (A)60 (B)70 (C)80 (D)90 。

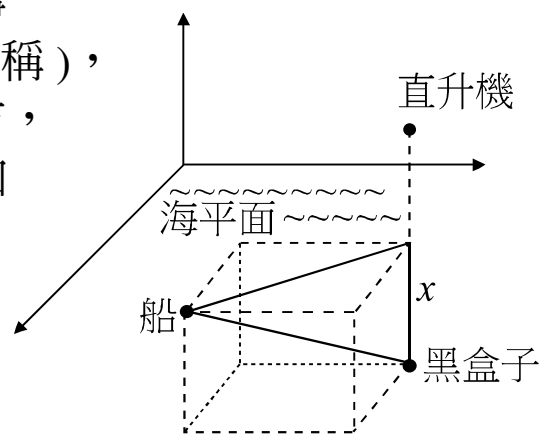


圖 (三)

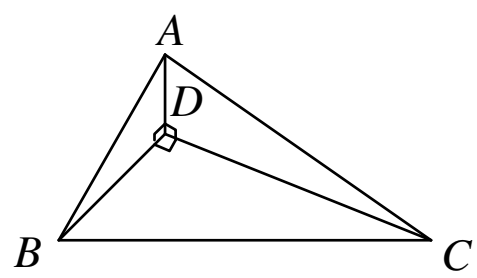
代碼：111tcc14
(111 年統測 C)

答案：BCBBD BBDBD DAABC ACC

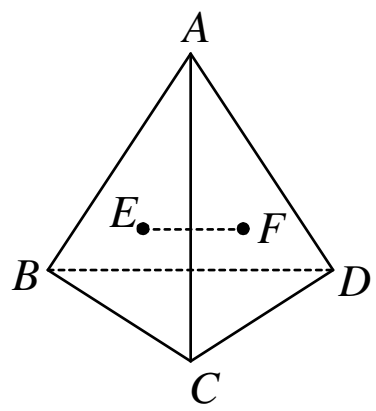
綜合練習

( ) 1. 一正立方體的八個頂點中有四個頂點，各頂點彼此之間的距離都是1，則此正立方體的體積為 (A) $2\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (C) 1 (D) 2 。 代碼：r31091a1

( ) 2. 右下圖 $A-BCD$ 是一個四面體，$\overline{AD}$，$\overline{BD}$，$\overline{CD}$ 兩兩互相垂直於 D 點，且 $\overline{AD}=1$，$\overline{BD}=2$，$\overline{CD}=2\sqrt{3}$，則點 A 到 $\overline{BC}$ 的最短距離為 (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2 。 代碼：r31223m1



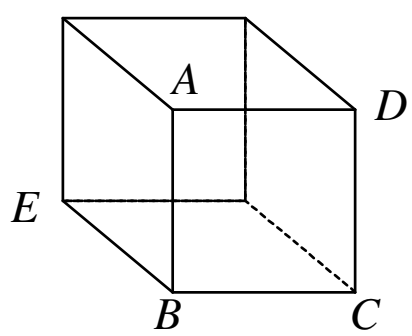
( ) 3. 學校蓋了一棟正四面體的玻璃溫室(如右圖)，今欲將一鋼柱橫架在室中，作為吊花的橫樑。其兩端分別固定在兩面牆 ABC 和 ACD 的重心 E，F 處。生物老師要先知道這個鋼柱多長，才能請工人製作。雖然 $\overline{BD}$ 的長度很容易量出，卻很難爬到 E，F 點測量 L 長。生物老師在上課時說出他的問題，立刻有一位同學舉手說他有辦法。這位同學在紙上畫出右圖，算出 $\overline{EF}:\overline{BD}$ 就解決了問題，問 $\overline{EF}:\overline{BD}=$ (A) 1:3 (B) 1:4 (C) 1:6 (D) 1:9 。 代碼：r31085c1



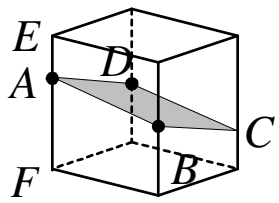
( ) 4. 有一正四面體的三個頂點 $A(1,1,0)$，$B(1,0,1)$，$C(0,1,1)$，試求另一個頂點坐標為何? (A) $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ (B) $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ (C) $(1,1,1)$ (D) $(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ 。 代碼：r32221m1

( ) 5. 設 O 為原點，點 P 在第一卦限內，若點 P 與 z 軸之距離為5，點 P 與 xy 平面之距離為2，且 $\overline{OP}$ 在 zx 平面上的投影長為 $2\sqrt{5}$，則點 P 坐標為 (a,b,c)，求 $a+b-c=$ (A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11 。 代碼：r32220m1

( ) 6. 空間中一長方體如圖所示，其中 $ABCD$ 為正方形，$\overline{BE}$ 為長方體的一邊，已知 $\tan\angle AEB=\frac{5}{2\sqrt{6}}$，則 $\tan\angle CED=$ (A) $\frac{7}{2\sqrt{6}}$ (B) $\frac{7}{5}$ (C) $\frac{2\sqrt{6}}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$ 。 代碼：r31100c1



( ) 7. 一正立方體被一平面截出一個四邊形 $ABCD$(如下圖)，其中 $\overline{EA}:\overline{AF}=1:2$，且 B、D 分別爲稜的中點，則 $\cos\angle DAB=$ (A)$\frac{6}{37}$ (B)$\frac{1}{26}$ (C)$\frac{1}{37}$ (D)$\frac{25}{26}$。



代碼：r33091c1

( ) 8. 空間中，以 $\overline{AB}$ 爲共同邊的兩正方形 $ABCD$、$ABEF$，其邊長皆爲 4，已知內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=11$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=$ (A)-5 (B)5 (C)27 (D)-27。

代碼：r34101a1

( ) 9. 若 $\overrightarrow{a}=(1,2,k)$，$\overrightarrow{b}=(2,0,3)$，$\overrightarrow{c}=(4,0,5)$ 且 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{c}$ 上正射影向量相同，則 $k=$ (A)$\frac{19}{5}$ (B)$\frac{13}{3}$ (C)$\frac{11}{7}$ (D)$\frac{14}{9}$。

代碼：r33208m1

( ) 10. $\overrightarrow{a}=(1,1,2)$，$\overrightarrow{b}=(2,-4,x)$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角 $60°$，則 $x=$ (A)$\frac{22}{7}$ (B)$\frac{35}{11}$ (C)$\frac{16}{3}$ (D)$\frac{26}{5}$。

代碼：r33202m1

( ) 11. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 10 & 20 \\ 5 & 50 & 1 \\ 10 & 1 & 5 \end{vmatrix}=$？ (A)$-99^2$ (B)-100^2 (C)99^2 (D)100^2。

代碼：a22097k1
(97 年統測 C)

( ) 12. 若 $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x-1 & 2 & 4 \\ x-2 & 4 & 7 \end{vmatrix}=0$，則 $x=$？ (A)-1 (B)0 (C)1 (D)2。

代碼：a22092k1
(92 年統測 C)

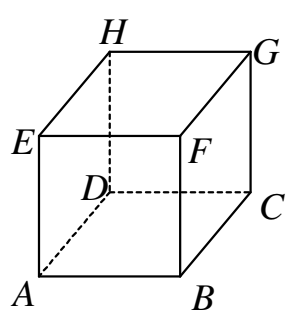
( ) 13. 若 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=12$ 且 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}=156$，則 $\begin{vmatrix} 1 & a+1 & a^2(a+1) \\ 1 & b+1 & b^2(b+1) \\ 1 & c+1 & c^2(c+1) \end{vmatrix}=$？
(A)13 (B)144 (C)168 (D)1872。

代碼：a22095k1
(95 年統測 C)

( ) 14. 空間中有兩點 $A(1,-2,4)$，$B(-2,0,-3)$，若直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與平面 $2x+y-3z+1=0$ 相交於 P 點，則 $\overline{AP}:\overline{BP}=$？
(A)$3:2$ (B)$11:6$ (C)$5:3$ (D)$2:1$ 。

代碼：r41213m1

( ) 15. 右圖中，$ABCD-EFGH$ 是一個正六面體，三頂點 $A(2,2,2)$，$B(0,4,3)$，$D(3,4,d)$，若點 E 在第一卦限，求 E 的座標
(A)$(3,3,4)$ (B)$(4,3,4)$ (C)$(3,4,4)$ (D)$(4,3,3)$。



代碼：r34227m1

( ) 16. 空間中三向量 $\overrightarrow{a}=(u_1,u_2,u_3)$，$\overrightarrow{b}=(v_1,v_2,v_3)$，$\overrightarrow{c}=(w_1,w_2,w_3)$，代碼：r34085c1

所張平行六面體的體積爲 $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ 的絕對值。

今已知 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 三向量所張平行六面體的體積爲5，

則 $2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 三向量所張平行六面體的體積爲何？

(A)3 (B)5 (C)10 (D)15。

( ) 17. 在坐標空間中，平面 $x-2y+z=0$ 上有一以點 $P(1,1,1)$ 爲圓心的圓 T，代碼：r41093c1

而 $Q(-9,9,27)$ 爲圓 T 上一點。若過 Q 與圓 T 相切的直線之一方向向量

爲 $(a,b,1)$，則 $a+b=$？ (A)8 (B)7 (C)6 (D)5。

( ) 18. 設 $O(0,0,0)$ 爲坐標空間中某長方體的一個頂點，且知 $A(2,2,1)$，代碼：r41097c1

$B(2,-1,-2)$，$C(3,-6,6)$ 爲此長方體中與 O 相鄰的三頂點。若平面

$E: x+by+cz=d$ 將此長方體截成兩部分，其中包含頂點 O 的那一部

分是個正立方體。則序組 $(b,c,d)=$？

(A) $(-2,2,9)$ (B) $(-2,2,9)$ (C) $(-2,2,9)$ (D) $(-2,2,9)$。

答案：BDADA DCCAD AACBB CAC

筆記欄

單元 11　一次方程式與矩陣

主題一　一次方程組與矩陣列運算

1. 二元一次聯立方程式的解法：

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ (其中 a_1,b_1 不能同時為 0 、 a_2,b_2 不能同時為 0)

(1) 利用加減消去法或代入消去法

(2) 利用行列式解法(克拉瑪 (*Cramer*) 公式)

令 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ， $\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ， $\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

若 $\Delta\neq 0$ ，則 $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}$ ， $y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}$

例；解聯立方程式 $\begin{cases} 3x-2y=12 \\ 2x+3y=-5 \end{cases}$

【解一】加減消去法：

$$\begin{cases} 3x-2y=12 \\ 2x+3y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x-6y=36 \\ 4x+6y=-10 \end{cases} \Rightarrow 13x=26 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

【解二】克拉瑪 (*Cramer*) 公式：

$$\begin{cases} 3x-2y=12 \\ 2x+3y=-5 \end{cases} \Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=13 \text{，} \Delta_x=\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}=26 \text{，} \Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=-39$$

$$\Rightarrow x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{26}{13}=2 \text{，} y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-39}{13}=-3$$

(3) 矩陣列運算　(重點 3 介紹)

老師講解 1

兩方程式 $\begin{cases} 3x+\dfrac{2y}{x}=7 \\ 3ax-by=19 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 5x+\dfrac{y}{x}=7 \\ ax-2by=13 \end{cases}$

有相同解，求 $a+b$ 之值。

學生練習 1

兩方程式 $\begin{cases} x+\dfrac{3x}{y}=-8 \\ ax-3by=-1 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 3x-\dfrac{x}{y}=16 \\ ax+2by=14 \end{cases}$

有相同解，求 $a+b$ 之值。

【代碼】a23a01m2

2. 三元一次聯立方程式的解法：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

(1) 利用加減消去法

(2) 利用行列式解法(克拉瑪 (*Cramer*) 公式)

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}，\Delta x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}，\Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}，\Delta z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

若 $\Delta\neq 0$，則 $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}$，$z=\dfrac{\Delta z}{\Delta}$

例；解聯立方程式 $\begin{cases} 3x+y+2z=11 \\ 2x-y+z=3 \\ 2x+3y-z=5 \end{cases}$

【解一】加減消去法：

$$\begin{cases} 3x+y+2z=11 \\ 2x-y+z=3 \\ 2x+3y-z=5 \end{cases} \overset{\text{消 } z}{\Rightarrow} \begin{cases} 4x+2y=8 \\ 7x+7y=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=4 \\ x+y=3 \end{cases} \overset{\text{消 } y}{\Rightarrow} x=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

【解二】克拉瑪 (*Cramer*) 公式：

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=14$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 11 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}=14，\Delta y=\begin{vmatrix} 3 & 11 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}=28，\Delta z=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=42$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{14}{14}=1，y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{28}{14}=2，z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{42}{14}=3$$

(3) 矩陣列運算　(重點 3 介紹)

老師講解 2

$\begin{cases} 2x-y+3z=9 \\ x+2y-z=2 \\ x+3y+z=10 \end{cases}$，求 (x,y,z) 之解。

學生練習 2

若 $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-2y+z=11 \\ 3x+y+3z=19 \end{cases}$，求 $x+y+z$ 之值。

【代碼】a23a03m2

3 老師講解

若 $\begin{cases} -2x+y-z=1 \\ -2x+5y+2z=2 \\ 3x+y=3 \end{cases}$，求 z 之值。

3 學生練習

若 $\begin{cases} 2x+3y-3=0 \\ y-z+8=0 \\ 3x-2z-1=0 \end{cases}$，求 z 之值。

【代碼】a23a03m3

4 老師講解

今有一個三位數，各位數字的和爲 8，交換個位數字與百位數字後就比原數小 99，交換十位數字與百位數字後就比原數小 270，求這數。

4 學生練習

設三數和是 73，第一數除以第二數得商數爲 2，餘數 5，第二數除以第三數得商數 2，餘數 4，求此三數。

【代碼】a23b02m1

3. 高斯消去法：

(1) 係數矩陣與增廣矩陣：

設方程組為 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$，則:

①係數矩陣：若只將未知數的係數依序列出，所得的矩陣稱為係數矩陣，

即 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ 為方程組所對應的係數矩陣。

②增廣矩陣：$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]$ 稱為方程組所對應的增廣矩陣。

(2) 矩陣的列運算：把矩陣下列三種方式的改變稱為列運算：

①把某兩列互換: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

②把某列乘上一個不為 0 的常數: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}^{\times 2} \to \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

③把某列乘上一常數加至另一列: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \hookleftarrow \times(-3) \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

(3) 高斯消去法：利用上述之列運算依照下列步驟

【步驟一】：作列運算，使第一列第一行為1。

【步驟二】：作列運算，使第二列以下的第一行全部化為 0 。

【步驟三】：作列運算，使第二列第二行為1，若沒辦法辦到，則使第二列第三行為1，並使此1之下方的數全部化為 0 。

【步驟四】：重複步驟三，將下一列右一行化為1，直到最後一列為止。

經過上列步驟最後得出的矩陣就稱為梯(矩)陣，解一次方程組就是要將他的增廣矩陣經過矩陣的列算化為梯(矩)陣，如此即可求出原方程組的解。
這種解一次方程組的方法稱為高斯消去法。

5 老師講解

試利用矩陣的列運算解下列方程式

$$\begin{cases} x+3y+z=-22 \\ 2x-6y-z=7 \\ 2x-5y+z=1 \end{cases}$$

5 學生練習

利用高斯消去法解下列方程組

$$\begin{cases} x+3y-2z=-11 \\ 3x+2y-z=-4 \\ 2x-y+3z=13 \end{cases}$$

【代碼】f51201m1

6 老師講解

設矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & b & 7 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & c \end{array}\right]$ 經列運算後變爲

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$，則 $a+b+c=$_____。

6 學生練習

增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & b & 3 & -2 \\ a & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & c \end{array}\right]$ 經由列運算

得 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$，則 $a+b+c=$_____。

【代碼】f51202m1

4. 二元一次聯立方程組的討論：

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 圖形表二直線

(1) $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ (即 $\Delta\neq 0$) ⇒二線交一點，僅有一組解 ⇒相容方程組

(2) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ (即 $\Delta=0$，Δ_x,Δ_y 不全為 0) ⇒二線平行，無解 ⇒矛盾方程組

(3) $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ (即 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$) ⇒二線重合，有無限多組解 ⇒相依方程組

7 老師講解

設 $\begin{cases} (a+1)x+2y=-1 \\ 4x+(a-1)y=2 \end{cases}$ 無解，求 a 之值。

7 學生練習

若 $\begin{cases} 4x+(m+5)y+m=0 \\ (m+2)x+(3m+1)y+2=0 \end{cases}$ 爲相依方程組，求 m 之值。

【代碼】a23a04m3

8 老師講解

設 $\begin{cases} ax+3y=0 \\ 2x+6y=b-3 \end{cases}$ 除了 $(0,0)$ 以外，尚有其他解，求 a,b 之值。

8 學生練習

設 $\begin{cases} 4x+ay=0 \\ 2x+3y=b+2 \end{cases}$ 除了 $(0,0)$ 以外，尚有其他解，求 $a+b$ 之值。

【代碼】a23b03m2

5. 三元一次聯立方程組的討論：

(1) 利用行列式解法(克拉瑪 (*Cramer*) 公式)

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}，\Delta x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}，\Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}，\Delta z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

①若 $\Delta\neq 0\Rightarrow$ 方程式僅有一組解 (即 $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}$ ， $y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}$ ， $z=\dfrac{\Delta z}{\Delta}$)

【例如】：$\begin{cases} x+3y+z=-22 \\ 2x-6y-z=7 \\ 2x-5y+z=1 \end{cases}$ ，$\Delta\neq 0$，且僅有一組解 $x=-9$ 、 $y=-4$ 、 $z=-1$

②若 $\Delta=0$，但 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 有一不為 $0\Rightarrow$ 方程式無解

【例如】：$\begin{cases} 3x-y-z=-1 \\ x+2y-z=0 \\ 5x-4y-z=-3 \end{cases}$ ，$\Delta=0$，但 $\Delta x\neq 0\Rightarrow$ 方程式無解

③若 $\Delta=0$，且 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=0\Rightarrow$ 方程式無限多組解或無解

【例如】：$\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x+y+z=7 \\ 8x+7y+z=31 \end{cases}$ ，$\Delta=0$，且 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=0\Rightarrow$ 方程式無限多組解

【例如】：$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \\ x+y+z=3 \end{cases}$ ，$\Delta=0$，且 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=0\Rightarrow$ 方程式無解

(2) 利用矩陣列運算

三元一次方程組的增廣矩陣，經由列運算後，由其最後的結果，可判斷方程組解的個數:

① $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]\Rightarrow$ 方程組有唯一解 $(x,y,z)=(a,b,c)$ 。

② $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right]\Rightarrow$ 若 $\begin{cases} \text{若}c=0\Rightarrow\text{無限多組解} \\ \text{若}c\neq 0\Rightarrow\text{無解} \end{cases}$

9 老師講解

解下列方程組，每一題都用行列式與高斯消去法各解一次

(1) $\begin{cases} 3x-y-z=-1 \\ x+2y-z=0 \\ 5x-4y-z=-3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+2y-z=5 \\ 2x+y+z=7 \\ 8x+7y+z=31 \end{cases}$

9 學生練習

利用高斯消去法解下列方程組

(1) $\begin{cases} 2x+y+z=6 \\ x-4y+8z=3 \\ x+2y-2z=3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 3x-y+2z=9 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$

【代碼】f51203m1

10 老師講解

若聯立方程式 $\begin{cases} x+2y+3z=ax \\ 2x+y+3z=ay \\ 2x+3y+z=az \end{cases}$ 有不為 $(0,0,0)$ 的解，則實數 $a=$_____。

10 學生練習

若三元一次齊次方程式 $\begin{cases} ax+2y+3z=0 \\ 2x+ay+3z=0 \\ 2x+3y+az=0 \end{cases}$ 有不為 $(0,0,0)$ 的解，則實數 a 的值為___。

【代碼】r43205m1

【學生練習答案】

1. -1	2. 5	3. $\dfrac{79}{13}$	4. 45，20，8
5. $x=1$，$y=-2$，$z=3$		6. -1	7. 2
8. 4	9. (1)無限多組解　(2)無解		10. $a=-5$ 或 2 或 3

回家功課

( ) 1. 解方程組$\begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=4\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1\end{cases}$，則$x-y=$？ (A)$-\dfrac{1}{2}$ (B)0 (C)$\dfrac{1}{2}$ (D)$\dfrac{3}{2}$。 代碼：a23201m1

( ) 2. 若$\begin{cases}x+y-z=4\\ 2x-y-3z=6\\ x+3y-2z=7\end{cases}$，求$x+y+z=$？ (A)1 (B)2 (C)3 (D)4。 代碼：a23203m1

( ) 3. $\begin{cases}x-3y+2z=-9\\ ax+y+z=4\\ 2x+y-z=8\end{cases}$ 與 $\begin{cases}2x-y+bz=1\\ x+3y-2z=13\\ 2x-cy+z=12\end{cases}$表$x$、$y$、$z$的三元一次方程組，
若兩方程組爲同義方程組，且恰有一組解，則$a+b+c=$？
(A)-1 (B)-2 (C)-3 (D)-4。 代碼：r43212m1

( ) 4. 有甲,乙,丙三數，其和爲20，甲數與乙數的二倍及丙數的三倍和爲44，甲數與乙數的和的二倍減去丙數得-14，求此三數中最大爲多少？
(A)14 (B)18 (C)22 (D)26。 代碼：a23212m1

( ) 5. 方程組$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$，已知$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=1$、$\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}=2$、$\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}=3$，
則$x+2y=$？ (A)1 (B)2 (C)3 (D)4。 代碼：r24301m1

( ) 6. 方程式$\begin{cases}ax+8y=6\\ 2x+ay=3\end{cases}$爲矛盾方程組，則$a=$？
(A)4 (B)-4 (C)±4 (D)0。 代碼：a23220m1

( ) 7. 設a是實數，若聯立方程式$\begin{cases}ax+y+2z=1\\ x+ay+2z=1\\ x+2y+az=1\end{cases}$有唯一解，則$a$可能爲
(A)-3 (B)-2 (C)1 (D)2。 代碼：r43207m1

( ) 8. 增廣矩陣$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 5 & -10\\ 3 & 3 & -4 & 9\end{array}\right]$經由列運算得$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 5 & a\\ 0 & 1 & 2 & b\\ 0 & 0 & 1 & c\end{array}\right]$，
求$a+b+c=$？ (A)-21 (B)-23 (C)-25 (D)-27。 代碼：f51205m1

( ) 9. 利用列運算求解方程組時，得$\cdots\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & a & 3 & 3\\ 0 & 1 & b & -5\\ 0 & 2 & -6 & c\end{array}\right]\rightarrow\cdots\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -3 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$；
數字a,b,c不愼汙損，求$a+b+c=$？ (A)11 (B)17 (C)-9 (D)-14。 代碼：f51205m7

答案：DBBBA BBCD

主題二　矩陣運算

1. 矩陣的定義：

(1) **定義**：

設 m ，n 是正整數，$a_{ij}(1\le i\le m,1\le j\le n)$ 是實數，形如 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 的長方形陣列稱為 $m\times n$ 階矩陣，以 $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ 表示這矩陣。

(2) **矩陣及相關名詞**：

元	矩陣中每一個數叫作這矩陣之一個元。
列	在一矩陣中，位於同一水平線上的各元合稱為這個矩陣的一列， 而且列的順序由上至下，依次叫作第一列、第二列、第三列、…。
行	在一矩陣中，位於同一鉛直線上的各元合稱為該矩陣的一行， 而且行的順序由左至右依次叫作第一行、第二行、第三行、…。
階數	若一矩陣共有 m 列且有 n 行，我們稱之為 $m\times n$ 階矩陣，簡稱為 $m\times n$ 階矩陣。
方陣	當一矩陣之列數與行數相等，我們稱之為方陣， 而 $n\times n$ 矩陣(方陣)，則簡稱為 n 階方陣。
(i,j) 元	在一個矩陣中，每個元都有它所屬的列與行； 習慣上位於第 i 列、第 j 行的元稱為 (i,j) 元。

(3) **矩陣相等**：

若兩矩陣之行數與列數都分別相等，且其 (i,j) 位置的元素都對應相等(即 $a_{ij}=b_{ij}$)，則稱 A 與 B 相等，以 $A=B$ 表示。

老師講解 1

若 $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$，其中 $a_{ij}=i^2+2j$，試寫出此矩陣 A。

學生練習 1

矩陣 A 之 (i,j) 元定義爲 $a_{ij}=2i-j^2+1$，其中 $i=1,2,3$，$j=1,2$，試求 $A=$___。

【代碼】f52201m1

2 老師講解

設$\begin{bmatrix} a & 3 & 3x \\ x+y & 7 & x-2y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-y & 3 & b \\ 4 & 7 & 2x+1 \end{bmatrix}$，

試求序組$(x,y,a,b)=$_____。

2 學生練習

若$\begin{bmatrix} x+2y & z+3u \\ 2z-u & x-3y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$，

則$(x,y,z,u)=$_____。

【代碼】f52203m1

2. 矩陣的加減法與係數積：

(1) 矩陣的加法：$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{bmatrix}$

【性質】：① $A+B=B+A$

② $(A+B)+C=A+(B+C)$

(2) 矩陣的減法：$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-e & c-g \\ b-f & d-h \end{bmatrix}$

(3) 矩陣的係數積：$r\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ra & rc \\ rb & rd \end{bmatrix}$

【比較】：$r\begin{vmatrix} a & d \\ b & c \end{vmatrix}=r(ad-bc)=\begin{vmatrix} ra & rc \\ b & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ra & c \\ rb & d \end{vmatrix}$

3 老師講解

設 $A=\begin{bmatrix}4 & 5 & -4\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-2 & -3 & -2\\ 1 & -4 & 6\end{bmatrix}$，

(1) $A+B=$_____。

(2) 若 $7X-2A+B=A+5X$，

則 $X=$_____。

3 學生練習

設 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\ 3 & 0 & -2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$，

$C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}$，試求：

(1) $2A+3B=$_____。

(2) 若矩陣 X 滿足 $2X-4C=2A+B$，

求 $X=$_____。

【代碼】f52204m1

【學生練習答案】

1. $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\\ 6 & 3\end{bmatrix}$	2. $(x,y,z,u)=(1,2,3,4)$
3. (1) $\begin{bmatrix}11 & -1 & 11\\ 12 & 6 & 5\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{17}{2}\\ 0 & 7 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$	

回家功課

( ) 1. 設$\begin{bmatrix} \sin 2\theta & (\sin\theta+\cos\theta)^2 \\ \cos 4\theta & \tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & q \\ p & r \end{bmatrix}$，求$2p+4q+r=$_____。 代碼：f52221m1

(A)10 (B)11 (C)12 (D)13。

( ) 2. 某校調查電子群取得乙級和丙級證照的人數如下: 代碼：f52308m1

電子科： 一年級：乙級(0 人)、丙級(52 人)
二年級：乙級(3 人)、丙級(58 人)
三年級：乙級(13 人)、丙級(67 人)
資訊科： 一年級：乙級(0 人)、丙級(54 人)
二年級：乙級(5 人)、丙級(62 人)
三年級：乙級(12 人)、丙級 72 人)
控制科： 一年級：乙級(0 人)、丙級(32 人)
二年級：乙級(2 人)、丙級(47 人)
三年級：乙級(9 人)、丙級(53 人)

分別以矩陣$\begin{bmatrix} 0 & 52 \\ 3 & 58 \\ 13 & 67 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 & 54 \\ 5 & 62 \\ 12 & 72 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 & 32 \\ 2 & 47 \\ 9 & 53 \end{bmatrix}$表示電子科、資訊科和控制科各年級取得乙級和丙級證照的人數，求以3×2階矩陣表示電子群各年級取得乙級和丙級證照的人數可爲：

(A)$\begin{bmatrix} 0 & 138 \\ 10 & 167 \\ 34 & 192 \end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix} 16 & 177 \\ 17 & 188 \\ 11 & 132 \end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix} 15 & 117 \\ 22 & 143 \\ 14 & 187 \end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix} 0 & 113 \\ 13 & 153 \\ 21 & 178 \end{bmatrix}$。

( ) 3. 有一個3×2階矩陣，其元素由一個1，兩個2，三個3所構成，則此種矩陣共有幾個？ 代碼：f52222m1

(A)6 (B)12 (C)60 (D)120。

答案：BAC

主題三　矩陣的乘法與二階乘法反方陣

1. 矩陣的乘法：

(1) **兩個矩陣可相乘的條件**：

AB 有意義 $\Leftrightarrow$ A 的行數等於 B 的列數。

(2) **定義**：

若 A 是一個 $m\times n$ 階矩陣，而 B 是一個 $n\times p$ 階矩陣，則其乘積 AB 是一個 $m\times p$ 階矩陣，而且 AB 的每個 (i, j) 元都等於 A 的第 i 列中各元(共有 n 個元)與 B 的第 j 行中各對應元(也有 n 個元)之乘積的和。

(3) 設 $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$，$B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$，$C=\left[c_{ij}\right]_{m\times p}$，則 $AB=C$ 表示:

$$AB=\begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots\cdots & b_{1j} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & b_{2j} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & b_{nj} & \cdots\cdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

(第 i 列)　　(第 j 行)　　(第 i 列第 j 行)

故對每組 (i, j)，$i=1$，2，$\cdots$，m；$j=1$，2，$\cdots$，p，

都有 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$。

老師講解

設 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$，

求 $AB=$？$BA=$？

學生練習

設 $A=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，

求 $AB=$？$BA=$？

【代碼】f52306m1

(4) **矩陣乘法的基本性質：**

設 A,B,C 皆為可相乘之矩陣，r 為實數

①結合律：$(AB)\cdot C = A\cdot(BC)$

②分配律：$A(B+C)=AB+AC$ (左分配)、$(B+C)A=BA+CA$ (右分配)

③ $(rA)B=r(AB)=A(rB)$

(5) **矩陣乘法與實數乘法的差異：**

若 A,B 為矩陣

①矩陣乘法沒有交換律：AB 與 BA 不一定相等

②矩陣乘法沒有消去律：當 $AB=AC$ 且 $A\neq O$ 時，B 與 C 不一定相等。

【例如】：$\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&2\\2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10&-4\\-5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

【註】：但 A,B,C 為 n 階方陣，當 $AB=AC$ 且 $\det A\neq 0$ 時，B 與 C 相等。

③若 A、B 為非零矩陣，其乘積 AB 可能為零矩陣。

即 $AB=O$ 時，A、B 可能皆不是 O 矩陣。

【例如】：$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

2 老師講解

設 $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&3&2\\3&1&-2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1\\3&5\\0&-1\end{bmatrix}$，

$C=\begin{bmatrix}2&1\\3&-2\end{bmatrix}$，求

(1) $(AB)C=$_____，(2) $A(BC)=$_____。

2 學生練習

設 $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\3&2&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\\4&1\end{bmatrix}$，

$C=\begin{bmatrix}2&3\\1&1\end{bmatrix}$，求

(1) $(AB)C=$_____，(2) $A(BC)=$_____。

【代碼】f52307m1

3 老師講解

若 $A=\begin{bmatrix}15 & -7\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-10 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，

$C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$，求

(1) $AC+BC=$_____，

(2) $(A+B)C=$_____。

3 學生練習

已知 $A=\begin{bmatrix}99 & 98\\ -97 & -96\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-96 & -97\\ 98 & 99\end{bmatrix}$，

$C=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$，求 $AC+BC=$_____。

【代碼】f52208m1

(6) **方陣的乘法：**

設 A 是一方陣，

① $\underbrace{A\cdot A\cdot A\cdots A}_{k\text{ 個}}=A^k$　② $A^m\cdot A^n=A^{m+n}$　③ $(A^m)^n=A^{mn}$。$(m,n\in N)$

4 老師講解

設 A，B 均爲二階方陣，

且 $A+B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 5\end{bmatrix}$，$A-B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 5 & 3\end{bmatrix}$，則

$A^2-B^2=$____。

4 學生練習

已知 A,B 是二階方陣，

$A+2B=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$，$A-2B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，

則 $A^2-4B^2=$_____。

【代碼】f52210m1

5 老師講解

$A=\begin{bmatrix}3 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}$，則 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}=$？

5 學生練習

設 $A=\begin{bmatrix}8 & 10\\ -4 & -5\end{bmatrix}$，

滿足 $A+A^2+A^3+A^4=kA$，

求實數 $k=$_____。

【代碼】f52214m1

(7) **乘法單位方陣性質**：

①單位矩陣：

一個 $n\times n$ 階的方陣，從它的左上角到右下角之直線上的元都是1，而其它的元都是0，我們就稱它為 n 階單位方陣，以 I_n 表示。

【例如】：$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

②設 A 為 $m\times n$ 階矩陣，則 $I_mA=A$，$AI_n=A$。

【例如】：$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$、$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow AI=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}=A$

③若 I 為單位矩陣，則 $I^n=I$

【註】：I_n 就像實數乘法中的「1」，任何矩陣乘上 I_n 後的結果與原矩陣相同

6 老師講解

若 A 爲 2 階方陣，I 爲 2 階單位方陣，

若 m,n 爲實數，$A^2=3A$，

$(A+I)^2=mA+nI$，求 m 、 n 之值。

6 學生練習

若 A 爲 2 階方陣，且 $A^2=-2A$，

I 爲 2 階單位方陣，$(A-2I)^2=mA+nI$

其中 m,n 爲實數，，求 m 、 n 之值。

【代碼】f52302m1

2. 二階反矩陣的定義與公式：

(1) n 階方陣的乘法反方陣：

設 A 是一個 n 階方陣，若存在一個 n 階方陣 B，使得 $AB = BA = I_n$，

則稱方陣 A 是可逆方陣，而方陣 B 稱為方陣 A 的乘法反方陣，以 $B = A^{-1}$ 表示。

亦即 $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$。

(2) 二階方陣的反方陣：

若 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，且 $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

①若 $\det A = 0$ 時，則 A 沒有反方陣

②若 $\det A \neq 0$ 時，$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

老師講解

設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，則

(1) 試求 A^{-1} 爲_____，

(2) 若 $AB = 2I_2$，求 $B =$ _____。

學生練習

設方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$，

(1) 試求 $A^{-1} =$ _____，

(2) 若 $AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，求 $B =$ _____。

【代碼】f53201m1

8 老師講解

設 $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\3 & 8\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4 & 3\\5 & 1\end{bmatrix}$，

(1) 若 $AX=B$，試求 $X=$_____，

(2) 若 $YA=B$，試求 $Y=$_____。

8 學生練習

設矩陣 A 滿足 $\begin{bmatrix}1 & 4\\-2 & 3\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}6 & 19 & 29\\-1 & 6 & 8\end{bmatrix}$，

試求矩陣 $A=$_____。

【代碼】f53202m1

9 老師講解

設 $A=\begin{bmatrix}2 & x\\1 & 3\end{bmatrix}$，若 A 的反矩陣不存在，

則實數 $x=$_____。

9 學生練習

設 $A=\begin{bmatrix}x-2 & 2\\-1 & 3-x\end{bmatrix}$的乘法反方陣不存在，

則 $x=$_____。

【代碼】f53204m1

(3) **矩陣與方程組**：

若方程式 $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$，則可以矩陣乘法型式表示成 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$

10 老師講解

試利用反方陣解一次方程組 $\begin{cases} 3x+y=11 \\ 5x+2y=17 \end{cases}$

10 學生練習

試利用反方陣解一次方程組 $\begin{cases} 4x+y=9 \\ x-3y=-1 \end{cases}$

【代碼】f53301m1

11 老師講解

已知 $\begin{cases} x+2y=u \\ 2x-3y=v \end{cases}$，$\begin{cases} 3u+4v=p \\ 2u+1v=q \end{cases}$，

若 x, y, p, q 四個未知數的關係式以矩陣表示爲 $M\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$，則 $M=$_____。

11 學生練習

已知 $\begin{cases} 2x+y=u \\ 3x-2y=v \end{cases}$，$\begin{cases} 4u+3v=p \\ u+2v=q \end{cases}$，

若 x, y, p, q 四個未知數的關係式以矩陣表示爲 $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$，則 $A=$___。

【代碼】f53207m1

【學生練習答案】

1. $AB=\begin{bmatrix} 6 & 24 \\ 4 & 6 \\ 11 & 19 \end{bmatrix}$ BA 無法運算		2.(1) $\begin{bmatrix} 47 & 67 \\ 21 & 29 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 47 & 67 \\ 21 & 29 \end{bmatrix}$	
3. $\begin{bmatrix} 14 & 18 \\ 18 & 22 \end{bmatrix}$	4. $\begin{bmatrix} 15 & 19 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$	5. 40	6. $m=-6$、$n=4$
7. (1) $A^{-1}=\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (2) $B=\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$		8. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$	9. $x=1$ 或 4
10. $(x, y)=(2,1)$	11. $\begin{bmatrix} 17 & -2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$		

回家功課

( ) 1. 若 $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -4 & 5\end{bmatrix}$，則 $AB=$_____。 代碼：f52303m1

(A)$\begin{bmatrix}6 & 2\\ -12 & 15\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}3 & 3\\ -1 & 5\end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix}-8 & 10\\ 9 & 3\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}-7 & 9\\ 4 & 11\end{bmatrix}$。

( ) 2. 設 A 為二階方陣，且 $A\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+3b\\ a-b\end{bmatrix}$，$B\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c+2d\\ 3c-d\end{bmatrix}$， 代碼：f52212m1

則 $A+B=$_____。

(A)$\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & -2\end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix}5 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & 7\end{bmatrix}$。

( ) 3. 已知 $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}8 & 3\\ 9 & 4\end{bmatrix}$，則 $X=$____。 代碼：f53302m1

(A)$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。

( ) 4. 二階方陣 A 的反方陣是 $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，求矩陣 $A=$___。 代碼：f53213m1

(A)$\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}3 & -1\\ -4 & 2\end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix}2 & -4\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & -4\end{bmatrix}$。

( ) 5. 設 A 是二階方陣，且 $A^3=\begin{bmatrix}7 & -5\\ -10 & 7\end{bmatrix}$，$A^4=\begin{bmatrix}17 & -12\\ -24 & 17\end{bmatrix}$，求 $A=$___。 代碼：f53203m1

(A)$\begin{bmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$。

答案：CABAD

歷屆試題

( ) 1. 設二元一次方程組$\begin{cases}3x-7y=11\\3y-7x=11\end{cases}$，則其解為何？ 代碼：a23100s1 (100 年統測 B)

(A)無解 (B)無限多組解 (C) $x=6$ 、 $y=1$ (D) $x=-\frac{11}{4}$ 、 $y=-\frac{11}{4}$ 。

( ) 2. 某餐廳有 A 、 B 及 C 三種套餐。今志志訂 2 個 A 套餐，2 個 B 套餐，總共 2000 元；敏敏訂 3 個 A 套餐，1個 B 套餐，總共 2400 元；耀耀訂 1個 A 套餐，1個 B 套餐，2 個 C 套餐，總共 3200 元。若訂 6 個 A 套餐，4 個 B 套餐及 2 個 C 套餐，則總共為多少元？ (A) 7400 (B) 7600 (C) 7800 (D) 8000 。 代碼：a23100s2 (100 年統測 B)

( ) 3. 已知方程組 $\frac{x+y+1}{4}=\frac{2x-1}{5}=\frac{y+1}{2}$ 的解為 (a,b) ，求 $a-b$ 之值？ 代碼：a23102s1 (102 年統測 B)

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 。

( ) 4. 已知 $a>0$ ，且方程式組$\begin{cases}-x+3y=ax\\3x+y=ay\end{cases}$有無限多組解，則 $a=$？ 代碼：a23102k1 (102 年統測 C)

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{10}$ 。

( ) 5. 設 x 、 y 、 k 均為實數，若 $|x+1|+|2x-y+4|+|x+3y+k|=0$ ，則 k 之值何？ (A) 3 (B) 1 (C) -4 (D) -5 。 代碼：a23103k1 (103 年統測 C)

( ) 6. 已知 a,b 為實數，若$\begin{cases}-2x-6y=8\\ax+by=2\end{cases}$與$\begin{cases}3x+5y=-4\\2ax+(a-b)y=6\end{cases}$有相同的解，則 $(a+b)^2=$？ (A) 9 (B) 16 (C) 25 (D) 36 。 代碼：a23104s1 (104 年統測 B)

( ) 7. 若二元一次方程式組$\begin{cases}2x+3y=-4\\3x-4y=5\end{cases}$的解為 $x=a$ 、 $y=b$ ，則 $a+b=$？ 代碼：a23104k1 (104 年統測 C)

(A) $-\frac{23}{17}$ (B) $-\frac{21}{17}$ (C) $\frac{21}{17}$ (D) $\frac{23}{17}$ 。

( ) 8. 已知$\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=2\\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{9}{y}=-1\end{cases}$，則下列何者正確？ 代碼：a23105s1 (105 年統測 B)

(A) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}2&3\\4&-9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3\\-1&-9\end{vmatrix}}$，$y=\dfrac{\begin{vmatrix}2&3\\4&-9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&2\\4&-1\end{vmatrix}}$ (B) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}2&3\\-1&-9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3\\4&-9\end{vmatrix}}$，$y=\dfrac{\begin{vmatrix}2&2\\4&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3\\4&-9\end{vmatrix}}$

(C) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}2&3\\4&-9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&2\\4&-1\end{vmatrix}}$，$y=\dfrac{\begin{vmatrix}2&3\\4&-9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3\\-1&-9\end{vmatrix}}$ (D) $x=\dfrac{\begin{vmatrix}2&2\\4&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3\\4&-9\end{vmatrix}}$，$y=\dfrac{\begin{vmatrix}2&3\\-1&-9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&3\\4&-9\end{vmatrix}}$。

( ) 9. 若三元一次聯立方程式$\begin{cases}ax-ay=5\\ ax-y+(1-a)z=3\\ (1-a)y+(2a-3)z=1\end{cases}$恰有一解，則$a$可能為下列何值？ (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。 代碼：a23105k1 (105 年統測 C)

( ) 10. 設x、y、z為整數，且$2|x+y|+3|x-y-4|+5|2x+3y-z|=4$，則$z$可為下列何者？ (A) 0 (B) 3 (C) 5 (D) 11。 代碼：a23106k1 (106 年統測 C)

( ) 11. 設t為實數，且三元一次聯立方程式$\begin{cases}(t+1)x+(t-1)z=1\\ (t+1)y+z=3\\ (t+1)y+tz=5\end{cases}$無解，則$t$可為下列何者？ (A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2。 代碼：a23106k2 (106 年統測 C)

( ) 12. 設$\begin{cases}3x+5y+z=15\\ 2x+4y+z=12\\ 5x+y+2z=3\end{cases}$，則$y=$? (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5。 代碼：a23107k1 (107 年統測 C)

( ) 13. 已知下列兩個聯立方程組有相同的解(x,y,z)，試問a的值為何? 代碼：a23108k1 (108 年統測 C)

$\begin{cases}3x-4y+z=4\\ 5x+2y-2z=3\end{cases}$、$\begin{cases}2x+3y-2z=a\\ 4x+5y-3z=1\end{cases}$

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。

( ) 14. 若k為實數，且二元一次聯立方程組$\begin{cases}kx+3y+k+1=0\\ x+4(k+1)y+8k^2+1=0\end{cases}$有無限多組解，則$k$可為下列何值？ 代碼：110tcc10 (110 年統測 C)

(A) $-\dfrac{3}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{3}{2}$ 。

(　　) 15. 在一個園遊會的攤位遊戲中，遊戲規則如下：在一個桶子裡有三種球，抽中紅球可得 x 點，抽中黃球可得 y 點，但抽中黑球則必須扣掉 z 點。每個人抽 10 次，每次抽一個球，最後依照得到的點數來兌換獎品。已知小華抽中 3 個紅球、3 個黃球、4 個黑球，共得 10 點；小明抽中 4 個紅球、3 個黃球、3 個黑球，共得 21 點；小玲抽中 2 個紅球、6 個黃球、2 個黑球，共得 26 點。若小蘭抽中 3 個紅球、5 個黃球、2 個黑球，則小蘭得到的點數為何？　(A)28　(B)30　(C)32　(D)39　。

代碼：111tcc11
(111 年統測 C)

(　　) 16. 若矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 2 & c \\ b & d \end{bmatrix}$，且 $AB=A+B$，則 $c=$？

(A) -1　(B) $\frac{-1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) 1　。

代碼：111tcc17
(111 年統測 C)

答案：DBDDD　AAADB　CBBCA　C

綜合練習

( ) 1. 設聯立方程組$\begin{cases}2x+3y=-1\\ax+by=4\end{cases}$與$\begin{cases}3x-2y=5\\2ax+by=-1\end{cases}$有共同解，則$a+b$之值爲： (A)$-14$ (B)14 (C)4 (D)-4 (E)-8。 代碼：a23089g1

( ) 2. 一礦物內含 A、B、C 三種放射性物質，放射出同一種輻射。已知 A、B、C 每公克分別會釋放出 1 單位、2 單位、1 單位的輻射強度，又知 A、B、C 每過半年其質量分別變爲原來質量的$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$倍。於一年前測得此礦物的輻射強度爲 66 單位，而半年前測得此礦物的輻射強度爲 22 單位，且目前此礦物的輻射強度爲 8 單位，則目前此礦物中 A、B、C 物質的總質量爲多少公克？
(A)7 (B)10 (C)11 (D)13。 代碼：f31100c1

( ) 3. 相傳包子是三國時白羅家族發明的。孔明最喜歡吃他們所作的包子，因此白羅包子店門庭若市，一包難求，必須一大早去排隊才買得到。事實上，白羅包子店只賣一種包子，每天限量供應 999 個，且規定每位顧客限購三個，而購買一個，二個，三個包子的價錢分別是 8，15，21 分錢。在那三國戰亂的某一天，包子賣完了，老闆跟老闆娘有如下的對話，老闆說：「賺錢眞辛苦，一個包子成本就要 5 分錢，今天到底賺了多少錢？」老闆娘說：「今天共賣了 7195 分錢，只有 432 位顧客買到包子。」請問當天白羅包子店淨賺多少錢？
(A)1700 (B)2100 (C)2200 (D)2350。 代碼：f51090b1

( ) 4. 對矩陣$\begin{bmatrix}4&9&a\\3&7&b\end{bmatrix}$作列運算若干次後得到$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$，則數對$(a,b)=$？
(A)$(-5,-4)$ (B)(13.10) (C)$(7,16)$ (D)$(1,2)$。 代碼：f51098a1

( ) 5. 方程組$\begin{cases}x-4y+z=2\\3x-5y+2z=5\\x+6y-2z=-1\end{cases}$的增廣矩陣$\begin{bmatrix}1&-4&1&2\\3&-5&2&5\\1&6&-2&-1\end{bmatrix}$經列運算簡化爲矩陣$\begin{bmatrix}\alpha&2&1&3\\0&1&\beta&-1\\0&0&1&\gamma\end{bmatrix}$，則$\alpha+\beta+\gamma=$
(A)-1 (B)2 (C)3 (D)5。 代碼：f51206m1

( ) 6. 下列增廣矩陣所表示的一次方程組何者無限多解? 代碼：f51301m1

(A) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (B) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$ (C) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$

(D) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$。

( ) 7. 設 $a_1, a_2, \ldots, a_9$ 爲等差數列且 k 爲實數。 代碼：r43106c1

若方程組 $\begin{cases} a_1x - a_2y + 2a_3z = k+1 \\ a_4x - a_5y + 2a_6z = -k-5 \\ a_7x - a_8y + 2a_9z = k+9 \end{cases}$ 有解，則 $k=$？

(A) -1 (B) -2 (C) -3 (D) -5。

( ) 8. 設聯立方程組 $\begin{cases} 6x + (a-2)y - 7a + 17 = 0 \\ (a+5)x - 2y + 8a + 24 = 0 \end{cases}$，若此方程組有無限多組解， 代碼：a23087z2

則 a 之值爲 (A) 2 (B) -1 (C) -2 (D) 3。

( ) 9. 設 $\begin{cases} px + 2y = q-2 \\ (2p-1)x + 2y = 0 \end{cases}$ 除了 $(0,0)$ 以外，尚有其他解，求 $p+q=$？ 代碼：a23222m1

(A) 0 (B) -4 (C) 3 (D)以上皆非。

( ) 10. 已知下列聯立方程式 $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$ 無解，則 $k=$？ 代碼：f51086a1

(A) 2 (B) 1 (C) -2 (D) 3。

( ) 11. 設 n 爲正整數，符號 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n$ 代表矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 自乘 n 次， 代碼：f52304m1

令 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$，請選出錯誤的選項

(A) a_1, a_2, a_3 爲等比數列 (B) d_1, d_2, d_3 爲等比數列

(C) b_1, b_2, b_3 爲等差數列 (D) c_1, c_2, c_3 爲等差數列。

( ) 12. 請問下列哪一個選項中的矩陣成績等於$\begin{bmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{bmatrix}$？ 代碼：f52101b1

(A)$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(D)$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (E)$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$。

( ) 13. 設二階方陣$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，則$A+A^2+A^3+\cdots+A^{10}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，求$b=$？ 代碼：f52215m1

(A)-36 (B)-45 (C)-55 (D)-66。

( ) 14. 設A，B，C均爲n階方陣，下列各性質，何者必成立？ 代碼：f52305m1

(A)$(A+B)C=CA+CB$

(B)$(AB)C=A(BC)$

(C)若$A^2=I$則$A=I$或$A=-I$

(D)$(AB)^2=A^2B^2$。

( ) 15. 小惠有一台自行車，平時用一副四位數密碼的號碼鎖鎖住。有一天，志明向他借用這台自行車，他答應借用，但只告訴志明號碼鎖的密碼$abcd$符合以下二階方陣的等式：$\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -10 & 35 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$，志明卻一直無法解出正確的密碼，而不能使用這台自行車。請你(妳)幫忙志明求出這副號碼鎖的正確密碼。 代碼：f53099b1

(A)4589 (B)2153 (C)4173 (D)7321。

( ) 16. 設P、Q、R爲二階方陣，已知$PQ=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$，$PR=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$，且$Q+R=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$，若$P=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$，求$a+b+c+d=$？ 代碼：f53103b1

(A) 5 (B) 7 (C) 9 (D) 11。

( ) 17. 設A，B爲兩個二階方陣，已知$AB=\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$，$AB^2=\begin{bmatrix} 25 & 50 \\ 29 & 46 \end{bmatrix}$，則$B=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$，求$a+b+c+d=$？ 代碼：f53214m1

(A) 12 (B) 10 (C) 8 (D) 6。

( ) 18. 無論x爲任意數，下列何者恆有乘法反方陣？ 代碼：f53303m1

(A)$\begin{bmatrix} 2 & x \\ 2x & 1-x \end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix} x & x+1 \\ -1 & x-3 \end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ -5 & x+2 \end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix} x & x+1 \\ 2 & x \end{bmatrix}$。

( ) 19. 設 x,c 爲實數，方陣 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & x\end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & x\end{bmatrix}$。已知 A 的反方陣恰好是 B 的 c 倍（其中 $c\neq 0$），則數對 $(x,c)=$？（請化爲最簡分數）

(A) $(3,\frac{1}{13})$ (B) $(-3,\frac{1}{3})$ (C) $(2,\frac{1}{7})$ (D) $(-2,\frac{1}{11})$。

代碼：f53105b1

( ) 20. 下表是兩年前三種零食分別在兩間超市的單價：（單位：元／包）

	超市甲	超市乙
蘇打餅	30	28
薯片	55	50
魷魚絲	70	66

上表以單價矩陣 $\begin{bmatrix}30 & 28\\ 55 & 50\\ 70 & 66\end{bmatrix}$ 表示。如果這兩間超市都以每年 3%的比例調漲物品的價格，請問下列哪些選項的計算結果可以代表現在這些零食在這兩間超市的單價矩陣？

(A) $2\cdot(1.03)\cdot\begin{bmatrix}30 & 28\\ 55 & 50\\ 70 & 66\end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix}2\cdot(1.03) & 0 & 0\\ 0 & 2\cdot(1.03) & 0\\ 0 & 0 & 2\cdot(1.03)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30 & 28\\ 55 & 50\\ 70 & 66\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}1.03 & 0 & 0\\ 0 & 1.03 & 0\\ 0 & 0 & 1.03\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30 & 28\\ 55 & 50\\ 70 & 66\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.03 & 0\\ 0 & 1.03\end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix}(1.03)^2 & (1.03)^2 & (1.03)^2\\ (1.03)^2 & (1.03)^2 & (1.03)^2\\ (1.03)^2 & (1.03)^2 & (1.03)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30 & 28\\ 55 & 50\\ 70 & 66\end{bmatrix}$。

代碼：f53104b1

答案：AACBB DDBCC CECBD CBCAC

筆記欄

單元 12　二元一次不等式及其應用

主題一　二元一次不等式的圖形

1.二元一次不等式：

設 a,b,c 為實數，且 $a^2+b^2\neq 0$，則 $ax+by+c>0$、$ax+by+c\geq 0$、$ax+by+c<0$、$ax+by+c\leq 0$，均稱為二元一次不等式。

2.二元一次不等式的圖形：

(1) 設直線 $L: ax+by+c=0$ 且 $a>0$，則：

$ax+by+c>0$ 的圖形為直線 L 的右側半平面。

$ax+by+c\geq 0$ 的圖形為直線 L 的右側半平面及直線 L。

$ax+by+c<0$ 的圖形為直線 L 的左側半平面。

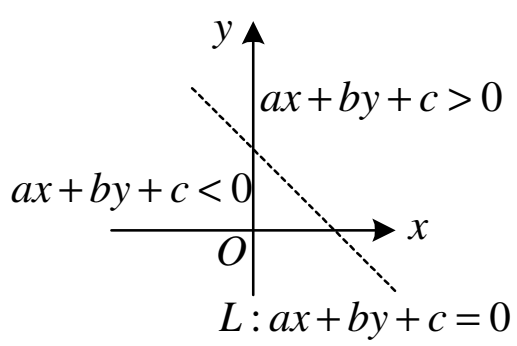
$ax+by+c\leq 0$ 的圖形為直線 L 的左側半平面及直線 L。

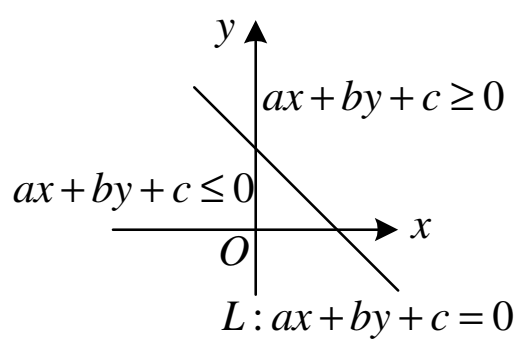
註：❶ 若不等式中 x 項係數 $a<0$ 時，

須先移項整理，使 x 項係數為正數。

❷ 若不等式含等式(表示包含直線)，則圖形以實線畫出，

若不等式不含等式(表示不包含直線)，則圖形以虛線畫出。





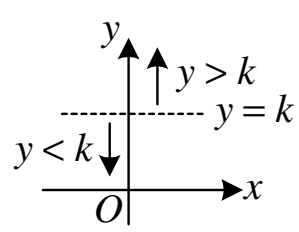
(2) 設直線 $L: y=k$，$k\in R$，則：

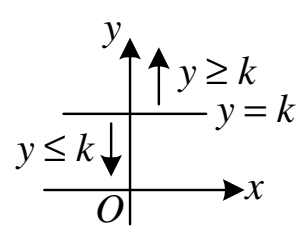
$y>k$ 圖形為直線 L 之上方半平面。

$y\geq k$ 圖形為直線 L 之上方半平面及直線 L。

$y<k$ 圖形為直線 L 之下方半平面。

$y\leq k$ 圖形為直線 L 之下方半平面及直線 L。





老師講解 1

圖示下列二元一次不等式的解：

(1) $3x-2y+6=0$

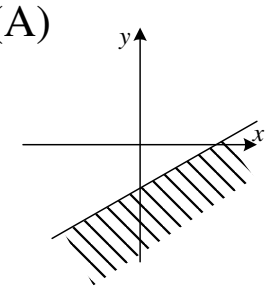
(2) $3x-2y+6\geq 0$

(3) $3x-2y+6<0$

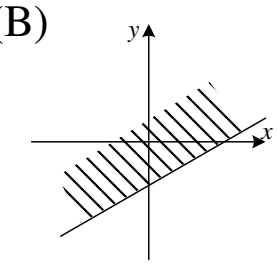
學生練習 1

下列何者可能爲 $3x-4y-12\leq 0$ 之圖形？

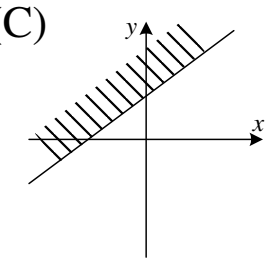
(A)



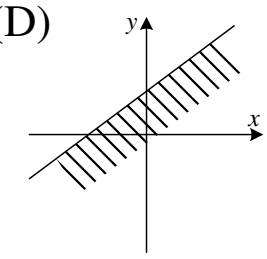
(B)



(C)



(D)



【代碼】a33a01m2

3. 同側、異側的判別：

設直線 $L: ax+by+c=0$，且平面上相異兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$，

(1) A 、 B 兩點在直線 L 之同側 $\Rightarrow$ $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)>0$

(2) A 、 B 兩點在直線 L 之異側 $\Rightarrow$ $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)<0$

註：若 $\overline{AB}$ 與 L 相交(異側或線上) $\Rightarrow$ $(ax_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)\leq 0$

2 老師講解

若兩點 $(3,1)$ 與 $(-4,6)$ 分別在直線 $3x-2y+c=0$ 之相反兩側，求 c 的範圍。

2 學生練習

若兩點 $(1,2)$ 與 $(-1,1)$ 分別在直線 $ax+y-3=0$ 之相反兩側，求 a 的範圍。

【代碼】a33a01m3

3 老師講解

設 $P(2,3)$ ， $Q(-1,2)$ ，若 $\overline{PQ}$ 與直線 $L:x+y+k=0$ 相交，試求 k 之範圍。

3 學生練習

設 $A(3,1)$ ， $B(-4,6)$ ，若 $\overline{AB}$ 與直線 $L:3x-2y+k=0$ 相交，試求 k 之範圍。

【代碼】a33b01m2

4. 二元一次聯立不等式與圖形：

兩個或兩個以上的二元一次不等式並列，其圖形為各二元一次不等式圖解的交集。

4 老師講解

圖示 $\begin{cases} 3x+4y\le 12 \\ 2x-y\ge 4 \end{cases}$ 二元一次不等式的解：

4 學生練習

滿足聯立不等式 $\begin{cases} 2x-3y\ge 6 \\ 2x+5y\le 10 \end{cases}$ 之解的圖形沒有通過第幾象限？

【代碼】a33a02m2

5 老師講解

試求不等式 $\begin{cases} |2x+3y|\le 6 \\ |2x-3y|\le 6 \end{cases}$ 之圖形面積。

5 學生練習

試求不等式 $\begin{cases} |x+y|\le 2 \\ |x-y|\le 2 \end{cases}$ 之圖形面積。

【代碼】a33b02m2

6 老師講解

試求下列各不等式圖形所圍成之面積：

(1) $3|x|+2|y|\le 6$

(2) $3|x+2|+2|y-1|\le 6$

6 學生練習

試求 $3|x-1|+4|y+2|\le 12$ 所圍的積。

【代碼】a33b03m2

【加強題】

1. 試作不等式 $6-2y\le x-2\le y\le 6$ 的圖形，並求此圖形圍成的區域面積_____。

2. 試求$\begin{cases}(x-y-2)(2x+y-4)\le 0\\ -2\le y\le 4\end{cases}$圖形面積=____。

3. 坐標平面上，不等式組$\begin{cases}4x-3y-20\le 0\\ 3x+8y-56\le 0\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$，所表示的區域中，有____個格子點。

【學生練習答案】

1. (B)	2. $a>1$或$a<-2$	3. $-7\le k\le 24$	4. 第二象限
5. 8	6. 24		

回家功課

( ) 1. 已知直線 L 的方程式為 $3x-y=k$。若平面上兩點 $P(-1,1)$、$Q(2,-1)$ 分別在直線 L 的左右側，則 k 的範圍為何？ 代碼：a33104p2
(A) $-4<k<7$ (B) $-7<k<4$
(C) $7<k$ 或 $k<-4$ (D) $4<k$ 或 $k<-7$ 。

( ) 2. 求聯立不等式 $\begin{cases}|x+y|\le 8\\|x-y|\le 8\end{cases}$ 之圖形區域面積為何？ 代碼：a33096s2
(A) 64 (B) 86 (C) 100 (D) 128 。

( ) 3. 在坐標平面上，滿足不等式組 $5x+2y\le 180$、$x+y\le 45$、$x\ge 0$、$y\ge 0$ 的區域面積為何？ 代碼：a33094s1
(A) 270 (B) 675 (C) 945 (D) 1620 。

答案：ADC

主題二　線性規劃

(1) ①將題目中的限制條件用二元一次不等式聯立來表示。

②以線性函數 $f(x,y)$ 表示題目中所要達成的目標(目標函數)。

(2) 圖解二元一次不等式聯立圖形，並找出可行解區域。

(3) 求出目標函數 $f(x,y)$ 的最大值與最小值。

1　老師講解

已知 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x-3y+9 \geq 0 \\ 2x+y-10 \leq 0 \end{cases}$，試求：

(1)所圍成圖形的面積

(2) $f(x,y)=x-2y+1$ 的最大值與最小值

1　學生練習

若滿足不等式 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x+3y-12 \leq 0 \\ 2x+y-8 \leq 0 \end{cases}$ 之條件，

試求 $f(x,y)=3x+2y$ 的極大值。

【代碼】a33a03m2

老師講解 2

有一建築用地總面積3000平方公尺，以總成本不超過2000萬元的經費下建築甲、乙兩種不同形式的住宅，已知甲形式住宅每棟佔地200平方公尺，造價400萬元，可獲利200萬元，乙形式住宅每棟佔地300平方公尺、造價100萬元、獲利250萬元，則在此建築此兩種住宅，試求總共最多可獲利多少元。

學生練習 2

設工廠製造一單位的甲產品需 A 原料2斤，B 原料4斤；製造一單位的乙產品需 A 原料6斤，B 原料2斤。而此工廠每月配料爲 A 原料200斤，B 原料100斤；若甲產品每單位利潤600元，乙產品每單位利潤1000元，試求此工廠最大獲利。

【代碼】a33b05m2

3 老師講解

設有甲、乙兩種食物，甲每份價格40元，乙每份價格30元。甲每份含 A 營養素10單位，B 營養素15單位；乙每份含 A 營養素20單位，B 營養素10單位。若每人一天至少需要 A 營養素80單位，B 營養素60單位，在費用最少的原則下，應如何安排甲、乙兩種食物的單位量以獲得足夠的營養？

3 學生練習

根據研究，每個人每週至少需要 A,B,C 三種營養素分別爲26單位、30單位、30單位。今有甲、乙兩種食物，其價格每公斤各爲200元與300元，甲食物每公斤含有 A,B,C 三種營養素分別爲1單位、3單位、1單位，而乙食物每公斤含有 A,B,C 三種營養素分別爲3單位、1單位、5單位，試問每個人每週能維持最低的營養標準，而費用最低爲多少？

【代碼】a33b06m2

【學生練習答案】

1. 13	2. 36000元	3. 3400	

回家功課

( ) 1. 若$5|x+2|+2|y-3|\le 10$之條件下，求$2x+y$之最大值爲 (A)-2 (B)1 (C)3 (D)4 。 代碼：a33b04m1

( ) 2. 在座標平面上，在$|x-1|+|y-3|\le 2$的平面區域中，$x+2y$的最大值為何？ (A)3 (B)5 (C)9 (D)11 。 代碼：a33097s1

( ) 3. 在$x\ge 0$，$y\ge 0$，$3x+y\le 30$，$x+2y\le 20$的條件下，函數$4x+y$的最大值為何? (A)30 (B)38 (C)40 (D)80 。 代碼：a33092s1

( ) 4. 兩種款式的毛織品，
每一件A款式毛織品的製作需用紅色毛線40公尺，白色毛線30公尺，利潤40元；每一件B款式毛織品的製作需用紅色毛線20公尺，白色毛線30公尺，利潤25元。現有紅色毛線800公尺，白色毛線900公尺，全部均可使用，問最大利潤為何？
(A)800元 (B)900元 (C)1000元 (D)1200元 。 代碼：a33099p2

( ) 5. 設有甲、乙兩種食物，甲每份價格20元，乙每份價格10元。甲每份含A營養素5單位，B營養素10單位；乙每份含A營養素20單位，B營養素15單位。若每人一天至少需要A營養素50單位，B營養素60單位，在費用最少的原則下，應如何安排甲、乙兩種食物的單位量以獲得足夠的營養？
(A)甲0，乙4 (B)甲10，乙0 (C)甲$\frac{18}{5}$，乙$\frac{8}{5}$ (D)甲$\frac{13}{5}$，乙$\frac{13}{5}$ 。 代碼：a33089s1

答案：DDCBA

歷屆試題

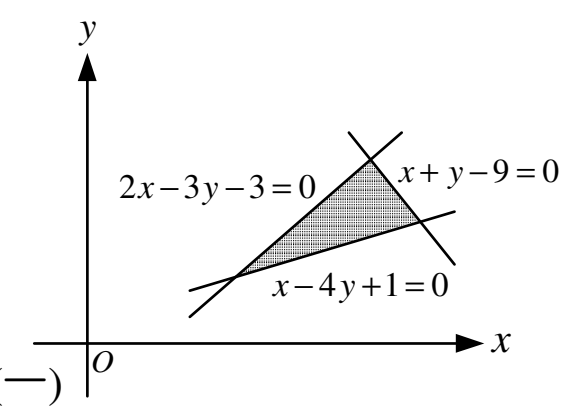
( ) 1. 在直角坐標平面上，設點$(1,b)$滿足不等式$ax+3y-6\geq 0$，則數對(a,b)可爲下列何者？ (A)$(1,1)$ (B)$(-5,5)$ (C)$(-1,-1)$ (D)$(5,-5)$。 代碼：a33100s1 (100 年統測 B)

( ) 2. 設a、b爲實數，若一元二次不等式$ax^2+x+b>0$的解集合爲$\{x\mid -\frac{1}{5}<x<\frac{2}{3}, x\text{為實數}\}$，則$2a+b=$？ (A)$-5$ (B)-4 (C)4 (D)5。 代碼：a31100k1 (100 年統測 C)

( ) 3. 下列二元一次聯立不等式中，何者代表圖(一)所示之三角區域？ 代碼：a33100k1 (100 年統測 C)

(A)$\begin{cases} x-4y+1\leq 0 \\ 2x-3y-3\geq 0 \\ x+y-9\leq 0 \end{cases}$ (B)$\begin{cases} x-4y+1\leq 0 \\ 2x-3y-3\leq 0 \\ x+y-9\leq 0 \end{cases}$

(C)$\begin{cases} x-4y+1\geq 0 \\ 2x-3y-3\geq 0 \\ x+y-9\geq 0 \end{cases}$ (D)$\begin{cases} x-4y+1\geq 0 \\ 2x-3y-3\leq 0 \\ x+y-9\leq 0 \end{cases}$。



圖(一)

( ) 4. 已知點Q爲二元一次聯立不等式$\begin{cases} 2x+3y+6\geq 0 \\ 5x-4y+20<0 \end{cases}$圖形上的一點，則$Q$之坐標可能爲下列何者？ (A)$(-5,0)$ (B)$(-2,0)$ (C)$(0,5)$ (D)$(0,6)$ 代碼：a33101s1 (101 年統測 B)

( ) 5. 在$x\geq 0$，$y\geq 1$，$x+y\leq 2$的條件下，$2x-y$的最大值爲何？ (A)-2 (B)-1 (C)1 (D)2。 代碼：a33101k1 (101 年統測 C)

( ) 6. 受制於$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+y\leq 3 \\ 2x+y\leq 4 \end{cases}$的條件下，求$f(x,y)=x+3y$的最大值。 代碼：a33102k1 (102 年統測 C)

(A)0 (B)7 (C)9 (D)12。

( ) 7. 設$x\geq -1$且$y\geq -2$，求共有幾組整數解(x,y)滿足方程式$x+y=2014$？ (A)2018 (B)2019 (C)2020 (D)2021。 代碼：a33103s1 (103 年統測 B)

( ) 8. 在聯立不等式組$x\geq 0$，$y\geq 0$，$2x+y-6\leq 0$，$x+2y-6\leq 0$的可行解區域中，x、y均爲整數解的點坐標(x,y)共有多少個？ (A)8 (B)9 (C)11 (D)無限多個。 代碼：a33103k1 (103 年統測 C)

( ) 9. 在聯立不等式$\begin{cases}2x-y\ge 0\\x+3y\le 7\\x-4y\le 0\end{cases}$的條件下，目標函數$f(x,y)=2x-3y-2$的最大值爲$M$，最小值爲$m$，則$M+m=$？ (A)$-5$ (B)-3 (C)3 (D)5。 代碼：a33104k1 (104 年統測 C)

( )10. 滿足二元一次聯立不等式$\begin{cases}x+y\le 4\\3x-y\le 6\\5x+2y\ge 10\end{cases}$的整數解$(x,y)$共有幾個？ (A)$3$ (B)4 (C)5 (D)6。 代碼：a33105k1 (105 年統測 C)

( )11. 在滿足二元一次聯立不等式$\begin{cases}x\ge 1\\y\ge 0\\x-y\le 3\\x+y\le 4\end{cases}$的條件下。若$3x-5y$的最大值及最小值分別爲$M$及$m$，則$M+m$之值爲何? (A)$-9$ (B)-4 (C)-3 (D)3。 代碼：a33107s1 (107 年統測 B)

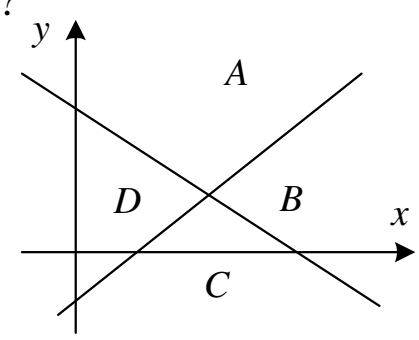
( )12. 坐標平面上滿足不等式$\begin{cases}2x+y\le 10\\x+2y\le 8\\x\ge 0,y\ge 0\end{cases}$的區域面積爲何? (A)12 (B)13 (C)15 (D)16。 代碼：a33107k1 (107 年統測 C)

( )13. 設(x,y)滿足$y\ge 0$、$0\le x\le 4$、$-2\le x-2y\le 2$，試問$f(x,y)=x-y$之最大值爲何? (A)1 (B)2 (C)3 (D)4。 代碼：a33108s1 (108 年統測 B)

( )14. 有兩條直線$L_1:3x-5y=2$、$L_2:x+2y=3$將平面分成四個區域，如圖所示，試問區域A可用哪一組不等式表示? 代碼：a33108k1 (108 年統測 C)

(A)$\begin{cases}3x-5y\ge 2\\x+2y\ge 3\end{cases}$ (B)$\begin{cases}3x-5y\le 2\\x+2y\ge 3\end{cases}$

(C)$\begin{cases}3x-5y\ge 2\\x+2y\le 3\end{cases}$ (D)$\begin{cases}3x-5y\le 2\\x+2y\le 3\end{cases}$。

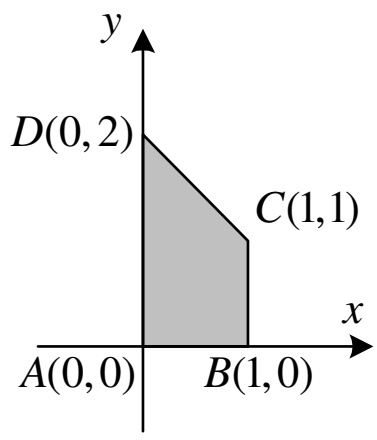


( ) 15. 某家口罩工廠擁有5台A型機器和3台B型機器來製造口罩，平時每日總產量爲11070個口罩。今因應肺炎疫情日趨嚴重，緊急添購3台A型機器和9台B型機器，並提高所有機器的每日產能至原先的150%，使得該工廠每日總產量增爲42120個口罩，試問一台A型機器原先的每日產能爲多少個？ (A)1350 (B)1380 (C)1410 (D)1440 。 代碼：a23109k1 (109 年統測 C)

(　　) 16. 如圖(三)所示，四邊形 $ABCD$ 的四個頂點爲 $A(0,0)$ 、 $B(1,0)$ 、 $C(1,1)$ 及 $D(0,2)$ ，則四邊形 $ABCD$ 區域爲下列哪一個聯立不等式的圖解？ 代碼：a33109s1 (109 年統測 B)

(A) $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2 \\ x+2y\le 2 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y \\ 2x+y\le 2 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1 \\ x+y\le 2 \end{cases}$　(D) $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y \\ x+y\le 2 \end{cases}$ 。



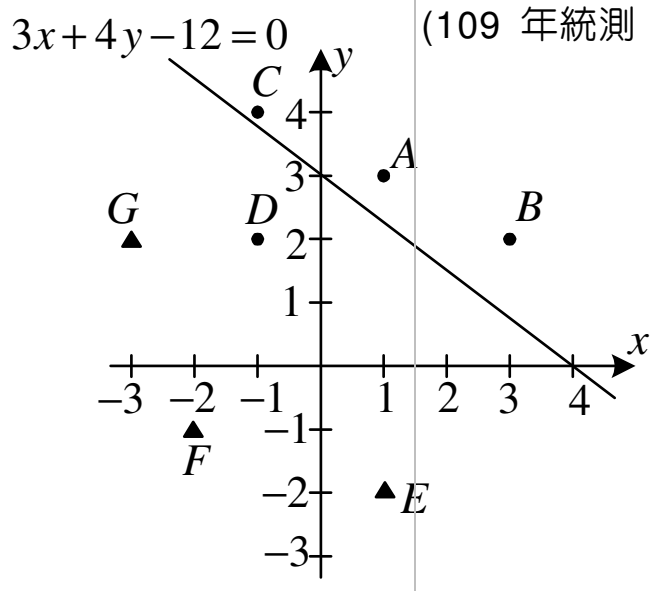
(　　) 17. 在 $\begin{cases} x+2y-6\ge 0 \\ x+y-10\le 0 \\ 2\le x\le 9 \end{cases}$ 的條件下，求其可行解區域的面積(平方單位)爲何? 代碼：a33109k1 (109 年統測 C)

(A) $\frac{119}{4}$　(B) $\frac{59}{2}$　(C) $\frac{117}{4}$　(D) $\frac{55}{2}$ 。

(　　) 18. 在人工智慧的分類技術中，用到以直線分類不同物件的概念。設平面上有七個點 $A(1,3)$ 、 $B(3,2)$ 、 $C(-1,4)$ 、 $D(-1,2)$ 、 $E(1,-2)$ 、 $F(-2,-1)$ 、 $G(-3,2)$ 分屬●、▲二類，其中直線 $L:3x+4y-12=0$ 未能將它們正確分類，如圖(三)標示。若將 L 平行移動至新的位置成爲新直線 L_1 且能達到正確分類目的，則下列何者可爲 L_1 的直線方程式？ 代碼：g13109k1 (109 年統測 C)

(A) $3x+4y+2=0$　(B) $3x+4y-6=0$

(C) $6x+8y+3=0$　(D) $6x+8y-3=0$ 。



(　　) 19. 下列數對 (x,y) 何者滿足聯立不等式 $\begin{cases} 100x+2y-100\ge 0 \\ 2x+100y+100\le 0 \end{cases}$? 代碼：110tcb03 (110 年統測 B)

(A) $(0,0)$　(B) $(1,1)$　(C) $(2,1)$　(D) $(2,-2)$ 。

(　　) 20. 若小林準備 600 萬元投資股票 x 萬元及債券 y 萬元，而投資股票金額不會低於債券金額的 2 倍，則下列何者爲題意之限制條件？ 代碼：110tcb18 (110 年統測 B)

(A) $\begin{cases} x+y\le 600 \\ x\ge 2y \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} x+y\le 600 \\ 2x\ge y \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$　(C) $\begin{cases} x+y>600 \\ x\ge 2y \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$　(D) $\begin{cases} x+y>600 \\ 2x\ge y \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ 。

( ) 21. 小蘇爲了瘦身，每餐攝取的熱量及糖量均不能超過 400 大卡及 20 克。今天小蘇去便利商店打算購買 A 食品或 B 食品各若干份，其中 A 食品標示一份 100 大卡及 8 克的糖量，B 食品標示一份 150 大卡及 6 克的糖量。試問小蘇這一餐可以怎麼搭配，來符合所設定的每餐攝取量？
(A)A 食品 3 份，B 食品 0 份 (B)A 食品 2 份，B 食品 1 份
(C)A 食品 0 份，B 食品 3 份 (D)A 食品 1 份，B 食品 2 份 。

代碼：111tcb19
(111 年統測 B)

( ) 22. 一家具公司有 60 個書櫃，存放於桃園 20 個及雲林 40 個。從桃園送到台北及台南的運費各爲每個書櫃 200 元及 400 元，而雲林送到台北及台南的運費各爲每個書櫃 600 元及 300 元。該公司收到兩筆訂單，要送到台北 30 個以及台南 20 個。試問該公司運送書櫃的最少運費爲多少元？ (A)12000 (B)16000 (C)18000 (D)20000 。

代碼：111tcb24
(111 年統測 B)

( ) 23. 坐標平面上，若點 $A(a,-6)$ 在直線 $L: 2x-y+12=0$ 之右半平面，則下列何者爲 a 的可能值？
(A) -15 (B) -12 (C) -10 (D) -7 。

代碼：111tcc06
(111 年統測 C)

答案：BBADC CACBB CBCBA DADDA DBD

綜合練習

( ) 1. 若 $A(-4,6)$ ， $B(3,1)$ 且 $\overline{AB}$ 線段與直線 $3x-2y+k=0$ 相交，則 代碼：a33214m1
(A) $-7<k<24$ (B) $-7\le k\le 24$ (C) $-1<k<23$ (D) $-1\le k\le 23$ 。

( ) 2. 已知 x,y 均爲實數且滿足不等式 $x\ge 0$ ， $y\ge 0$ ， $4x+3y\ge 18$ ， $x+3y\ge 9$ ，則 $x+y$ 的最小值爲 代碼：a33091k1
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 9 。

( ) 3. 在坐標平面上，不等式 $\dfrac{x+y-6}{2x-y-6}\le 0$ 的解集合中滿足 $0\le x\le 6$ ， $0\le y\le 2$ 區域的面積爲多少？ (A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 。 代碼：a33090s1

( ) 4. 在坐標平面上，滿足不等式 $|x|\le y\le 8$ 的區域面積爲何？ 代碼：a33094k1
(A) 16 (B) 32 (C) 64 (D) 128 。

( ) 5. 若二元一次聯立不等式 $\begin{cases}0\le y\le 1\\ x+y\le a\\ x\ge 0\end{cases}$ ，在坐標平面圍成的封閉區域爲 T ， 且 T 的面積爲 $\dfrac{1}{2}$ ，則 a 之值爲何？ 代碼：a33105w2
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

( ) 6. 某表演聽可售票座位，其售價有 600 元及 1000 元兩種價位，且 600 元價位之座位有 500 席、1000 元價位之座位有 300 席。已知某日售出 600 元票 x 張、1000 元票 y 張，且 $x\ge 3y$ 、 $x+y\le 500$ ，則此日售票所得金額的最大值爲多少元？ 代碼：a33104p1
(A) 300000 (B) 350000 (C) 400000 (D) 500000 。

( ) 7. 據營養學家的研究，每個人每週至少需要 12 單位的蛋白質，9 單位的醣與 8 單位的脂肪。今有甲、乙兩種食物，其價格每公斤各爲 100 元與 30 元，甲食物每公斤含有 4 單位的蛋白質、2 單位的醣以及 1 單位的脂肪，而乙食物每公斤含有 1 單位的蛋白質、1 單位的醣以及 2 單位的脂肪。試問每個人每週能維持最低的營養標準，而費用最低爲多少? 代碼：a33209m1
(A) 330 (B) 360 (C) 200 (D) 700 元。

( ) 8. 某汽車公司擁有甲、乙兩家工廠，生產 A 、 B 兩種不同型的汽車，若甲廠每天可完成 10 台 A 型的汽車與 20 台 B 型的汽車，乙廠每天可完成 30 台 A 型的汽車與 10 台 B 型的汽車。如果公司要製造 150 台 A 型汽車與 100 台 B 型汽車，則兩工廠各工作幾天，才能使兩工廠所花費的工作天數之和最少？ 代碼：a33102w2
(A)甲廠 0 天，乙廠 10 天 (B)甲廠 1 天，乙廠 6 天
(C)甲廠 15 天，乙廠 0 天 (D)甲廠 3 天，乙廠 4 天。

答案：BBACA BAD

單元 13　二次曲線

主題一　拋物線

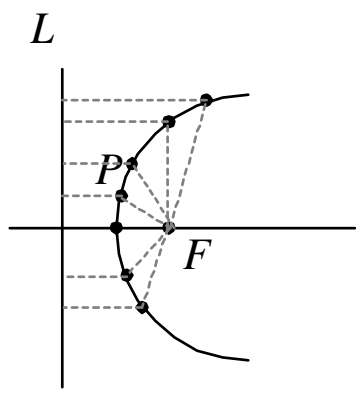
1. 定義：

在平面上與一定點 F 與一定直線 L 等距離的所有動點所成的圖形稱為拋物線。

即滿足 $\overline{PF}=d(P,L)$ 之所有 P 點所形成的軌跡圖形，

其中，定直線 L 稱為此拋物線的準線，

定點 F 稱為此拋物線的焦點。



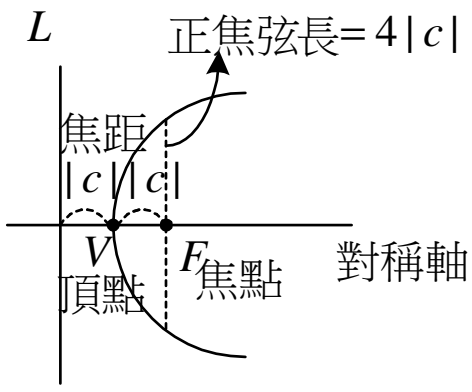
2.拋物線的名詞：

(1) **對稱軸**：過焦點 F 與準線 L 垂直的直線，簡稱為軸。

(2) **頂點**：軸與拋物線之交點 V，稱為此拋物線的頂點。

(3) **焦距**：焦點到頂點的距離 $|c|$。

(4) **正焦弦**：過焦點與對稱軸垂直的弦。



老師講解

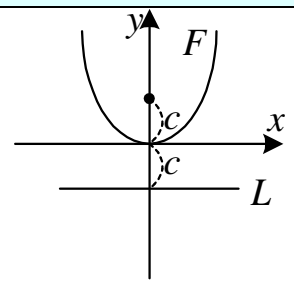
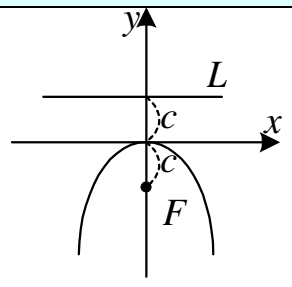
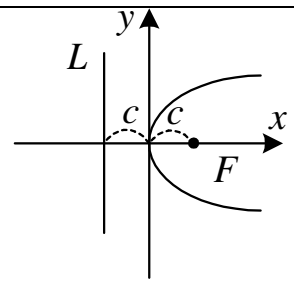
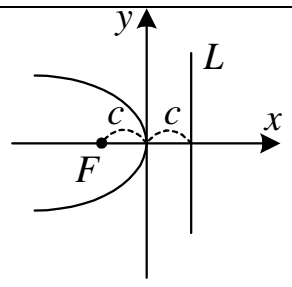
已知一拋物線的焦點爲 $(1,1)$，準線爲 $x+y-6=0$，求其正焦弦長。

學生練習

已知一拋物線的焦點爲 $(1,-1)$，準線爲 $x-y+2=0$，求其正焦弦長。

【代碼】g31a01m2

3.拋物線的標準式：

方程式	頂點	焦點	準線	正焦弦長	對稱軸	$c>0$	$c<0$
$x^2=4cy$	$(0,0)$	$(0,c)$	$y=-c$	$4\lvert c\rvert$	$x=0$		
$y^2=4cx$	$(0,0)$	$(c,0)$	$x=-c$	$4\lvert c\rvert$	$y=0$		

【基本練習】

求下列拋物線之頂點、焦點、準線、正焦弦長

(1) $y^2=8x$　(2) $x^2=-12y$

老師講解

試求拋物線方程式 $(x-4)^2=4(y+3)$ 之頂點、焦點、準線、正焦弦長、對稱軸。

學生練習

試求拋物線方程式 $(y+2)^2=8(x-1)$ 之頂點、焦點、準線、正焦弦長。

【代碼】g31a02m3

3 老師講解

試求拋物線方程式 $y^2+8y+4x-4=0$ 之頂點、焦點、準線、正焦弦長、對稱軸。

3 學生練習

試求拋物線方程式 $x^2-4x-8y-20=0$ 之頂點、焦點、準線、正焦弦長、對稱軸。

【代碼】g31b01m2

4 老師講解

已知一拋物線的焦點 $F(-1,3)$，準線 $L: y+1=0$，求此拋物線方程式。

4 學生練習

試求焦點 $F(0,-2)$，準線 $L: y-2=0$ 之拋物線方程式。

【代碼】g31a03m2

5 老師講解

拋物線的焦點爲 $(2,1)$，頂點爲 $(3,1)$，求此拋物線方程式。

5 學生練習

試求頂點 $V(0,0)$，焦點 $F(5,0)$ 之拋物線方程式。

【代碼】g31a03m3

6 老師講解

已知一拋物線之頂點爲 $(-1,0)$，且過點 $(2,6)$，其準線平行 y 軸，試求此拋物線方程式。

6 學生練習

已知一拋物線之頂點爲 $(2,1)$，且過點 $(-2,-1)$，其準線平行 x 軸，試求此拋物線方程式。

【代碼】g31b02m2

4.拋物線的一般式：

(1) 上下型(軸平行 y 軸)，其方程式可設為 $y=ax^2+bx+c$

(2) 左右型(軸平行 x 軸)，其方程式可設為 $x=ay^2+by+c$

7 老師講解

設拋物線其對稱軸平行 x 軸，且過 $(3,0)$，$(1,1)$，$(7,-1)$ 三點，試求此拋物線。

7 學生練習

試求過 $(0,3)$，$(1,4)$，$(2,9)$ 三點，且其對稱軸與 y 軸平行之拋物線方程式。

【代碼】g31a04m2

8 老師講解

設拋物線 $x^2-3x+6y-4=0$ 與 x 軸交於 A 與 B 兩點，則 $\overline{AB}$ 等於？

8 學生練習

設拋物線 $x^2-6x+y+4=0$ 與 $2x-y-1=0$ 交 A、B 兩點，求 $\overline{AB}$ 之長。

【代碼】g31b03m2

9 老師講解

試求拋物線 $y^2=8x$ 上的動點 P 到直線 $x+y+8=0$ 的最短距離？

9 學生練習

試求拋物線 $x^2=2y$ 上的點，與 $A(0,3)$ 的最短距離？

【代碼】g31251m1

【加強題】

1. 設拋物線對稱軸爲 $x-1=0$，且過兩點 $(0,0)$，$(3,12)$，求此拋物線方程式爲_____。

2. 坐標平面上有一以點 $V(0,3)$ 爲頂點，$F(0,6)$ 爲焦點的拋物線，設 $P(a,b)$ 爲此拋物線上一點，$Q(a,0)$ 爲 P 在 x 軸上的投影，滿足 $\angle FPQ=60^\circ$，則 $b=$_____。

3. 在拋物線 $y^2=4x$ 上有一動點 P ， P 至準線 L 的距離爲 a ， P 至頂點 V 的距離爲 b ，求 $|a-b|$ 之最大值=_____。。

【學生練習答案】

1. $4\sqrt{2}$	2. 頂點 $(1,-2)$ 焦點 $(3,-2)$ 準線 $x=-1$ 正焦弦長 $=4\|c\|=8$		
3. 頂點 $(2,-3)$ 焦點 $(2,-1)$ 準線 $y=-5$ 正焦弦長 $=4\|c\|=8$ 對稱軸 $x=2$			
4. $x^2=-8y$	5. $y^2=20x$	6. $(x-2)^2=-8(y-1)$	7. $y=2x^2-x+3$
8. $2\sqrt{5}$	9. $\sqrt{5}$		

回家功課

( ) 1. 拋物線方程式 $x^2-4x-8y-12=0$，則下列敘述何者不成立？ 代碼：g31207m1
(A)軸平行於 y 軸 (B)頂點為 $(2,-2)$
(C)準線方程式為 $y+1=0$ (D)正焦弦長為 8 。

( ) 2. 已知點 $A(5,6)$ 在拋物線 $(x-1)^2=4(y-2)$ 上，則點 A 與此拋物線上之焦點的距離為何？ 代碼：g31091k1
(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 。

( ) 3. 若拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 的準線為 $y=1$，焦點為 $(2,2)$，則 $a+b+c$ 之值為 代碼：g31210m1
(A) 2 (B) $\frac{13}{2}$ (C) $\frac{15}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$ 。

( ) 4. 在坐標平面上，若將二次曲線 $(x+1)^2=4y$ 向 x 軸正方向平移 2，再向 y 軸正方向平移 1，則平移後的方程式為何？ 代碼：g31094k1
(A) $(x+3)^2=4(y+1)$ (B) $(x-1)^2=4(y-1)$
(C) $(x+1)^2=4y-1$ (D) $(x-3)^2=4y+1$ 。

( ) 5. 設拋物線方程式為 $y^2-4x-2y+9=0$，已知拋物線與直線 $x=3$ 相交於 A,B 兩點，求 $\overline{AB}=$？ 代碼：g31090k1
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 。

( ) 6. 設 $f(x)=2x^2+4x+k$ 的圖形相交 x 軸於 P、Q 兩點，若 P、Q 之間的距離為 2，則 k 值 代碼：g31221m1
(A) -2 (B) -4 (C) 1 (D) 0 。

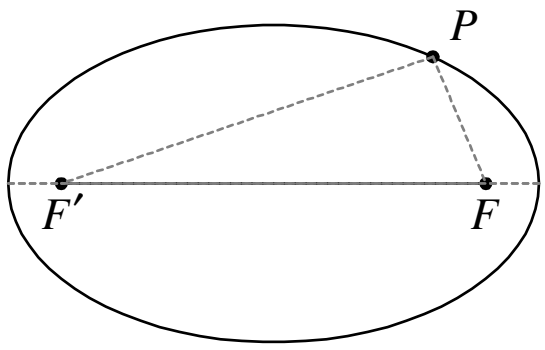
( ) 7. 已知拋物線之焦點為 $(2,3)$，準線為 $x-4y+3=0$，則其正焦弦長為 代碼：g31212m1
(A) $\frac{7}{\sqrt{17}}$ (B) $\frac{14}{\sqrt{17}}$ (C) $\frac{28}{\sqrt{17}}$ (D)以上皆非 。

答案：CDABB DB

主題二　橢圓

1.定義：

設平面上兩定點 F , F' ，且 $\overline{FF'}=2c$ ，若平面上一點 P 到 F , F' 的距離和為一定值 $2a$ ，即滿足 $\overline{PF}+\overline{PF'}=2a$ ($2a>2c$)，則所有動點 P 點所形成的軌跡圖形稱為橢圓。



2.橢圓的名詞：

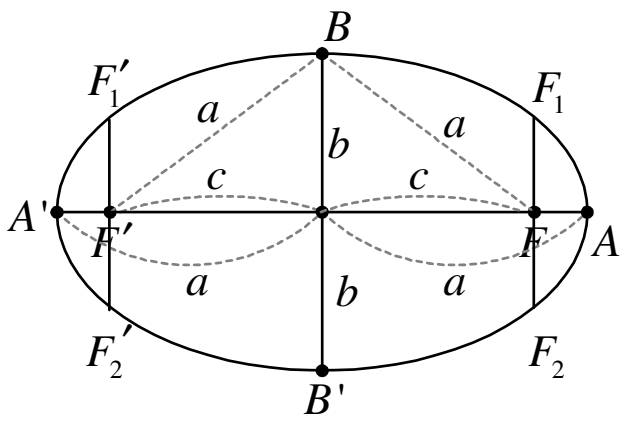
(1) 焦點：兩定點 F , F' 。

(2) 中心：$\overline{FF'}$ 的中點 O 。

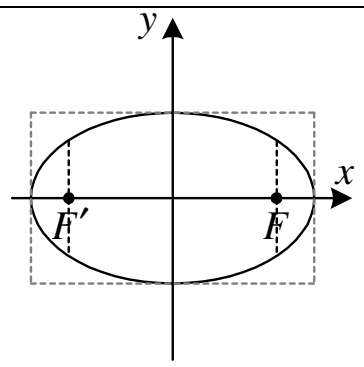
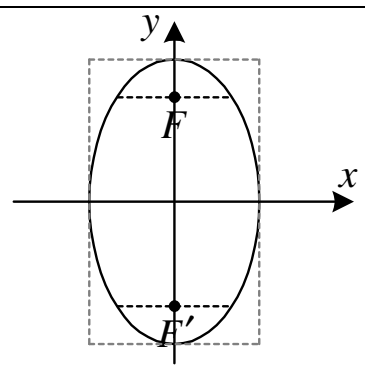
(3) 長軸：$\overline{AA'}$ ，長軸頂點 A 、 A' ，長軸長 $\overline{AA'}=2a$ 。

(4) 短軸：$\overline{BB'}$ ，短軸頂點 B 、 B' ，短軸長 $\overline{BB'}=2b$ 。

(5) 正焦弦：過焦點與長軸垂直的弦($\overline{F_1F_2}$ 、 $\overline{F_1'F_2'}$)。



3.橢圓的標準式：

方程式	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $(a>b>0)$
圖形		
中心	$(0,0)$	$(0,0)$
長軸頂點	$(\pm a,0)$	$(0,\pm a)$
短軸頂點	$(0,\pm b)$	$(\pm b,0)$
焦點	$(\pm c,0)$	$(0,\pm c)$
長軸	$2a$	$2a$
短軸	$2b$	$2b$
正焦弦長	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
關係式	$a^2=b^2+c^2$	$a^2=b^2+c^2$

【基本練習】

已知橢圓方程式 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，試求其中心、焦點、長軸長、短軸長、正焦弦長。

1 老師講解

已知橢圓方程式 $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$，試求其中心、焦點、長軸長、短軸長、正焦弦長。

1 學生練習

已知橢圓方程式 $\frac{(x-2)^2}{169}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$，試求其中心、焦點、長軸長、短軸長、正焦弦長。

【代碼】g32a02m3

2 老師講解

已知橢圓方程式 $4x^2+9y^2+16x-54y+61=0$，試求其中心、焦點、長軸長、短軸長、正焦弦長。

2 學生練習

已知橢圓方程式 $4x^2+y^2+40x-16y+148=0$，試求其中心、焦點、長軸長、短軸長、正焦弦長。

【代碼】g32b01m2

3 老師講解

設橢圓之二焦點爲 $(-1,3)$ ， $(5,3)$ ，
長軸之端點爲 $(-2,3)$ ，求其方程式。

3 學生練習

已知一橢圓的二焦點爲 $(2,1)$ 與 $(6,1)$ ，
長軸長爲10 ，求其方程式。

【代碼】g32a03m2

4 老師講解

已知橢圓一焦點 $(4,0)$ ，短軸在 $y=2$ 上
且長軸長爲12 ，求其方程式。

4 學生練習

已知橢圓一焦點 $(3,0)$ ，短軸在 y 軸，
且長軸長爲8 ，求其方程式。

【代碼】g32a03m3

5 老師講解

若 x, y 均爲實數，且 $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}=10$，則求滿足 (x, y) 之方程式。

5 學生練習

求在平面上，至兩定點 $A(2,5)$ 、 $B(2,-3)$ 距離之和恆等於10之軌跡方程式。

【代碼】g32a03m4

6 老師講解

若 $P(x, y)$ 在橢圓 $9x^2+16y^2=144$ 上，求 P 至直線 $x-y+7=0$ 距離最大值。

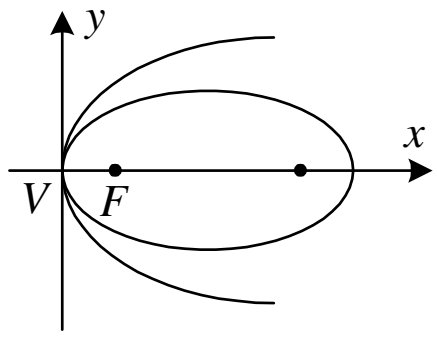
6 學生練習

若 $P(x, y)$ 在橢圓 $x^2+9y^2=9$ 上，求 P 至直線 $x-4y+12=0$ 距離最大值。

【代碼】g32b03m2

【加強題】

如圖，拋物線 $y^2=2x$ 的頂點 V 與焦點 F 正好是另一個橢圓的頂點與焦點，若此橢圓短軸的長度是 3，則橢圓長軸的長度是 5 。



【學生練習答案】

1. 中心 $(2,1)$ 、焦點 $(14,1)$ 、$(-10,1)$ 、長軸長 $=2a=26$ 、短軸長 $=2b=10$ 、正焦弦長 $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{50}{13}$		
2. 中心 $(-5,8)$ 、焦點 $(-5,8+2\sqrt{3})$ 、$(-5,8-2\sqrt{3})$ 、長軸長 $=8$ 、短軸長 $=4$ 、正焦弦長 $=2$		
3. $\dfrac{(x-4)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{21}=1$	4. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$	
5. $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$	6. $\sqrt{17}$	

回家功課

( ) 1. 橢圓 $\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$，試判斷下列何者為誤？ (A)中心 $(-2,1)$ (B)長軸長為10 (C)長軸頂點 $(2,1)$，$(-6,1)$ (D)正焦弦長為 $\frac{32}{5}$ 。 代碼：g32203m1

( ) 2. 橢圓 $4x^2+9y^2+8x-18y-23=0$ 的兩焦點為 F_1、F_2，且 P 為橢圓上一點，則 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=$ (A) $2\sqrt{13}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) 4 (D) 6 。 代碼：g32207m1

( ) 3. 橢圓 $9x^2+25y^2-18x+100y=116$ 之中心為圓心，短軸為直徑所作之圓的方程式為
(A) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ (B) $x^2+y^2-2x+4y-9=0$
(C) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ (D) $x^2+y^2-2x+4y-31=0$ 。 代碼：g32208m1

( ) 4. 已知一橢圓的焦點座標為 $(0,2)$，$(0,-2)$，短軸長為8，求橢圓方程式？
(A) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$ (B) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}=1$ (C) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$ (D) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ 。 代碼：g32090k1

( ) 5. 橢圓兩焦點為 $(1,1)$，$(-3,1)$，且 $(2,1)$ 為橢圓之一頂點，則橢圓方程式
(A) $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{5}=1$ (B) $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$
(C) $\frac{(x+1)^2}{5}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ (D) $\frac{(x+1)^2}{24}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ 。 代碼：g32212m1

( ) 6. 在坐標平面上，兩固定點坐標分別為 $A(4,0)$、$B(-4,0)$，若某可移動點 P，滿足 $\overline{PA}+\overline{PB}=10$ 之關係，則 P 所形成之軌跡為
(A) $9x^2+25y^2=225$ (B) $9x^2-25y^2=225$
(C) $x^2-y^2=25$ (D) $x^2+y^2=25$ 。 代碼：g32213m1

( ) 7. 若 x, y 均為實數，且 $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}=10$，則 (x, y) 恆滿足下列哪一個方程式？
(A) $\frac{(x-4)^2}{16}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$ (B) $\frac{(x-4)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{9}=1$
(C) $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$ (D) $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ 。 代碼：g32091k1

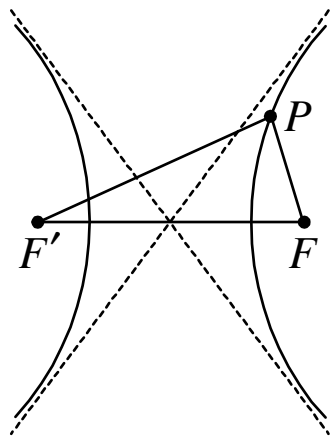
( ) 8. 橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上之任一點與原點及 $(4,0)$ 為三頂點所形成之最大三角形面積為 (A) 8 (B) $\frac{9}{2}$ (C) 6 (D) $\frac{25}{2}$ 。 代碼：g32087x1

答案：CDABA ACC

主題三　雙曲線

1.定義：

設平面上兩定點 F , F' ，且 $\overline{FF'}=2c$ ，若平面上一點 P 到 F , F' 的距離差之絕對值為一定值 $2a$ ，即滿足 $|\overline{PF}-\overline{PF'}|=2a\,(2a<2c)$，則所有動點 P 點所形成的軌跡圖形稱為雙曲線。



2.雙曲線的名詞：

(1) 焦點：兩定點 F , F' 。

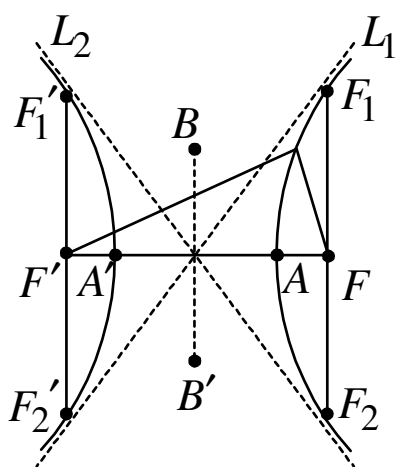
(2) 中心：$\overline{FF'}$ 的中點 O 。

(3) 貫軸：$\overline{AA'}$ ，貫軸頂點 A 、 A' ，貫軸長 $\overline{AA'}=2a$ 。

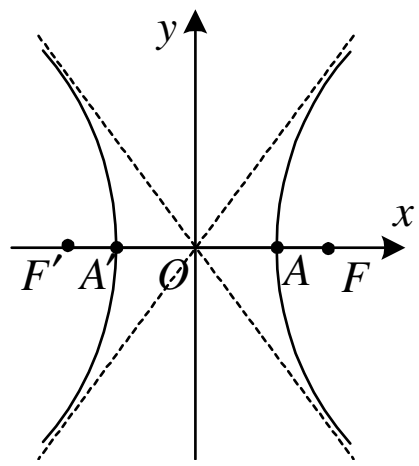
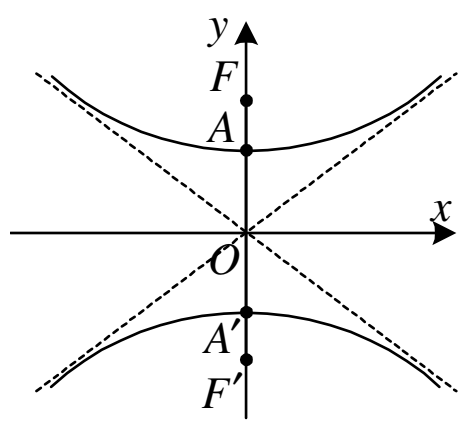
(4) 共軛軸：$\overline{BB'}$ ，共軛軸頂點 B 、 B' ，共軛軸長 $\overline{BB'}=2b$ 。

(5) 正焦弦：過焦點與貫軸垂直的弦($\overline{F_1F_2}$ 、 $\overline{F_1'F_2'}$)。

(6) 漸近線：L_1 、 L_2 二直線為雙曲線的漸近線。



3.雙曲線的標準式：

方程式	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
圖形		
中心	$(0,0)$	$(0,0)$
頂點	$(\pm a,0)$	$(0,\pm a)$
焦點	$(\pm c,0)$	$(0,\pm c)$
貫軸	$2a$	$2a$
共軛軸	$2b$	$2b$
正焦弦長	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
關係式	$a^2+b^2=c^2$	$a^2+b^2=c^2$

【基本練習】

已知雙曲線方程式$16x^2-9y^2=144$，試求其中心、焦點、頂點、貫軸長、共軛軸長、正焦弦長、漸近線。

1 老師講解

已知雙曲線方程式$\dfrac{(y+3)^2}{9}-\dfrac{(x-1)^2}{4}=1$，試求其中心、焦點、頂點、貫軸長、共軛軸長、正焦弦長、漸近線。

1 學生練習

已知雙曲線方程式$\dfrac{(y-1)^2}{25}-\dfrac{(x+1)^2}{144}=1$，試求其中心、焦點、頂點、貫軸長、共軛軸長、正焦弦長、漸近線。

【代碼】g33a02m3

2 老師講解

求兩焦點爲$(-1,1)$，$(-1,-5)$，共軛軸長爲4之雙曲線方程式。

2 學生練習

求以中心爲$(6,4)$，一頂點爲$(6,7)$，且共軛軸長爲8之雙曲線方程式。

【代碼】g33a03m2

3 老師講解

已知雙曲線兩頂點爲 $(1,2)$ ， $(5,2)$ ，且正焦弦長爲 9 ，求其方程式。

3 學生練習

求兩焦點 $(15,1)$ ， $(-11,1)$ 且過點 $(-10,1)$ 之雙曲線方程式。

【代碼】g33a03m3

4 老師講解

設兩焦點爲 $F(2,3)$ ， $F'(-4,3)$ ，且過 $P(2,-5)$ 之雙曲線方程式。

4 學生練習

設雙曲線兩焦點分別 $F(0,3)$ 、 $F'(0,-3)$ ，且圖形過 $P(8,3)$ ，求此雙曲線方程式。

【代碼】g33b02m2

5 老師講解

二漸近線 $x+2y-1=0$ ， $x-2y+1=0$ 且過 $(1,-1)$ 之雙曲線方程式。

5 學生練習

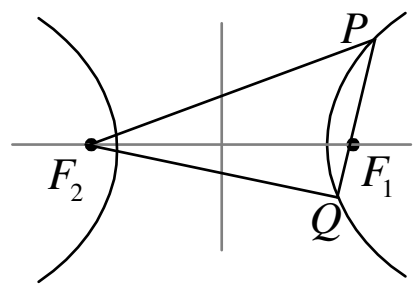
設 $3x+2y=0$ ， $3x-2y=0$ 是某一雙曲線的漸近線，且知此雙曲線通過 $(2,5)$ ，求其方程式。

【代碼】g33a03m4

【加強題】

1. 若雙曲線的頂點與焦點分別是橢圓$9x^2+4(y+1)^2=36$的焦點和頂點，則此雙曲線的方程式爲_____。

2. 如右圖，一雙曲線兩焦點F_1，F_2，貫軸長爲10，P，Q爲雙曲線上兩點，若$\overline{PQ}$過F_1且$\overline{PQ}=6$，試求ΔPQF_2的周長爲_____。



3. 兩漸近線爲 $2x-y=0$ 及 $2x+y-4=0$，且一焦點爲 $(1,2+\sqrt{10})$，求雙曲線方程式爲_____。

【學生練習答案】

1. 中心 $(-1,1)$ 、焦點 $(-1,14)$ 、$(-1,-12)$ 、頂點 $(-1,6)$ 、$(-1,-4)$ 、貫軸長 10、共軛軸長 24、正焦弦長 $\frac{288}{5}$ 、漸近線 $5x+12y-7=0$ 、$5x-12y+17=0$		
2. $\frac{(y-4)^2}{9}-\frac{(x-6)^2}{16}=1$		3. $\frac{(x-2)^2}{144}-\frac{(y-1)^2}{25}=1$
4. $\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{8}=1$	5. $9x^2-4y^2+64=0$	

回家功課

( ) 1. 方程式 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ 之圖形為雙曲線，則下列何者錯誤？ 代碼：g33202m1
(A)中心為 $(0,0)$ (B)貫軸長為 10 (C)頂點為 $(5,0)$ ，$(-5,0)$
(D)焦點為 $(4,0)$ ，$(-4,0)$ 。

( ) 2. 有一曲線之方程式為 $9x^2-4y^2-18x-8y-31=0$ ，則下列敘述何者不正確？ 代碼：g33087y1
(A)正焦弦長為 9 (B)其中一漸近線為 $3x+2y-1=0$
(C)貫軸長為 6 (D)其中一焦點為 $(1+\sqrt{13},-1)$ 。

( ) 3. 已知一雙曲線方程式為 $4x^2-16y^2+4x+16y+1=0$ ，則其貫軸上的兩頂點分別為何？ 代碼：g33090k1
(A) $(-\frac{1}{2},1)$ ，$(-\frac{1}{2},-1)$ (B) $(\frac{1}{2},1)$ ，$(\frac{1}{2},-1)$
(C) $(-\frac{1}{2},0)$ ，$(\frac{1}{2},1)$ (D) $(-\frac{1}{2},0)$ ，$(-\frac{1}{2},1)$ 。

( ) 4. 已知一雙曲線的兩焦點為 $(-1,0)$ ，$(9,0)$ 且貫軸長為 6 ，求此雙曲線的共軛軸長為 代碼：g33209m1
(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 。

( ) 5. 在平面上，跟兩定點 $(13,0)$ ，$(-13,0)$ 距離差的絕對值恆為 24 的所有點之軌跡方程式？ 代碼：g33207m1
(A) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{169}=1$ (B) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{144}=1$
(C) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ (D) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$ 。

( ) 6. 已知雙曲線之兩頂點為 $(\pm 12,0)$ ，焦點為 $(13,0)$ ，則此雙曲線之方程式為 代碼：g33210m1
(A) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{25}=1$ (B) $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$
(C) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{144}=1$ (D) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$ 。

( ) 7. 下列何者為曲線 $4y^2=(2x+1)^2+9$ 的漸近線？ 代碼：g33095k1
(A) $y=x+\frac{1}{2}$ (B) $y=2x-1$ (C) $y=2x+1$ (D) $2y=x+\frac{1}{2}$ 。

答案：DCDBC BA

歷屆試題

( ) 1. 設拋物線的對稱軸平行 x 軸，且過 $(8,-3),(8,1),(2,-2)$ 三點，則此拋物線之頂點坐標為何？ (A) $(-1,0)$ (B) $(-1,1)$ (C) $(0,-1)$ (D) $(1,-1)$ 。 代碼：g31100k1 (100 年統測 C)

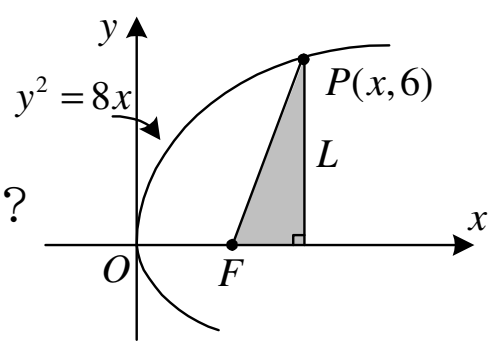
( ) 2. 若一橢圓方程式為 $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ 。點 $P(x,y)$ 為此橢圓上任一點，則 $\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=$？ (A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 10 。 代碼：g32100k1 (100 年統測 C)

( ) 3. 設拋物線 $x^2-2x-4y+1=0$ 之頂點為 V 且與直線 $L: y=1$ 相交於 A 、 B 二點，則 ΔABV 之面積為何？ (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 。 代碼：g31101k1 (101 年統測 C)

( ) 4. 已知拋物線的焦點為 $(2,-5)$ ，準線方程式為 $y=-1$ 。求此拋物線的正焦弦長 (A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16 。 代碼：g31102s1 (102 年統測 B)

( ) 5. 若橢圓的兩焦點為 $(-2,1)$ 、 $(4,1)$ 且長軸長為 10 ，求其方程式 代碼：g32102s1 (102 年統測 B)
(A) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$ (B) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$
(C) $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$ (D) $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$ 。

( ) 6. 已知點 $P(x,6)$ 為拋物線 $y^2=8x$ 上一點，F 為此拋物線的焦點，L 為過點 P 且與 x 軸垂直的直線，如圖。求由 $\overline{PF}$ 、 L 與 x 軸所圍成的三角形面積為何？ 代碼：g31102k1 (102 年統測 C)
(A) $\frac{15}{2}$ (B) 8 (C) $\frac{17}{2}$ (D) 9 。



( ) 7. 設雙曲線的兩焦點分別為 $F(-3,2)$、$F'(5,2)$，且此雙曲線過點 $P(5,\frac{13}{3})$，則此雙曲線的貫軸長為何？ (A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 14 。 代碼：g33102k1 (102 年統測 C)

( ) 8. 已知平面上有一雙曲線方程式為 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ ，下列何者為其漸近線？ 代碼：g33103s1 (103 年統測 B)
(A) $\frac{x}{4}+\frac{y}{9}=0$ (B) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=0$ (C) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ (D) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ 。

( ) 9. 設直線 $8x+y=c$ 爲拋物線 $y=4(x-1)^2$ 之切線，則 c 之值爲何？ (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 。 代碼：g31103k1 (103 年統測 C)

( ) 10. 設 F 、F' 爲橢圓 $25x^2+9y^2=225$ 的二焦點，點 $P(-3,0)$ 爲橢圓上一點，則 $\overline{PF}+\overline{PF'}$ 之值爲何？ (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 15 。 代碼：g32103k1 (103 年統測 C)

( ) 11. 若拋物線 $x+2y^2+4y-8=0$ 的頂點爲 (a,b) ，則 $a+2b=$ ？ (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 。 代碼：g31104s1 (104 年統測 B)

( ) 12. 橢圓 $25x^2+16y^2-100x+32y-284=0$ 之兩焦點在哪兩個象限？ (A)一、二 (B)二、三 (C)三、四 (D)一、四。 代碼：g32104k1 (104 年統測 C)

( ) 13. 若橢圓 $x^2+4y^2-4x-16y+a=0$ 不與 x 軸相交，且與 y 軸相切，則 a 之值爲何？ (A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 24 。 代碼：g32105s1 (105 年統測 B)

( ) 14. 已知一橢圓之焦點分別爲 $(3,3)$ 及 $(-1,3)$ ，且過點 $(3,6)$ ，則下列何者爲橢圓上的點？ (A) $(-1,0)$ (B) $(1,2)$ (C) $(2,3)$ (D) $(4,5)$ 。 代碼：g32105k1 (105 年統測 C)

( ) 15. 已知雙曲線 $H:\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 兩頂點的距離爲 a ，橢圓 $E:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 長軸長爲 b ，則 $a+b=$ ？ (A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22 。 代碼：g33106s1 (106 年統測 B)

( ) 16. 已知橢圓 $E:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 與圓 $C:x^2+y^2-8x+12=0$，則橢圓 E 與圓 C 有多少個交點？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：g32106s1 (106 年統測 B)

( ) 17. 若雙曲線 $4x^2-16y^2+4x+16y+1=0$ 的貫軸長及正焦弦長分別爲 i 、 j ，則 $i+j=$ ？ (A) $\dfrac{3}{2}$ (B) 2 (C) $\dfrac{5}{2}$ (D) 5 。 代碼：g33106k1 (106 年統測 C)

( ) 18. 若一拋物線之準線爲 $x=-1$ ，焦點爲 $(3,3)$ ，則此拋物線之方程式爲何? (A) $y^2-4x-6y+13=0$ (B) $y^2-4x-2y+13=0$ (C) $y^2-8x-2y+25=0$ (D) $y^2-8x-6y+17=0$ 。 代碼：g31107s1 (107 年統測 B)

( ) 19. 已知點 F 及直線 L 分別爲橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ 的焦點及短軸。若以直線 L 爲準線及點 F 爲焦點所作出拋物線的方程式爲 $4c(x-h)=(y-k)^2$，則 $|chk|=?$
(A)12 (B)8 (C)6 (D)4 。

代碼：g32108k1
(108 年統測 C)

( ) 20. 已知 F_1、F_2 爲橢圓 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 的焦點，且 F_3、F_4 爲雙曲線 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的焦點。若 P 點爲上述橢圓與雙曲線之交點，則下列何者正確?
(A) $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=24$ (B) $\overline{PF_3}+\overline{PF_4}=26$
(C) $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=6$ (D) $|\overline{PF_3}-\overline{PF_4}|=6$ 。

代碼：g33108k1
(108 年統測 C)

( ) 21. 若 C 爲坐標平面上的雙曲線，且其方程式爲 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$，則下列哪一條直線與 C 沒有交點?
(A) $y=\frac{-2}{5}x$ (B) $y=\frac{-1}{5}x$ (C) $y=\frac{3}{5}x$ (D) $y=\frac{4}{5}x$ 。

代碼：g33109s1
(109 年統測 B)

( ) 22. 已知 $A(-1,4)$、$B(5,4)$ 爲坐標平面上兩點。若拋物線 $H: y=C(x-h)^2$ 通過 A、B 兩點，則 $C+h=?$
(A) $\frac{13}{5}$ (B) $\frac{22}{9}$ (C) $\frac{18}{7}$ (D) $\frac{17}{4}$ 。

代碼：g31109s1
(109 年統測 B)

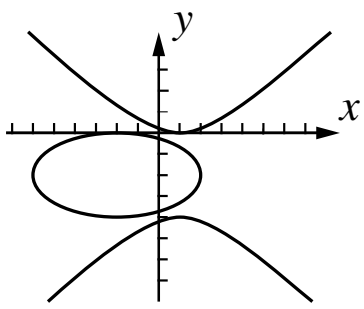
( ) 23. 若給定一橢圓標準式 $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{144}=1$，則下列何者正確？
(A) $(4,-2)$ 爲其中一焦點 (B) $(9,-2)$ 爲其中一長軸頂點
(C) $(4,10)$ 爲其中一短軸頂點 (D)正焦弦長爲 $\frac{25}{6}$ 。

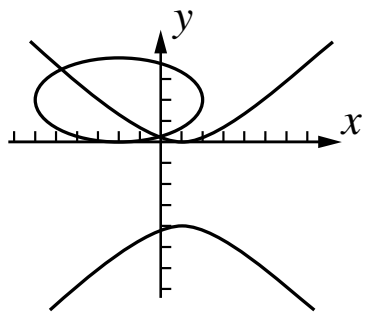
代碼：g32109k1
(109 年統測 C)

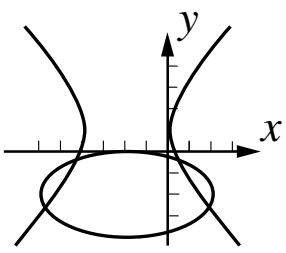
( ) 24. 若橢圓曲線上的任意點到兩點 $(2,-3)$、$(-4,-3)$ 的距離和爲 10，則此橢圓之短軸長爲何？
(A)4 (B)5 (C)6 (D)8 。

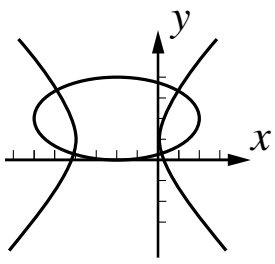
代碼：110tcb17
(110 年統測 B)

( ) 25. 若有兩個二次曲線方程式，分別爲 $x^2+4y^2+4x-16y+4=0$ 與 $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{5}=1$，則下列何者爲此兩曲線的圖形組合？ 代碼：110tcc09 (110 年統測 C)

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

( ) 26. 若直線 $y=mx$ 與拋物線 $f(x)=-x^2+4x-1$ 相切，且切點在第一象限內，則 $m=$？(A)1 (B)2 (C)4 (D)6 。 代碼：110tcc22 (110 年統測 C)

( ) 27. 若 $P(x, y)$ 爲橢圓 $4x^2+6y^2-12y-6=0$ 上任意一點，則 $x+3y$ 的最大值爲何？ 代碼：111tcc24 (111 年統測 C)

(A) $3+7\sqrt{3}$ (B) $3+5\sqrt{3}$ (C) $3+3\sqrt{5}$ (D) $3+\sqrt{21}$ 。

答案：CDBBA ABBAC ADCAC BDDDB DBDDD BD

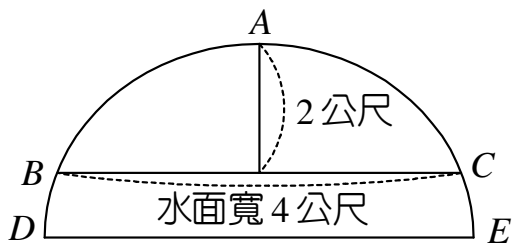
綜合練習

( ) 1. 關於拋物線 $P: x=4y^2+8y$，下列敘述何者正確？ (A)開口向下 (B)頂點在 $(-4,-1)$ (C)準線是 $y=-1$ (D)正焦弦長爲 4。 代碼：g31099k1

( ) 2. 拋物線 $(y-1)^2=-6(x+2)$ 之頂點 V，焦點 F，過 F 且垂直軸之直線與拋物線相交於 P，則 ΔPVF 面積爲 (A)18 (B)9 (C)$\frac{4}{9}$ (D)$\frac{9}{4}$。 代碼：g31216m1

( ) 3. 一拋物線頂點爲 $(2,4)$，其軸平行 x 軸，且過點 $(3,2)$，則此拋物線方程式爲 (A) $x^2-8x-4y+24=0$ (B) $x^2-8x+4y+8=0$ (C) $y^2-4x-8y+24=0$ (D) $y^2+4x-8y+8=0$。 代碼：g31218m1

( ) 4. 已知一個拋物線形狀的拱橋，拱頂(A 點)離水面 2 公尺時，水面寬度($\overline{BC}$ 長)爲 4 公尺，如圖所示，若水面再下降1公尺後，則此時水面寬度($\overline{DE}$ 長)爲多少公尺？ (A) $2\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{6}$ (C) $4\sqrt{2}$ (D) $4\sqrt{3}$。 代碼：g31097k1



( ) 5. 若橢圓 $\frac{x^2}{k}+\frac{y^2}{4}=1$ 上一點至兩焦點之距離和爲 8，則下列何者正確？ (A)焦點爲 $(0,2\sqrt{3})$，$(0,-2\sqrt{3})$ (B) $k=20$ (C)正焦弦長爲 2 (D)焦點爲 $(4,0)$，$(-4,0)$。 代碼：g32216m1

( ) 6. 設 A、B 爲橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ 的兩焦點，P 爲此橢圓上之任意一點，則 ΔPAB 面積的最大值爲何？ (A)6 (B)12 (C)15 (D)20。 代碼：g32092k1

( ) 7. 設橢圓 $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+4)^2}{9}=1$ 與 $\frac{(x-9)^2}{a^2}+\frac{(y+4)^2}{25}=1$ 有交點，則正數 a 的範圍爲 (A) $1\le a\le 9$ (B) $2\le a\le 10$ (C) $3\le a\le 11$ (D) $4\le a\le 12$。 代碼：g32217m1

( ) 8. 設一雙曲線之兩焦點爲 $F_1(5,2)$ 、 $F_2(-1,2)$ ，且過點 $(7,6)$ ，則此雙曲線方程式爲 (A) $\sqrt{(x-5)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=6\sqrt{5}$ (B) $\frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$ (C) $\frac{(x-2)^2}{20}-\frac{(y-4)^2}{16}=1$ (D) $\frac{(x-2)^2}{20}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$ 。 代碼：g33211m1

( ) 9. 若雙曲線 $H:9x^2-4y^2-72x+8y+176=0$ ，則下列直線何者是雙曲線 H 的漸近線？ (A) $L_1:2x+3y-14=0$ (B) $L_2:2x-3y+10=0$ (C) $L_3:3x+2y-14=0$ (D) $L_4:3x-2y+10=0$ 。 代碼：g33098k1

( ) 10. 若雙曲線的兩焦點爲 $(-4,0)$、$(6,0)$ 及一頂點爲 $(4,0)$ ，則下列那一點在此雙曲線上？ (A) $(-\frac{11}{4},3)$ (B) $(\frac{17}{4},4)$ (C) $(5,5)$ (D) $(\frac{11}{2},6)$ 。 代碼：g33092k1

( ) 11. 試問在坐標平面上，曲線 $y^2=4x$ 與 $x+y+2=0$ 之間的最短距離爲何？ (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) 1 (C) $\sqrt{22}$ (D) 2。 代碼：g34095k1

( ) 12. 試問在坐標平面上通過原點且與橢圓 $(x-3)^2+\frac{y^2}{4}=1$ 相交於一點的直線斜率爲何？ (A) $\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ (C) $1,-1$ (D) $\sqrt{2},-\sqrt{2}$ 。 代碼：g32096k1

答案：BDCBC BDBCA AA

單元 14　導函數及其應用

主題一　函數的極限與連續

1.函數的極限：

(1) **定義**：

函數 $f(x)$ 在 x 趨近於定數 a 時($x \neq a$)，$f(x)$ 趨近於定值 L，

則稱函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的極限值為 L，記作 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

(2) **函數極限的四則運算**：

設 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$ 、 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\beta$ ， k 為常數，則

① $\lim\limits_{x\to a} kf(x)=k\lim\limits_{x\to a} f(x)=k\alpha$

② $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=\alpha\pm\beta$

③ $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=\alpha\beta$　④ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　(其中 $\beta\neq 0$)

④ $\lim\limits_{x\to a} k=k$

(3) **函數極限的求法**：

①定型極限(分母不為 0)：以 $x=a$ 直接代入，即 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

② $\dfrac{0}{0}$ 分式型：將分子、分母因式分解，約去公因式，再以 $x=a$ 代入

③ $\dfrac{0}{0}$ 根式型：將根式有理化，約去公因式，再以 $x=a$ 代入

註：遇 $\dfrac{0}{0}$ 的題型，可用羅必達定理。方法：將分子、分母各自微分，再以 $x=a$ 代入

老師講解 1

試求下列的極限值。

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-2x+2)$　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2+6}$

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{3x^2-x-6}$　(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2}{x^2-4}$

學生練習 1

試求下列的極限值。

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-2)$　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x-16}$

【代碼】c11a01m2

2 老師講解

試求下列的極限值。

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x-2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

2 學生練習

求 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{3x^2+x-2}$ 之值。

【代碼】c11a01m3

3 老師講解

求 $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{1}{x^2-x-2}+\dfrac{1}{x^2-7x+10})$ 之值。

3 學生練習

求 $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2-4x+3})$ 之值。

【代碼】c11b01m2

4 老師講解

求 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x-7}{\sqrt{x+2}-3}$ 之值。

4 學生練習

求 $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{\sqrt{3+h}-2}{h-1}$ 之值。

【代碼】c11a01m5

5 老師講解

求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2}$ 之值。

5 學生練習

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$ 之值。

【代碼】c11b02m2

6 老師講解

設 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=5$ 成立時，求 $a+b$ 之值

6 學生練習

設 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+ax+b}{x+1}=3$ 成立時，求 $a+b$ 之值

【代碼】c11b03m2

(4) 左、右極限：

①**左極限**：當 $x \to a^-$ 時(即 $x < a$ 且 $x \to a$)，則稱 $f(x)$ 在 a 的左極限，記作 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$。

右極限：當 $x \to a^+$ 時(即 $x > a$ 且 $x \to a$)，則稱 $f(x)$ 在 a 的右極限，記作 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$。

若 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$，則 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

若 $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$，則 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 不存在

7 老師講解

試求下列的極限值：

(1) $f(x) = \begin{cases} 3x-1, x \geq 1 \\ x^2+1, x < 1 \end{cases}$，則 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$？

(2) $f(x) = \begin{cases} 4x+1, x > 2 \\ 3 \quad , x = 2 \\ x^2+1, x < 2 \end{cases}$，則 $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$？

7 學生練習

試求下列的極限值：

(1) $f(x) = \begin{cases} x+2, x \geq 2 \\ x^2 \quad , x < 2 \end{cases}$，則 $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$？

(2) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \quad x > 1 \\ 5 & , \quad x = 1 \\ x^2 & , \quad x < 1 \end{cases}$，$\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$？

【代碼】c11a02m2

2.函數的連續：

(1) 設 a 為函數 $f(x)$ 定義上一點，若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$，則函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 處連續。

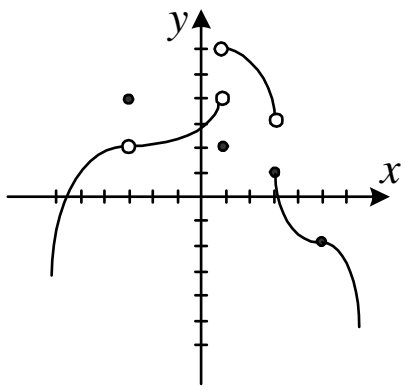
即函數 $f(x)$ 的圖形在 $x = a$ 時是連續不斷的。

(2) 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 處連續，則 $f(x)$ 在 $x = a$ 必滿足

$f(a)$ 有意義　②$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 存在　③$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

8 老師講解

根據 $f(x)$ 的圖形，試求下列各式之值：



(1) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to1} f(x)$，$f(1)$

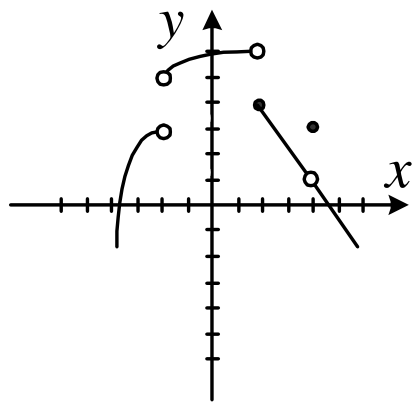
(2) $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to3} f(x)$，$f(3)$

(3) $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$, $f(-3)$

(4) $\lim\limits_{x\to5^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to5^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to5} f(x)$，$f(5)$

8 學生練習

根據 $f(x)$ 的圖形，試求下列各式之值：



(1) $f(-2)$　(2) $f(2)$　(3) $f(4)$

(4) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$　(5) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$　(6) $\lim\limits_{x\to4} f(x)$

【代碼】c11a02m3

9 老師講解

若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq2\\ a, & x=2\end{cases}$，

則 $f(x)$ 在 $x=2$ 時連續，求 $a=$？

9 學生練習

若 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x>-1\\ a, & x=-1\\ x^3, & x<-1\end{cases}$，

則 $f(x)$ 在 $x=-1$ 時連續，求 $a=$？

【代碼】c11a02m4

【學生練習答案】

1. (1) 7　(2) 0	2. 1	3. $-\dfrac{1}{2}$	4. $\dfrac{1}{4}$
5. $\dfrac{1}{2}$	6. 9	7. (1) 4　(2)不存在	
8. (1)不存在　(2) 4　(3) 3　(4)不存在　(5)不存在　(6) 1			9. $a=-1$

回家功課

( ) 1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-4x+3}$ 等於 (A)0 (B)-1 (C)-2 (D)-3 。 代碼：c11089k1

( ) 2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}=$ (A)0 (B)∞ (C)$\dfrac{3}{4}$ (D)$-\dfrac{3}{4}$ 。 代碼：c11205m1

( ) 3. $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{x^2+2}{x+1}+\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4})=$ (A)$\dfrac{13}{4}$ (B)$-\dfrac{7}{4}$ (C)4 (D)0 。 代碼：c11209m1

( ) 4. 求極限 $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4x}{x^2-4})=$？ (A)$-3$ (B)$-\dfrac{1}{2}$ (C)$\dfrac{1}{2}$ (D)3 。 代碼：c11093k1

( ) 5. 極限值 $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{\sqrt{4+3t}-\sqrt{4+t}}{t})=$ (A)0 (B)1 (C)$\dfrac{1}{2}$ (D)$\dfrac{1}{3}$ 。 代碼：c11211m1

( ) 6. 試求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}=$ (A)$\dfrac{-1}{4}$ (B)$\dfrac{1}{4}$ (C)0 (D)不存在 。 代碼：c11087g1

( ) 7. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+3x+b}{x-1}=7$，則 $a+b$ 之值為 代碼：c11088z1
(A)3 (B)-3 (C)2 (D)-2 。

( ) 8. 已知 $f(x)=\begin{cases}2x+3\ , x>2\\ 5\quad ,x=2\\ x^2+x+1\ , x<2\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=$？ 代碼：c11215m1
(A)1 (B)2 (C)5 (D)7 。

( ) 9. 若 $f(x)=\begin{cases}3x & ，x<1\\ ax+b & ，1\le x<2\\ x+1 & ，x\ge 2\end{cases}$ 為連續函數，則 $2b-3a$ 之值為 代碼：c11086z1
(A)3 (B)4 (C)5 (D)6 。

答案：BDACC ABDD

主題二　多項函數的導數與導函數

1. 導數的定義：

(1) 設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續，若極限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在。

則 $f(x)$ 在 $x=a$ 時的導數定義為 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

(2) 令 $x-a=h$，則 $x\to a \Rightarrow h\to 0$，則得 $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

(3) 若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處之導數存在，則稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，

若不存在，則函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處不可微。

(4) 函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處可微分，表示 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續

但若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 處連續，則 $f(x)$ 在 $x=a$ 處不一定可微分。

2. 導函數：

(1) 對函數 $f(x)$ 定義域中的每一個數 a，導數值 $f'(a)$ 均存在，則稱此 $f(x)$ 為可微分函數，

則稱 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 為 $f(x)$ 的導函數

(2) ①設 $y=f(x)$，則其一階導函數可表示為 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{d}{dx}f(x)=f'(x)=y'$

②設 $y=f(x)$，則其在 $x=a$ 處之導數可表示為 $f'(a)$ 或 $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$

老師講解 1

設 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-5)}$，求 $f'(3)=$？

學生練習 1

設 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)}$，求 $f'(2)=$？

【代碼】c13b04m2

3. 微分公式：設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為可微分函數，C 為常數

(1) $(C)'=0$

(2) $(x^n)'=nx^{n-1}$

(3) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$

(4) $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)g'(x)$

(5) $[\dfrac{f(x)}{g(x)}]'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

(6) $[(f(x))^n]'=n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$ (鏈鎖規則)

2 老師講解

試解出下列各式：

(1) 設 $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$ ，求 $f'(x)$

(2) 設 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-4x$ ，求 $f'(8)$

2 學生練習

試求下列各式之值：

(1) 設 $f(x)=2x^3-3x^2+x$ ，求 $f'(1)$

(2) 設 $f(x)=\sqrt{x}+2x-1$ ，求 $f'(9)$

【代碼】c13a02m2

3 老師講解

設 $f(x)=(2x^2+x-1)(x^5+2x^3+2x)$ ，

求 $f'(1)=$？

3 學生練習

$f(x)=(1-x^2)(x^2-3x+1)$ ，求 $f'(2)=$？

【代碼】c13a02m3

4 老師講解

設 $y=\dfrac{2x-3}{x^2+1}$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}=$？

4 學生練習

設 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x-1}$ ，求 $f'(1)=$？

【代碼】c13a02m4

5 老師講解

設 $f(x)=(2x^2+3x-1)^5$，求 $f'(-2)=$？

5 學生練習

設 $f(x)=(x^3+2x)^2$，求 $f'(2)=$？

【代碼】c13a03m2

6 老師講解

設 $f(x)=\dfrac{1}{(x+3)^{10}}$，求 $f'(-1)=$？

6 學生練習

設 $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-6x}$，求 $f'(4)=$？

【代碼】c13b01m1

7 老師講解

設 $f(x)=\sqrt{x^2+16}$，求 $f'(x)=$？

7 學生練習

設 $f(x)=\sqrt{(x-2)^3}$，求 $f'(3)$ 之值。

【代碼】c13b01m2

8 老師講解

設 $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}}$，求 $f'(6)$ 之值。

8 學生練習

設 $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$，求 $f'(\sqrt{3})$ 之值。

【代碼】c13b02m2

9 老師講解

設 $f(x)=x^3-3$，求下列各式之值：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+5h)-f(2+3h)}{h}$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+2h)-f(2-h)}{2h}$

9 學生練習

設 $f(x)=x^2-2$，求下列各式之值：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

(2) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(2+5t)-f(2+2t)}{2t}$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2-2h)}{3h}$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+4h)-f(2)}{2h}$

【代碼】c13b03m2

4. 高階導函數：

(1) **二階導函數：**

設函數 $y=f(x)$ 可微分，且 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 也可微分，

則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$ 稱為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的二階導函數，

記為 $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}=\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)=f''(x)=y''$

(2) **三階導函數：**

$f''(x)$ 的導函數稱為 $y=f(x)$ 的三階導函數，

記為 $\dfrac{d^3f(x)}{dx^3}=\dfrac{d^3}{dx^3}f(x)=f'''(x)=y'''$

(3) **n 階導函數：**

$f^{(n-1)}(x)$ 的導函數稱為 $y=f(x)$ 的 n 階導函數，

記為 $\dfrac{d^{(n)}f(x)}{dx^{(n)}}=\dfrac{d^{(n)}}{dx^{(n)}}f(x)=f^{(n)}(x)=y^{(n)}$

10 老師講解

設 $f''(x)$ 爲函數 $f(x)$ 的二階導函數，若 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$，則 $f''(x)=0$ 之解爲何？

10 學生練習

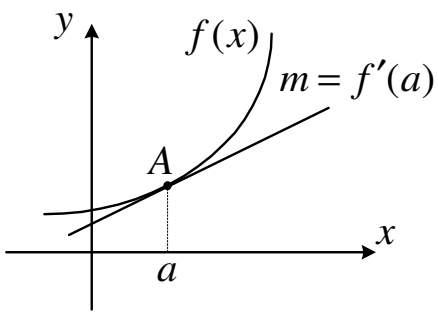
設 $f''(x)$ 爲函數 $f(x)$ 的二階導函數，若 $f(x)=x(x+1)(x+2)$，求 $f''(1)$ 之值。

【代碼】c13a04m2

5. 導數的幾何意義：

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

表示曲線 $y=f(x)$ 在切點 $P(a,f(a))$ 上切線的斜率。



11 老師講解

試求函數 $f(x)=y=x^2$ 圖形上以 $(2,4)$ 爲切點之切線方程式。

11 學生練習

試求函數 $y=\sqrt{x}$ 圖形上以 $(4,2)$ 爲切點之切線方程式。

【代碼】c14a01m2

12 老師講解

設曲線 $y=x^2+4x+3$，試求在 $x=1$ 之切線方程式。

12 學生練習

設曲線 $y=x^2-4x+5$，試求在 $x=-2$ 之切線方程式。

【代碼】c14a01m3

13 老師講解

若 $y=x^2$ 在點 (a,b) 之切線與直線 $6x-y+1=0$ 平行，求 $a+b=$？

13 學生練習

設函數 $f(x)=x^3+ax+1$，若 $P(-2,7)$ 在此函數上，求過 P 之切線方程式。

【代碼】c14b01m2

6. 導數的物理意義：

(1) 設某物體位移與時間的函數為 $S(t)$，則 $S'(a)=\lim\limits_{t\to a}\dfrac{S(t)-S(a)}{t-a}$ 表示此物體在時刻 a 的瞬時速度

(2) 設某物體速度與時間的函數為 $V(t)$，則 $V'(a)=\lim\limits_{t\to a}\dfrac{V(t)-V(a)}{t-a}$ 表示此物體在時刻 a 的瞬時加速度

14 老師講解

設某質點在直線上運動，
其在時間t的距離爲$S(t)=t^3-2t$，
試求$t=2$的的瞬時速度與瞬時加速度。

14 學生練習

GT賽車中，車子的位置與時間t的關係
爲$S(t)=t^3-3t^2+7t$，則其
求$t=3$之瞬時速度與瞬時加速度。
【代碼】c14a02m2

【學生練習答案】

1. $\frac{-1}{12}$	2. (1)1 (2)$\frac{13}{6}$	3. 1	4. -2
5. 336	6. $\frac{5}{6}$	7. $\frac{3}{2}$	8. $\frac{7}{2}$
9. (1)4 (2)6 (3)4 (4)8			10. 12
11. $x-4y+4=0$	12. $8x+y-1=0$	13. $5x-y+17=0$	14. 12

回家功課

( ) 1. 設 a 與 b 為實數，且 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 分別表示函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的導函數，若 $f(x)=ax$ 與 $g(x)=ax^2-bx+3$ 滿足 $f(2)=g(2)$ 及 $f'(2)=g'(2)$，則 $a+b=$？ (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 。 代碼：c13094k1

( ) 2. 設 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$，則 $f(x)$ 之導函數為 代碼：c13202m1
(A) $\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)}$ (B) $\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$ (C) $\dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+1)}$ (D) $\dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$ 。

( ) 3. 設 $f''(x)$ 為 $f(x)$ 的二階導函數，若 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$，則 $f''(x)=0$ 之解為何？ (A) 2 (B) $\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) 9 。 代碼：c13097k1

( ) 4. 設 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$，則 $y'(4)=$？ (A) $-\dfrac{2}{25}$ (B) $\dfrac{3}{5}$ (C) $-\dfrac{4}{125}$ (D) $\dfrac{1}{25}$ 。 代碼：c13215m1

( ) 5. 設 $f(x)=x\sqrt{4x^2+1}$ 則 $f(x)$ 在 $x=0$ 處之導數 $f'(0)=$？ 代碼：c13092k1
(A) -1 (B) $-\dfrac{1}{4}$ (C) 0 (D) 1 。

( ) 6. 設 $f'(x)$ 為函數 $f(x)$ 的導函數，若 $f'(x)=2x^2$，則 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{f(2+\theta)-f(2)}{2\theta}=$？ (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16 。 代碼：c13097k2

( ) 7. 若 $f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$，求 $\lim\limits_{x\to\sqrt{7}}\dfrac{f(x)-f(\sqrt{7})}{x-\sqrt{7}}=$ 代碼：c13206m1
(A) $\dfrac{\sqrt{7}}{6}$ (B) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) $\dfrac{\sqrt{7}}{12}$ 。

( ) 8. 設 $f(x)=\dfrac{2x+1}{3-x}$，則此函數圖形在點 $P(2,5)$ 的切線方程式為 代碼：c14201m1
(A) $7x+y-19=0$ (B) $x-7y+33=0$
(C) $x+7y-37=0$ (D) $7x-y-9=0$ 。

( ) 9. 設 $f(x)=x^3+ax^2+4$，其中 a 為實數，若 $P(2,4)$ 為此函數圖形上一點，則以 P 為切點的切線方程式為何？ 代碼：c14092k1
(A) $x-4y=-14$ (B) $x+4y=18$ (C) $4x-y=4$ (D) $4x+y=12$ 。

( ) 10. 設某質點在直線上運動，其在時間 t 的速度為 $V(t)=t^2-\dfrac{1}{2}\sqrt{t}$，其中距離單位為公尺，時間單位為秒。試求當 $t=4$ 時，其加速度為多少公尺/秒^2？ (A) $\dfrac{59}{2}$ (B) $\dfrac{23}{4}$ (C) $\dfrac{63}{8}$ (D) 15 。 代碼：c14090k1

答案：BBACD BADCC

主題三　導數的應用

1. 函數的遞增與遞減：

(1) **遞增函數：**

①若 $x_2 > x_1$，恆使得 $f(x_2) \geq f(x_1)$，則稱函數 $y = f(x)$ 為遞增函數。

②在區間 (a,b) 內，若 $f'(x) \geq 0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 (a,b) 為遞增函數。

(2) **遞減函數：**

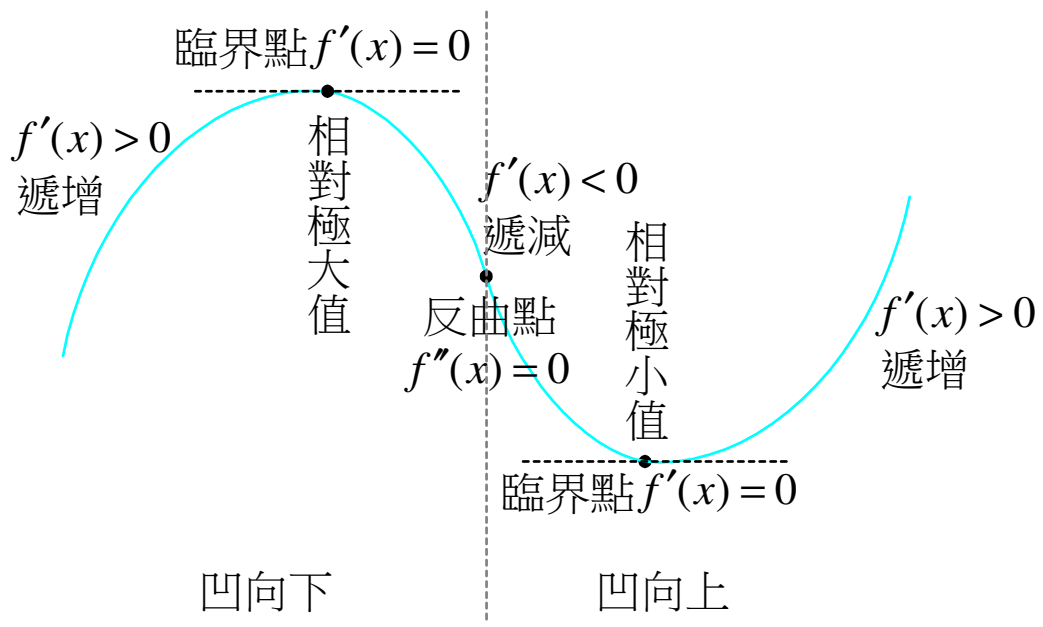
①若 $x_2 > x_1$，恆使得 $f(x_2) \leq f(x_1)$，則稱函數 $y = f(x)$ 為遞減函數。

②在區間 (a,b) 內，若 $f'(x) \leq 0$ 恆成立，則 $f(x)$ 在區間 (a,b) 為遞減函數。

(3) $f'(x) = 0$ 為臨界點發生處：若 $f'(a) = 0$，則臨界點為 $(a, f(a))$。

2. 函數圖形的極值：

相對極值必發生在臨界點處，即 $f'(x) = 0$。



3. 函數圖形的凹向與反曲點：

(1) 若 $f'(x)$ 在區間 (a,b) 為遞增函數，即 $f''(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 (a,b) 的圖形為凹口向上

(2) 若 $f'(x)$ 在區間 (a,b) 為遞減函數，即 $f''(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 (a,b) 的圖形為凹口向下

(3) $f''(x) = 0$ 為反曲點發生處：若 $f''(a) = 0$，則反曲點為 $(a, f(a))$。

老師講解 1

設 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$，試求 $f(x)$ 的
(1)遞增、遞減區間　(2)相對極值
(3)圖形凹向性 (4)反曲點 (5)繪出圖形。

學生練習 1

設 $f(x)=x^3-3x^2+2$，試求 $f(x)$ 的
(1)遞增、遞減區間　(2)相對極值
(3)圖形凹向性 (4)反曲點 (5)繪出圖形。

【代碼】c15a01m2

2 老師講解

設 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+6$，試求 $f(x)$ 的
(1)遞增、遞減區間　(2)相對極值
(3)圖形凹向性　(4)反曲點
(5)與 x 軸交點個數。

2 學生練習

對函數 $f(x)=-x^3+12x+4$ 之圖形而言，試求 $f(x)$ 的 (1)遞增、遞減區間
(2)相對極值　(3)圖形凹向性
(4)反曲點　(5)與 x 軸交點個數

【代碼】c15a02m2

3 老師講解

設 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$，且 $0\le x\le 4$，求 $f(x)$ 之絕對極大值與絕對極小值。

3 學生練習

設 $f(x)=x^3-12x+2$，且 $-3\le x\le 5$，若 $f(x)$ 之絕對極大值爲 M 、絕對極小值爲 m ，求 $M+3m=$？

【代碼】c15b01m2

4 老師講解

一正方形鋁片，邊長爲 24 公分，今從四角各截去一小正方形以摺成無蓋之盒子，求此盒子之最大體積。

4 學生練習

有一長 8 公寸，寬 5 公寸的長方形紙板，今從四角截去邊長爲 x 公寸的四個小正方形，以便摺成一個無蓋的紙盒，若欲使紙盒有最大容積，則 $x=$？

【代碼】c15b03m2

5 老師講解

設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$ 在 $x=1$ 與 $x=3$ 時均有極值，求 a、b 之值。

5 學生練習

設 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+3$ 在 $x=1$ 與 $x=2$ 時均有極值，求 $a+b=$？

【代碼】c15a03m2

6 老師講解

若曲線 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 之反曲點爲 $(1,6)$，求 $b-a=$？

6 學生練習

設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 之反曲點爲 $(1,8)$，求 $a-b=$？

【代碼】c15b02m2

【學生練習答案】

1. (1)遞增區間爲 $(-\infty,0)$ 或 $(2,\infty)$、遞減區間爲 $(0,2)$ (2)相對極大值爲 $f(0)=2$、相對極小值爲 $f(2)=-2$ (3)凹向上區間爲 $(1,\infty)$、凹向下區間爲 $(-\infty,1)$　(4)反曲點爲 $(1,0)$			
2. (1)遞增區間爲 $(-2,2)$、遞減區間爲 $(-\infty,-2)$ 或 $(2,\infty)$ (2)相對極大值爲 $f(2)=20$、相對極小值爲 $f(-2)=-12$ (3)凹向上區間爲 $(-\infty,0)$、凹向下區間爲 $(0,\infty)$　(4)反曲點爲 $(0,4)$　(5)交三點			
3. 25	4. 1	5. 3	6. -12

回家功課

( ) 1. 若 $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$ 的相對極大值為 M ，相對極小值為 m ，則 $M-m=?$ 代碼：c15094k1
(A) 2 (B) 15 (C) 17 (D) 32 。

( ) 2. 設 $f(x)=x^4-4x^3+8$ 圖形上的反曲點的座標為 代碼：c15087s1
(A) $(-1,13)$ 及 $(0,8)$ (B) $(-1,13)$ 及 $(1,5)$
(C) $(0,8)$ 及 $(2,-8)$ (D) $(1,5)$ 及 $(2,-8)$ 。

( ) 3. 設 $f(x)=x^3-3x^2+ax+b$ ，當 $x=3$ 時， $f(x)$ 有極小值 -9 ，則 $a+b$ 等於 代碼：c15205m1
(A) -18 (B) -9 (C) 9 (D) 18 。

( ) 4. 設 a,b 為實數，若函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+6$ 之圖形的反曲點為 $(1,0)$ ，則 $a-b=$ ？ 代碼：c15096k1
(A) 1 (B) 5 (C) 9 (D) 13 。

答案：DCCA

歷屆試題

( ) 1. 若 $f(x)=(x-1)^5$，且 $f'(x)$ 爲 $f(x)$ 的一階導函數，
則 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)-f'(2)}{x-2}=$？ (A)0 (B)1 (C)5 (D)20。
代碼：c13100k1 (100 年統測 C)

( ) 2. 若函數 $f(x)$ 的導函數爲 $f'(x)=x^2-6x$，則 $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}$ 之值爲何？
(A)0 (B)1 (C)6 (D)不存在。
代碼：c13101k1 (101 年統測 C)

( ) 3. 設拋物線 $y=ax^2+bx$ 在 $x=1$ 處之切線方程式爲 $y-2=4(x-1)$，則 $3a-2b$ 之值爲何？ (A)5 (B)6 (C)7 (D)8。
代碼：c14101k1 (101 年統測 C)

( ) 4. 已知多項式 $f(x)=(x^2-x+1)^2-1$。求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3h)-f(0)}{2h}$ 之值
(A)-3 (B)-2 (C)2 (D)3。
代碼：c13102s1 (102 年統測 B)

( ) 5. 設 $f(x)=x^3-3x^2+2x+4$，則下列哪一個方程式爲 $f(x)$ 圖形的切線
(A) $x+y+5=0$ (B) $x+y+3=0$ (C) $x+y=5$ (D) $x+y=8$。
代碼：c14102s1 (102 年統測 B)

( ) 6. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{5x^2-2x-3}, & x\neq 1\\ C, & x=1\end{cases}$。若 f 在 $x=1$ 處連續，則 $C=$？
(A)$\dfrac{1}{8}$ (B)$\dfrac{1}{4}$ (C)$\dfrac{1}{2}$ (D)1。
代碼：c11102k1 (102 年統測 C)

( ) 7. 已知 a、b 爲實數，$f(x)=(ax+b)^3$。若 $f(2)=1$ 且 $f'(2)=6$，
則 $a-b=$？ (A)-2 (B)-1 (C)3 (D)5。
代碼：c13102k1 (102 年統測 C)

( ) 8. 設 $f(x)=(x^2+2)^2$，求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=$？
(A)6 (B)8 (C)9 (D)12。
代碼：c13103s1 (103 年統測 B)

( ) 9. 設 $f(x)=\dfrac{x(x-1)(x-4)}{(x+1)(x+2)}$，則導數 $f'(0)$ 之值爲何？
(A)-2 (B)-1 (C)0 (D)2。
代碼：c13103k1 (103 年統測 C)

( ) 10. 函數 $f(x)=2x^3-2x^2+3$ 在 $x=1$ 之導數爲何？
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 。
代碼：c13104s1 (104 年統測 B)

( ) 11. 求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h}}{h}=$？ (A)$\dfrac{1}{4}$ (B)$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (C)$\dfrac{1}{2}$ (D)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 。
代碼：c13104k1 (104 年統測 C)

( ) 12. 已知 a,b 爲實數，若過函數 $f(x)=ax^2+bx$ 圖形上一點 $P(1,5)$ 的切線斜率爲 3，則 $f'(2)=$？ (A)-3 (B)-1 (C)1 (D)3 。
代碼：c14104k1 (104 年統測 C)

( ) 13 若 $f(x)=(x^2+3x-1)^2(x^3-5x^2)$，則 $f'(1)$ 爲何？
(A)-183 (B)-87 (C)-57 (D)-36 。
代碼：c13105s1 (105 年統測 B)

( ) 14. 已知 $f(x)=\dfrac{x(2x-1)(13x+2)^4}{\sqrt{27x+9}}$，求 $f(x)$ 在 $x=0$ 的導數 $f'(0)$ 之值。
(A)$-\dfrac{16}{3}$ (B)$-\dfrac{8}{3}$ (C)$-\dfrac{4}{3}$ (D)$-\dfrac{1}{3}$ 。
代碼：c13105k1 (105 年統測 C)

( ) 15. 求函數 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x-2}$ 在 $x=1$ 的導數
(A)-9 (B)-8 (C)-7 (D)-6 。
代碼：c13106s1 (106 年統測 B)

( ) 16. 已知 a 、b 爲實數，且 $f(x)=x^3+ax^2+bx+13$ 。若 $f'(-1)=1$ 且 $f'(0)=2$，則 $a+b=$？ (A)-1 (B)0 (C)3 (D)4 。
代碼：c13106k1 (106 年統測 C)

( ) 17. 若 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+3$ 的相對極大值爲 a，相對極小值爲 b，則 $a+b=$？ (A)$\dfrac{-27}{2}$ (B)$\dfrac{-3}{2}$ (C)$\dfrac{-1}{2}$ (D)$\dfrac{27}{2}$ 。
代碼：c15106k1 (106 年統測 C)

( ) 18. 若 $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & ,x<-1 \\ 2 & ,x=-1 \\ 6-3x^2 & ,x>-1 \end{cases}$，則 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=$？ (A)0 (B)1 (C)2 (D)3
代碼：c11106k1 (106 年統測 C)

( ) 19. 在坐標平面上，函數 $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-3x+1$ 的圖形於切點 $(2,1)$ 的切線斜率爲何? (A)0 (B)1 (C)2 (D)3 。
代碼：c14107s1 (107 年統測 B)

( ) 20. 若 $f(x)=\dfrac{-3(x+1)}{x^4+x^2+1}$，則 $f'(-1)$ 之值為何?
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2。
代碼：c13107s1 (107 年統測 B)

( ) 21. 若 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}(x\neq\pm1)$，則 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 之值為何?
(A)不存在 (B) 0 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) 1。
代碼：c11107s1 (107 年統測 B)

( ) 22. 若直線 L 過點 $(9,5)$，且與函數 $y=f(x)$ 的圖形相切於點 $(3,1)$，則 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=?$ (A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{3}{2}$ (D) 3。
代碼：c14107k1 (107 年統測 C)

( ) 23. 設函數 $f(x)=x^3-x^2+x-2$。試問 $f'(1)+f''(1)$ 之值為何?
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6。
代碼：c13108s1 (108 年統測 B)

( ) 24. 已知函數 $f(x)$ 的導函數為 $g(x)=x^2-4x+2$，則 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$
(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2。
代碼：c13108k1 (108 年統測 C)

( ) 25. 小明設計了一款迴力鏢，已知將此迴力鏢擲出後，迴力鏢過了時間 t 秒後與小明的距離為 $f(t)=\dfrac{100t}{t^2+9}$ 公尺，若在 t_0 秒時，迴力鏢離小明最遠，則 $t_0=?$ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。
代碼：c15108k1 (108 年統測 C)

( ) 26. 若 $f(x)=x+\pi^2$，其中 π 為圓周率，則 $f'(x)=?$
(A) 1 (B) $1+\pi$ (C) $1+2\pi$ (D) $1+\pi^2$ 。
代碼：c13109s1 (109 年統測 B)

( ) 27. 關於下列各極限，何者錯誤？ (A) $\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt[3]{x-2}=0$ (B) $\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt{x-2}=0$ (C) $\lim\limits_{x\to2^+}\sqrt[3]{x-2}=0$ (D) $\lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{x-2}=0$ 。
代碼：c11109k1 (109 年統測 C)

( ) 28. 設 $f(x)=x^3-3x^2-24x+32$ 在閉區間 $[-3,3]$ 內的最大值與最小值分別為 m、n，則 $m-n=?$ (A) 90 (B) 98 (C) 100 (D) 108 。
代碼：c15109k1 (109 年統測 C)

( ) 29. 設 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>2\\ x^2-2x+3, & x\leq2\end{cases}$，則 $f'(2)=?$
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D)不存在 。
代碼：c13109k1 (109 年統測 C)

(　　) 30. 已知兩多項式函數 $g(x)$ 及 $h(x)$ 之導函數分別為 $g'(x)$ 及 $h'(x)$，且 $h(x)=4g(x)-7x+9$。若 $g'(0)=3$，則 $h'(0)=$？
(A)5　(B)9　(C)14　(D)21　。
代碼：110tcb11
(110 年統測 B)

(　　) 31. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{(3+h)+2}-\dfrac{1}{3+2}}{h}=$？　(A)$-\dfrac{1}{25}$　(B)$-\dfrac{1}{9}$　(C)$\dfrac{1}{9}$　(D)$\dfrac{1}{25}$　。
代碼：110tcc05
(110 年統測 C)

(　　) 32. 已知函數 $f(x)=x^3+\dfrac{12}{x}$ 圖形在切點 (a,b) 的切線斜率為 9。若 $a>0$，則 $a+b=$？　(A)-8　(B)11　(C)14　(D)16　。
代碼：111tcc18
(111 年統測 C)

(　　) 33. 若函數 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+a}{x^2-2x-3}, & x>3\\ \dfrac{x-5}{x-b}, & x\le 3\end{cases}$ 在 $x=3$ 處連續，則 $a+b=$？
(A)-3　(B)-1　(C)1　(D)3　。
代碼：111tcc25
(111 年統測 C)

答案：DABAC　BDDDB　DBAAA　DCDDA　CBDBC　ABCBA　ADC

綜合練習

( ) 1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{x+3}(\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{1}{x+2})=$？ (A)0 (B)$-2$ (C)2 (D)不存在。 代碼：c11088y1

( ) 2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2}}{x-4}=$ (A)$-\dfrac{1}{8}$ (B)$\dfrac{1}{8}$ (C)$-\dfrac{1}{16}$ (D)$\dfrac{1}{16}$。 代碼：c11088s1

( ) 3. $\lim\limits_{x\to 2^-}(\dfrac{x-2}{|x-2|}+|x|)-\lim\limits_{x\to 2^+}(\dfrac{x-2}{|x-2|}+|x|)=$？ 代碼：c11222m1
(A)0 (B)2 (C)4 (D)-2。

( ) 4. 若 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$，則 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$？ 代碼：c11092k1
(A)-1 (B)0 (C)1 (D)2。

( ) 5. 關於函數的導函數，下列何者正確？ 代碼：c13099k1
(A) $f(x)=(4x+5)(6x+7)$，則 $f'(x)=24$
(B) $f(x)=\sqrt[3]{x^7}+4x$，則 $f'(x)=\dfrac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}+4$
(C) $f(x)=(4x+5)^2$，則 $f'(x)=2(4x+5)$
(D) $f(x)=\dfrac{4x+4}{x+1}$，則 $f'(x)=4$。

( ) 6. $f(x)=(1-x^2)^2(x^2-3x+1)^3$，則 $f'(2)$ 之值爲 代碼：c13209m1
(A)51 (B)21 (C)-18 (D)3。

( ) 7. 若 $f(x)=(x^2-3x+3)^4$，則 $f''(2)=$？ 代碼：c13235m1
(A)15 (B)20 (C)28 (D)32。

( ) 8. 設 $f'(x)$ 爲 $f(x)$ 的導函數，若 $f(x)=x+|x|$，則 $f'(1)+f'(-1)=$? 代碼：c14094k1
(A)0 (B)1 (C)2 (D)4。

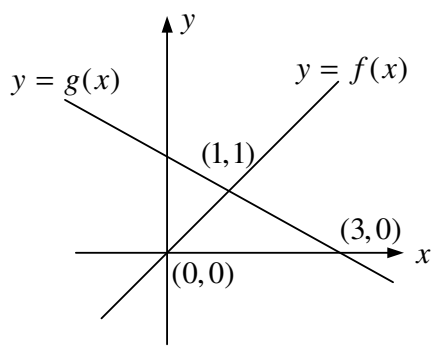
( ) 9. 函數 $f(x)=|x|+|x+1|+|x+5|$，則 $f(x)$ 在 $x=-3$ 處的導數 $f'(-3)$ 爲 代碼：c14083s1
(A)1 (B)-3 (C)3 (D)-1。

( ) 10. 設 $f(x)=\begin{cases} x^2 & ，x\ge 1 \\ 2x-1 & ，x<1 \end{cases}$，求 $f'(1)=$？ (A)1 (B)2 (C)3 (D)不存在。 代碼：c14216m1

( ) 11. 設函數 $f(x)=\begin{cases} 3x-6 & ，x\le -1 \\ ax^2+x & ，x>-1 \end{cases}$ 是連續函數且 $f'(-\frac{1}{4})=b$，則 $a+b=$？ 代碼：c14085s1
(A)-3 (B)-2 (C)-1 (D)0。

( ) 12. 下列各曲線中，何者再 $x=1$ 處的切線斜率為12？ 代碼：c14098k1
(A) $y=(x^2+1)^3$ (B) $y=(2x+1)(4x^2-3)$
(C) $y=\dfrac{x-47}{x+1}$ (D) $y=(3x+1)^2$。

( ) 13. 設函數 $y=f(x)$ 的圖形為過 $(0,0)$ 與 $(1,1)$ 二點之直線，函數 $y=g(x)$ 的圖形為過 $(1,1)$ 與 $(3,0)$ 兩點之直線，若 $u(x)=f(x)\cdot g(x)$，則 $u(x)$ 在 $x=1$ 的導函數 $u'(1)=$？ 代碼：c14091k1
(A)-1 (B)-0.5 (C)0.5 (D)1。



( ) 14. 在直線軌道上的電車，煞車後在 t 秒間走的距離為 x 公尺，$x(t)=30t-5t^2$，則電車需在進站前幾公尺就必須踩煞車，才能正確停在旅客上下車之位置？ 代碼：c14088x1
(A)35公尺 (B)40公尺 (C)45公尺 (D)50公尺。

( ) 15. 設 $0\le x\le 30$，若 $f(x)=\dfrac{x^2+300}{x+10}$，則 $f(x)$ 之最小值為何？ 代碼：c15097k1
(A)4 (B)8 (C)12 (D)20。

( ) 16. 已知函數 $f(x)=x^2-3x+5$ 與函數 $g(x)=|2x+1|$ 圖形相交於兩點，而其 x 坐標分別為 a 與 b，其中 $a<b$。若 $f'(x)$ 與 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值分別為 m_1 與 m_2，則 $m_1+m_2=$？ (A)-2 (B)-1 (C)0 (D)1。 代碼：c14099k1

答案：BCDBB DBCDB ACCCD D

單元 15　積分及其應用

主題一　無窮數列的極限與無窮等比級數

1.無窮數列極限的概念：

(1) 設$<a_n>$為一無窮數列，當n趨近於無窮大時($n\to\infty$)，a_n的值趨近於定值α，

則稱數列$<a_n>$的極限為α，記作$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$

若無窮數列$<a_n>$的極限存在，$<a_n>$稱為收斂數列

例：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$、$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$、$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n=0$、$\lim\limits_{n\to\infty}1^n=1$

若無窮數列$<a_n>$的極限不存在，$<a_n>$稱為發散數列

例：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$、$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=$不存在

(2) **數列極限的四則運算**：

設$<a_n>$、$<b_n>$皆為收斂數列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$、$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$，$k$為常數，則

① $\lim\limits_{n\to\infty}ka_n=k\lim\limits_{n\to\infty}a_n=k\alpha$

② $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha\pm\beta$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)(\lim\limits_{n\to\infty}b_n)=\alpha\beta$

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$　(其中$b_n\neq 0$，$\beta\neq 0$)

(3) **無窮數列極限的求法**：

分式型：設$f(n)$與$g(n)$皆為n的多項式，其領導係數分別為α、β，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\begin{cases}0 & ,\deg f(n)<\deg g(n)\\ \frac{\alpha}{\beta} & ,\deg f(n)=\deg g(n)\\ \text{不存在} & ,\deg f(n)>\deg g(n)\end{cases},$$

根式型：當$n\to\infty$時，出現$\frac{\infty}{\infty}$、$\infty-\infty$或$0\cdot\infty$時，先將根式部分有理化，再求極限。

等比型：$\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\begin{cases}\infty & ,\ |r|>1\\ 0 & ,\ |r|<1\\ 1 & ,\ r=1\\ \text{不存在} & ,\ r=-1\end{cases}$

夾擠定理(三明治定理)：

設$<a_n>$、$<x_n>$、$<b_n>$為三無窮數列，且滿足$a_n \le x_n \le b_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$，

則$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$

1 老師講解

試求下列的極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{3x^2-x}$　(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x}{3x^2-2x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x-1}{5x^2-2}$

1 學生練習

試求下列的極限值：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+3}{2x^2-1}$　(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-4}{x^3-3}$

【代碼】c12a01m2

2 老師講解

求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x+4}-\dfrac{3x-2}{5x+1}\right)$之值。

2 學生練習

求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{2x-1}+\dfrac{2x}{3x+1}\right)$之值。

【代碼】c12a02m2

3 老師講解

求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2+3}{n+1}-\dfrac{n^2-2}{n})$ 之值。

3 學生練習

求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2}{n+2}-\dfrac{n^2+1}{n})$ 之值。

【代碼】c12a02m3

4 老師講解

求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$ 之值。

4 學生練習

求 $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{4x^2-3}-2x)$ 之值。

【代碼】c12a02m4

5 老師講解

試求下列的極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{999}{1000})^n$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1001}{1000})^n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+(0.9)^n}{5-2(0.99)^n}$

5 學生練習

試求下列的極限值：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{9}{10})^n$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{317}{125})^n$

【代碼】c12a02m5

6 老師講解

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n+1}+7^{n+1}+520}{492+7^{n}+3^{2n-1}}$ 之值。

6 學生練習

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n-1}-3^{n}+49}{3^{n+1}+4^{n+2}-2015}$ 之值。

【代碼】c12b01m2

2.無窮等比級數：

設 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$，則

(1) 當 $|r|<1$ 時，其和 $S=\dfrac{a}{1-r}$ (收斂級數)　　(2)當 $|r|\geq 1$ 時，其和 S 不存在(發散級數)

【基本練習】

試求下列各無窮級數之總和：

(1) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\cdots$

(2) $2-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}-\dfrac{2}{27}+\cdots$

7 老師講解

若無窮級數 $0.77+0.0707+0.007007+\cdots$ 化成最簡分數爲 $\dfrac{q}{p}$，試求 $q-3p$ 之值。

7 學生練習

試求級數 $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{32}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{128}-\dfrac{1}{256}+\cdots$ 之和。

【代碼】a53a02m2

8 老師講解

試求無窮級數 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{5^k}$ 之和。

8 學生練習

試求無窮級數 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{k+1}}$ 之和。

【代碼】a53a02m3

9 老師講解

試求無窮級數 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k-2^{k+1}}{5^k}$ 之和。

9 學生練習

試求無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-3^{n+1}}{4^n}$ 之和。

【代碼】a53b01m2

10 老師講解

若一球由高90公尺之地方落下，每次著地後反躍之高度爲原高之 $\frac{2}{3}$，試求此球靜止前所經之距離爲多少公尺？

10 學生練習

若一球由高60公尺之地方落下，每次著地後反躍之高度爲原高之 $\frac{1}{3}$，試求此球靜止前所經之距離爲多少公尺？

【代碼】a53b02m2

11 老師講解

將下列循環小數化爲最簡分數：

(1) $0.\overline{7}$　(2) $0.\overline{341}$

(3) $0.5\overline{26}$　(4) $2.45\overline{68}$

11 學生練習

將下列循環小數化爲最簡分數：

(1) $0.\overline{34}$　(2) $0.10\overline{24}$

【代碼】a53b03m2

【學生練習答案】

1. (1) $\frac{5}{2}$　(2) 0	2. $\frac{13}{6}$	3. -2	4. $-\frac{3}{4}$
5. (1) 0　(2) ∞ (不存在)	6. $\frac{1}{64}$	7. $\frac{10}{7}$	8. $\frac{1}{6}$
9. -8	10. 120	11. (1) $\frac{34}{99}$　(2) $\frac{169}{1650}$	

回家功課

( ) 1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n})$ 之值？ (A)不存在 (B)0 (C)1 (D)-1 。 代碼：c12087y1

( ) 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})=$ (A)0 (B)$\frac{1}{2}$ (C)1 (D)∞ 。 代碼：c12209m1

( ) 3. 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-n}}=?$ (A)$\frac{1}{4}$ (B)$\frac{1}{2}$ (C)2 (D)4 。 代碼：c12094k1

( ) 4. 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3^n-1}{2^n-3^n}+\frac{3n^2+2n}{5n^2+1})=$ (A)$-\frac{2}{5}$ (B)$\frac{2}{5}$ (C)$-\frac{3}{5}$ (D)$\frac{3}{5}$ 。 代碼：c12213m1

( ) 5. 設 $x=\frac{1}{5}$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-5}{x^n+5}=a$；設 $x=-5$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-2}{x^n+2}=b$，則 $a+2b=$？ 代碼：c12214m1
(A)-1 (B)1 (C)2 (D)3 。

( ) 6. 無窮級數 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k+1}}+\cdots=$？ 代碼：a53099k1
(A)$\frac{41}{24}$ (B)$\frac{59}{24}$ (C)$\frac{5}{2}$ (D)$\frac{7}{2}$ 。

( ) 7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(\frac{2}{3})^k$ 之值為 (A)2 (B)4 (C)6 (D)8 。 代碼：a53208m1

( ) 8. 若無窮等比級數 $x+2x^2+4x^3+8x^4+\cdots=\frac{2}{3}$，則 $x=$？ 代碼：a53098s1
(A)$\frac{2}{7}$ (B)$\frac{1}{2}$ (C)$\frac{1}{3}$ (D)$\frac{3}{5}$ 。

( ) 9. 試求無窮級數 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}=$？ (A)$\frac{2}{3}$ (B)8 (C)$\frac{21}{2}$ (D)∞ 。 代碼：a53097s1

( ) 10. 無窮級數 $\frac{3}{5}+\frac{5}{5^2}+\frac{9}{5^3}+\cdots+\frac{2^n+1}{5^n}+\cdots$ 的和為多少？ 代碼：a53093s1
(A)$\frac{2}{3}$ (B)$\frac{3}{4}$ (C)$\frac{5}{6}$ (D)$\frac{11}{12}$ 。

答案：DBAAB ACACD

主題二　積分與其應用

1.不定積分：

(1) **反導函數**：設 $F(x)$ 的導函數為 $f(x)$，則 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數。

(2) **不定積分**：

①若 $F=x^2+x$、$F_1=x^2+x+2$、$F_2=x^2+x+\sqrt{3}$，則 F, F_1, F_2 的導函數都是 $2x+1$，

故 F, F_1, F_2 都是 $2x+1$ 的反導函數，也就是 $F+c$ (c 為常數)皆為 $2x+1$ 的反導函數。

②設 c 為常數，若 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數，則 $F(x)+c$ 稱為 $f(x)$ 的不定積分，

以符號 $\int f(x)\,dx$ 表示，記作 $\int f(x)\,dx=F(x)+c$　(c 為常數)，

其中 $\int$ 為積分符號，$f(x)$ 稱為被積分函數。

(3) **不定積分的公式**：

①$\int k\,dx=kx+c$　(k 為常數)　　②$\int x^n dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+c$

③$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$　　④$\int [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$

1 老師講解

求下列各不定積分：

(1) $\int (x^2+2x-3)\,dx$　　(2) $\int (\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}})\,dx$

1 學生練習

求下列各不定積分：

(1) $\int (2x^3-3x^2+4x+1)\,dx$　　(2) $\int \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

【代碼】c21a01m2

2 老師講解

求下列各不定積分：

(1) $\int (x+2)(x-1)\,dx$　　(2) $\int \dfrac{x^3+1}{x^2}\,dx$

2 學生練習

求下列各不定積分：

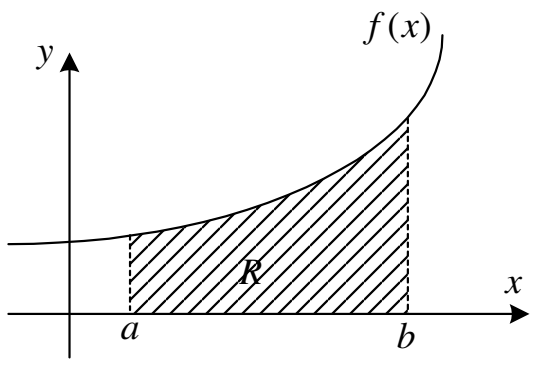
(1) $\int (3x+1)^2\,dx$　　(2) $\int \dfrac{3x^3-2x^2+x}{x}\,dx$

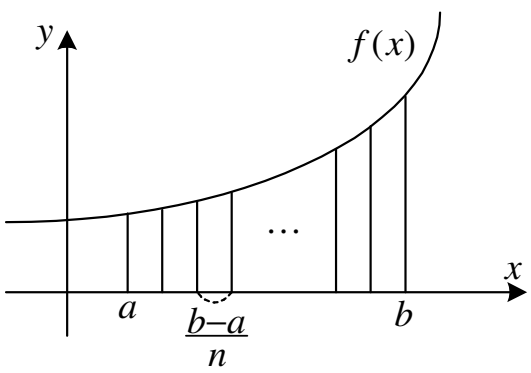
【代碼】c21a01m3

2.定積分：

(1) **黎曼和與定積分**：

設函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 之間為連續函數，且 $f(x)\geq 0$，則函數 $f(x)$ 與 x 軸、$x=a$、$x=b$ 所圍成的區域 R 的面積，可由下列步驟求得：

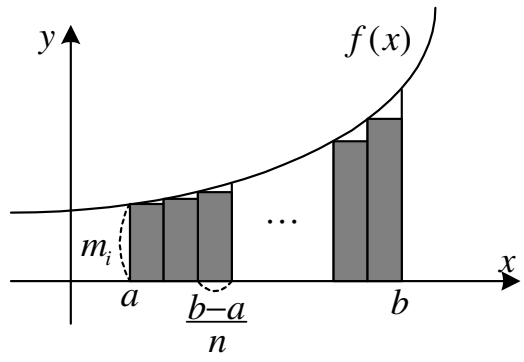




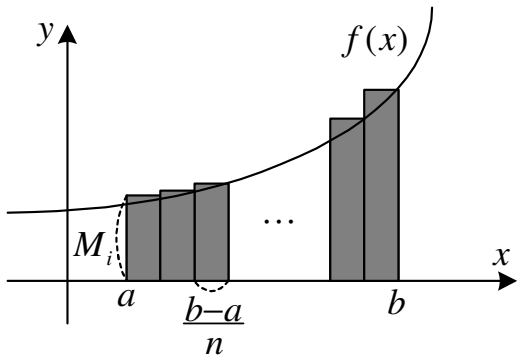
①將 $\overline{ab}$ 分成 n 等分，每一等分長為 $\dfrac{b-a}{n}$

②在每一等分中取 $f(x)$ 之最大值 M_i 及最小值 m_i

③如下圖(一)之矩形面積總和稱為下和(L_n)，下圖(二)之矩形面積總和稱為上和(M_n)，且 $L_n\leq R\leq M_n$。



圖(一)



圖(二)

④當 $n\to\infty$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty}L_n\leq R\leq\lim\limits_{n\to\infty}M_n$，此時 $\lim\limits_{n\to\infty}L_n$、$\lim\limits_{n\to\infty}M_n$ 所求得的極限值相同，

故 $R=\lim\limits_{n\to\infty}L_n=\lim\limits_{n\to\infty}M_n$，此極限值 R 即 $f(x)$ 與 x 軸、$x=a$、$x=b$ 所圍成的區域面積，稱為函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定積分，記作 $\int_a^b f(x)\,dx$，其中 a、b 分別表定積分的下限和上限。

⑤若 $f(x)>0$，$y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 與 x 軸所圍成面積為 $\int_a^b f(x)\,dx$

(2) **定積分性質**：

設 $f(x)$、$g(x)$ 為多項式函數，k 為常數

① $\int_a^a f(x)\,dx=0$

② $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

③ $\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx$

④ $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

⑤ $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$ (其中 $a<c<b$)

(3) **定積分計算**：

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 為連續函數，且 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數，即 $F'(x)=f(x)$，

則 $\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$。

3 老師講解

求定積分 $\int_{-1}^{2}(x-1)(x+1)\,dx$ 之值。

3 學生練習

求定積分 $\int_{-1}^{2}x(4-3x)\,dx$ 之值。

【代碼】c21a02m2

4 老師講解

求定積分 $\int_{0}^{1}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})\,dx$ 之值。

4 學生練習

求定積分 $\int_{1}^{4}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 之值。

【代碼】c21a02m3

5 老師講解

求定積分 $\int_{1}^{4}\frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ 之值。

5 學生練習

求定積分 $\int_{1}^{3}\frac{x^4+3x^2-3}{x^4}\,dx$ 之值。

【代碼】c22b01m2

(4) **代換積分法：**

令 $u=g(x)$，則 $du=g'(x)dx$，故 $\int [f(g(x))\times g'(x)]\,dx=\int f(u)\,du$

6 老師講解

求下列定積分之值：

(1) $\int_0^2 (2x-3)(x^2-3x+3)^2\,dx$

(2) $\int_1^3 (2x-3)^3\,dx$

(3) $\int_1^{\sqrt{5}} x\sqrt{2x^2-1}\,dx$

(4) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+3)^2}\,dx$

6 學生練習

求下列定積分之值：

(1) $\int_0^1 (x^3+2)^3 3x^2\,dx$　(2) $\int_{-3}^2 (x+3)^4\,dx$

(3) $\int_0^2 \frac{x+1}{(x^2+2x-5)^3}\,dx$　(4) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

【代碼】c22b02m2

(5) **定積分的幾何意義與面積關係：**

①若多項式 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間內，函數 $f(x)\geq 0$ 恆成立，

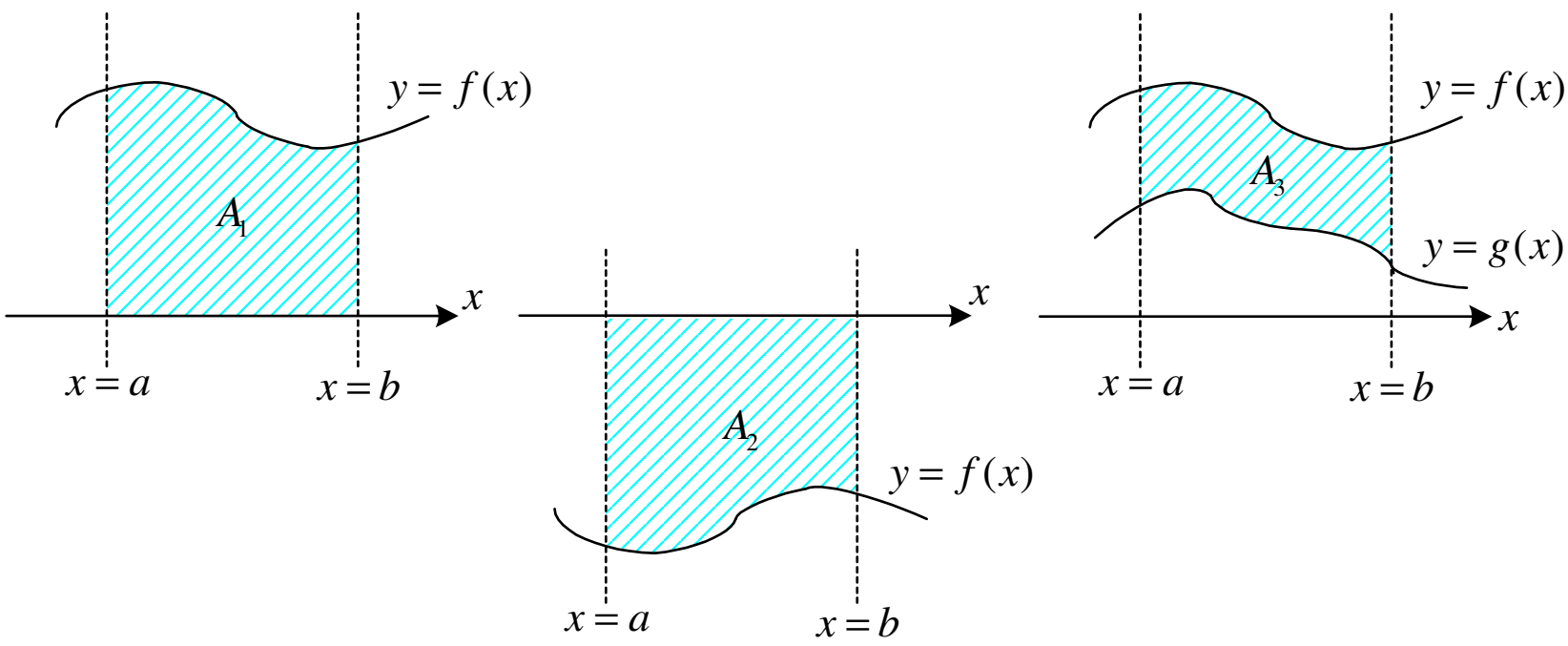
則 $f(x)$ 的圖形與 x 軸，$x=a$，$x=b$，所圍成的面積為 $\int_a^b f(x)\,dx$ (如下圖 A_1)

②若多項式 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 區間內，函數 $f(x)\leq 0$ 恆成立，

則 $f(x)$ 的圖形與 x 軸，$x=a$，$x=b$，所圍成的面積為 $-\int_a^b f(x)\,dx$ (如下圖 A_2)

③在 $[a,b]$ 區間內，若 $f(x)$ 恆大於或等於 $g(x)$，

則 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 在 $[a,b]$ 區間內所圍成面積為 $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$ (如下圖 A_3)



老師講解

利用幾何圖形的面積求定積分 $\int_{-1}^{2}|x|\,dx$。

學生練習

利用圖形面積求定積分 $\int_{-1}^{3}|x-1|\,dx$。

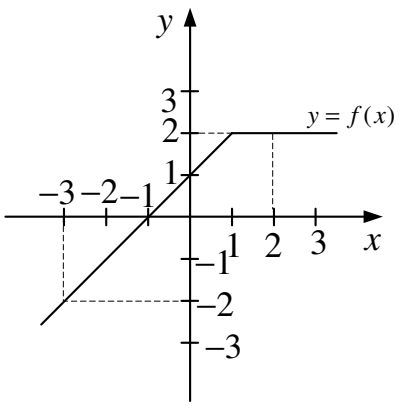
【代碼】c22a01m2

8 老師講解

函數 $f(x)$ 的圖形如右所示，
求下列各式之值。

(1) $\int_{-3}^{2}|f(x)|dx$

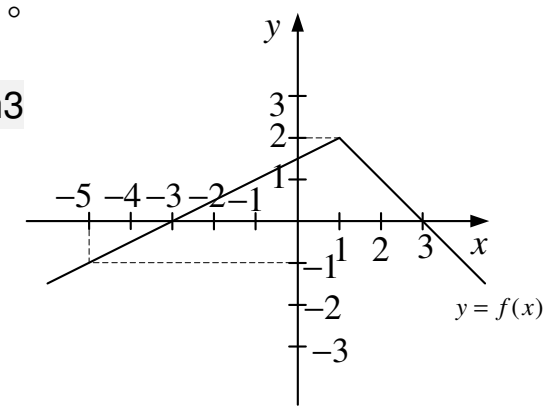
(2) $\int_{-3}^{2}f(x)dx$



8 學生練習

函數 $f(x)$ 的圖形如右所示，
求 $\int_{-5}^{3}f(x)dx$ 之值。

【代碼】c22a01m3



9 老師講解

已知 $\int_{1}^{2}f(x)dx=5$，$\int_{2}^{5}f(x)dx=4$，
$\int_{1}^{8}g(x)dx=2$，$\int_{8}^{5}g(x)dx=3$，
求 $\int_{1}^{5}[2f(x)+3g(x)]dx$ 之值。

9 學生練習

已知 $\int_{1}^{6}f(x)dx=9$，$\int_{6}^{4}f(x)dx=2$，
求 $\int_{1}^{4}f(x)dx$ 之值。

【代碼】c22a01m4

10 老師講解

求 $f(x)=y=4x+x^2$ 與 x 軸所圍面積。

10 學生練習

求 $f(x)=y=x^2-x$ 與 x 軸所圍面積。

【代碼】c22a02m3

11 老師講解

求 $y=-x^2+1$ 與 $y=0$ 、 $x=0$ 、 $x=1$ ，所圍成之面積。

11 學生練習

求直角坐標平面上之 $y=x^2$ ， $x=1$ ， $x=3$ ， $y=0$ 所圍成之面積。

【代碼】c22a02m2

12 老師講解

求 $y=x^2-1$ 與 $y=x+1$ 所圍圖形面積。

12 學生練習

求 $y=x^2$ 與 $y=2x+3$ 所圍面積。

【代碼】c22a03m2

【學生練習答案】

1. (1) $\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+x+c$ (2) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+c$		2. (1) $3x^3+3x^2+x+c$ (2) x^3-x^2+x+c	
3. -3	4. 2	5. $\frac{82}{27}$	
6. (1) $\frac{65}{4}$ (2) 625 (3) $-\frac{4}{225}$ (4) 1		7. 4	8. 5
9. 11	10. $\frac{1}{6}$	11. $\frac{26}{3}$	12. $\frac{32}{3}$

回家功課

( ) 1. 求 $\int_{-1}^{1}(2x+1)(x+1)dx=$？ (A) $\frac{4}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{10}{3}$ (D) 5 。 代碼：c21093k1

( ) 2. 試求 $\int_{1}^{27}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx=$？ (A) 3 (B) 6 (C) 8 (D) 12 。 代碼：c21096k1

( ) 3. 定積分 $\int_{1}^{4}\frac{x^2+4}{\sqrt{x}}dx$ 的值等於 代碼：c21205m1

(A) $\frac{10}{3}$ (B) $\frac{34}{5}$ (C) $\frac{58}{5}$ (D) $\frac{102}{5}$ 。

( ) 4. 試求定積分 $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=$ 代碼：c21091k1

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

( ) 5. $\int_{0}^{4}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx=$？ (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 。 代碼：c21092k1

( ) 6. 試求 $\int_{-1}^{1}|x^3|dx$？ (A) 0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 。 代碼：c21095k1

( ) 7. 已知 $\int_{1}^{2}f(x)dx=1$，$\int_{2}^{4}f(x)dx=3$，$\int_{1}^{2}g(x)dx=2$，$\int_{2}^{4}g(x)dx=5$， 代碼：c22097k1

試求 $\int_{1}^{4}(2f(x)+g(x))dx=$？

(A) 13 (B) 15 (C) 17 (D) 23 。

( ) 8. 平面上曲線 $y=x^2$ 與直線 $y=1$ 所圍成的區域面積為何？ 代碼：c22091k1

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{4}{3}$ 。

( ) 9. 若 S 為拋物線 $y=x^2+4x-5$ 與 x 軸所圍成的封閉區域，則 S 的面積為何？ 代碼：c22092k1

(A) 24 (B) 27 (C) 32 (D) 36 。

( ) 10. 在坐標平面上由拋物線 $y=x(2-x)$ 與 x 軸所圍成的區域面積為何？ 代碼：c22096k1

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{8}{3}$ (C) 2 (D) 4 。

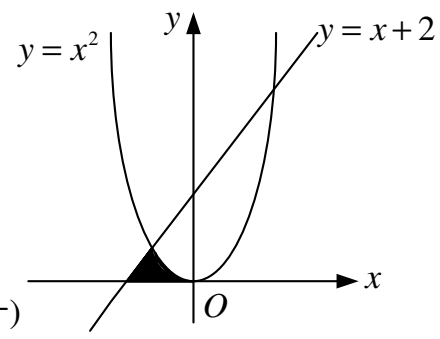
答案：CDDAA CBDDA

歷屆試題

( ) 1. 若無窮等比級數 $(0.4)+(0.4)^2+(0.4)^3+\cdots+(0.4)^n+\cdots$ 的和為 a，無窮等比級數 $(0.2)+(0.2)^2+(0.2)^3+\cdots+(0.2)^n+\cdots$ 的和為 b，則 $\frac{a}{b}=$？ (A) $\frac{4}{3}$ (B) 2 (C) $\frac{8}{3}$ (D) 4。 代碼：a53100k1 (100 年統測 C)

( ) 2. 設 $f(x)=\sqrt{2x-1}$，且 $f''(x)$ 為 $f(x)$ 的二階導函數，則 $\int_1^5 f''(x)dx=$？ (A) $-\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$。 代碼：c21100k1 (100 年統測 C)

( ) 3. 求圖(一)陰影部分之面積為何？ (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{5}{6}$ (C) 1 (D) $\frac{4}{3}$。 代碼：c22100k1 (100 年統測 C)



圖(一)

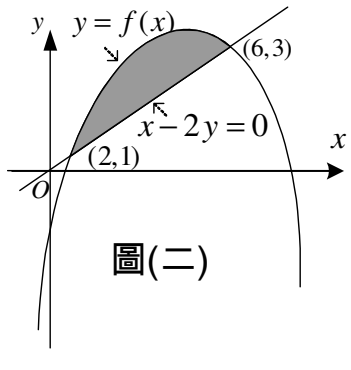
( ) 4. 求無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^{n+1}$ 之和？ (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{6}$。 代碼：a53101s1 (101 年統測 B)

( ) 5. 若函數 $f(x)$ 的導函數為 $f'(x)=3x^2+6x$ 且 $f(1)=3$，則 $\int_0^2 f(x)dx$ 之值為何？ (A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 20。 代碼：c21101k1 (101 年統測 C)

( ) 6. 已知無窮等比級數 $10+\frac{10}{1.001}+\frac{10}{1.001^2}+\cdots+\frac{10}{1.001^n}+\cdots$ 之和為 P，則 P 之值為何？ (A) 10000 (B) 10010 (C) 10100 (D) 11000。 代碼：a53102s1 (102 年統測 B)

( ) 7. 求 $\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{3}{2}}(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3})dx=$？ (A) $\frac{97}{36}$ (B) $\frac{49}{18}$ (C) $\frac{17}{6}$ (D) $\frac{26}{9}$。 代碼：c21102k1 (102 年統測 C)

( ) 8. 已知 $y=f(x)$ 與 $x-2y=0$ 相交於 $(2,1)$、$(6,3)$ 兩點，如圖(二)若陰影部份的面積為 $\frac{16}{3}$ 且 $\int_0^2 f(x)dx=\frac{-13}{3}$，則 $\int_0^6 f(x)dx=$？ (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10。 代碼：c22102k1 (102 年統測 C)



圖(二)

( ) 9. 已知循環小數 $0.\overline{9}=0.9999\cdots$，令 $a=0.\overline{9}\times 0.9$，則下列何者正確？ (A) $a<0.8\overline{9}$ (B) $a=0.8\overline{9}$ (C) $a<0.9$ (D) $a>0.9$。 代碼：a53103s1 (103 年統測 B)

( ) 10. 求定積分 $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}(\pi^2x+\pi)\,dx=$？ (A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C) $\frac{9}{2}$ (D) $\frac{11}{2}$。 代碼：c21103s1 (103 年統測 B)

( ) 11. 設 $f(x)=2x^2-3$，$g(x)=3-x^2$，則定積分 $\int_{-3}^{3}[f(x)-g(x)]\,dx$ 之值爲何？ (A) 0 (B) 18 (C) 42 (D) 54。 代碼：c21103k1 (103 年統測 C)

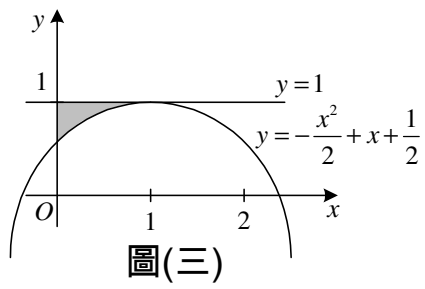
( ) 12. 曲線 $y=f(x)=3x^2+2x+1$ 在 $x=1$、$x=3$ 之間與 x 軸所圍成之區域的面積爲何？ (A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 36。 代碼：c22104s1 (104 年統測 B)

( ) 13. 求 $\int_{-3}^{3}(1-2x)(1+2x)\,dx=$？ (A) -66 (B) -33 (C) 33 (D) 66。 代碼：c21104k1 (104 年統測 C)

( ) 14. 由 $y=-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$, $y=1$ 和 $x=0$ 所圍成的區域，如圖(三)陰影部分，則此區面積可由下列何式求得？ 代碼：c22104k1 (104 年統測 C)

(A) $\int_0^1(-\frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{2})dx$ (B) $\int_0^1(\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2})dx$

(C) $\int_0^1(-\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2})dx$ (D) $\int_0^1(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2})dx$。



圖(三)

( ) 15. 試求曲線 $y=-x^2+1$ 在 $x=-1$、$x=2$ 之間與 x 軸所圍成區域的面積。 (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $\frac{7}{3}$ (D) $\frac{8}{3}$。 代碼：c22105s1 (105 年統測 B)

( ) 16. 試求定積分 $\int_{-1}^{3}|2x-1|\,dx$ 之值＝？ (A) $\frac{15}{2}$ (B) $\frac{17}{2}$ (C) $\frac{19}{2}$ (D) $\frac{21}{2}$。 代碼：c21105k1 (105 年統測 C)

( ) 17. 設 $f(x)=x^3+3x^2$、$g(x)=4$，則兩函數 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 之圖形所圍成的封閉區域面積爲何？ (A) $\frac{11}{4}$ (B) $\frac{27}{4}$ (C) $\frac{91}{4}$ (D) $\frac{221}{4}$。 代碼：c22105k1 (105 年統測 C)

( )18. 求定積分$\int_0^2 6x(x^2-1)^2dx$之值 (A)24 (B)26 (C)28 (D)30。 代碼：c21106s1 (106 年統測 B)

( )19. 設$f(x)$爲多項式函數，若$\int_1^3 f(x)\,dx=1$、$\int_2^5 f(x)\,dx=4$且$\int_2^3 f(x)\,dx=2$，則$\int_1^5 f(x)\,dx=$？ (A)1 (B)3 (C)5 (D)7。 代碼：c22106k1 (106 年統測 C)

( )20. $\int_{-4}^0 |2x+5|\,dx=?$ (A)$\frac{17}{2}$ (B)8 (C)$\frac{17}{4}$ (D)4。 代碼：c22107k1 (107 年統測 C)

( )21. 若函數$f(x)$的導函數$f'(x)=x^2-2x-3$，且$f(0)=6$，則$f(x)$的相對極小值爲何? (A)-5 (B)-4 (C)-3 (D)-2。 代碼：c21107k1 (107 年統測 C)

( )22. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}(4x-1)^3dx=?$ (A)$\frac{1}{16}$ (B)$\frac{1}{12}$ (C)$\frac{1}{4}$ (D)$\frac{1}{3}$。 代碼：c21107k2 (107 年統測 C)

( )23. 在理想環境下，將一球自離地面30公尺處垂直落下，球只會上下垂直來回彈跳。若每次反彈高度爲前一次高度的$\frac{2}{5}$，則此球靜止前所經過的路程爲多少公尺? (A)50 (B)60 (C)70 (D)80。 代碼：a53108s1 (108 年統測 B)

( )24. 設函數$f(x)=3x^2+2x+1$。試問曲線$y=f(x)$在$x=1$及$x=2$之間與x軸所包圍之區域的面積爲何? (A)5 (B)7 (C)9 (D)11。 代碼：c22108s1 (108 年統測 B)

( )25. 計算$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})=?$ (A)$\frac{3}{2}$ (B)1 (C)$\frac{1}{2}$ (D)$\frac{1}{8}$。 代碼：c12108k1 (108 年統測 C)

( )26. 已知$F(x)=\frac{d}{dx}[\int_1^x(t^2+1)dt]$，則$F(1)=?$ (A)-1 (B)0 (C)1 (D)2。 代碼：c21108k1 (108 年統測 C)

( )27. 求$\int_{-2}^{2}(30x^5-16x^7-20x^3)dx=?$ (A)-192 (B)-6 (C)0 (D)192。 代碼：c21109s1 (109 年統測 B)

( ) 28. 設 $g(x)=2x-1$，已知在閉區間 $[-1,1]$ 上 $f(x)\geq 1$ 且 $\int_{-1}^{1} f(x)dx=5$，則此兩曲線 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 在閉區間 $[-1,1]$ 所圍成區域的面積爲何?
(A)4 (B)5 (C)6 (D)7 。
代碼：c22109k1
(109 年統測 C)

( ) 29. 若 $f(x)=(x^2+1)^{100}$，則 $\int_0^1[2x+f(x)]dx+\int_1^3 f(x)dx+\int_3^0 f(x)dx=?$
(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 。
代碼：110tcb23
(110 年統測 B)

( ) 30. $\int_1^3(3x-2)^{110}dx=?$
(A)$\frac{7^{111}-1}{333}$ (B)$\frac{3^{111}-1}{333}$ (C)$\frac{7^{110}-1}{330}$ (D)$\frac{7^{111}-1}{111}$ 。
代碼：110tcc17
(110 年統測 C)

( ) 31. $\int_1^4(x+\frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x}-\frac{1}{x})dx=?$ (A)$\frac{57}{5}$ (B)$\frac{77}{5}$ (C)$\frac{87}{5}$ (D)$\frac{107}{5}$ 。
代碼：110tcc23
(110 年統測 C)

( )
32. 不定積分 $\int\frac{x+3}{2\sqrt{x}}dx=?$ (A)$\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{-1}{2}}+C$ (B)$\frac{\frac{x^3}{2}+3x}{x^{\frac{3}{2}}}+C$
(C)$\frac{\frac{x^2}{2}+3x}{\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}}+C$ (D)$\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}+C$ 。
代碼：111tcc19
(111 年統測 C)

( ) 33. 小明計畫由基隆沿國道一號開車南下高雄渡假。早上 8:00 經過中興隧道 0 公里處的起點，經紀錄儀錶板上車速變化，在 8:00 開始後，時間 t(小時) 的速度函數爲 $v(t)=-1.5t^2+6t+90$ (公里 / 小時)。若依此速度變化，則 11:00 時小明應該最接近哪一個服務區？
(A)泰安服務區 (158 公里處) (B)西螺服務區 (229 公里處)
(C)新營服務區 (284 公里處) (D)仁德服務區 (335 公里處) 。
代碼：111tcc20
(111 年統測 C)

答案：CABDA BDCBA BDADD BBCBA CACDA DCDBA ADC

綜合練習

( ) 1. 關於下列各極限，何者正確？ (A) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{5^n}=1$ 代碼：c12099k1

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100n+9}{n^2+5n-1}=0$ (C) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0.01n}{5n-1}=0$ (D) $\lim\limits_{n\to\infty}n-\sqrt{n^2-1}=1$ 。

( ) 2. 試求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n(1+2+3+\cdots+n)}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ ？ (A) 0 (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) 1 (D) $\dfrac{3}{2}$ 。 代碼：c12095k1

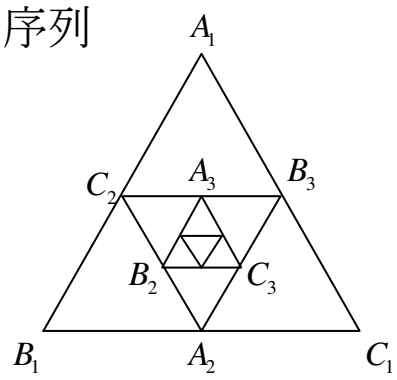
( ) 3. 無窮等比級數 $2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{9}{8}-\dfrac{27}{32}+\cdots\cdots$ 的和爲多少？ 代碼：a53092s1

(A) $\dfrac{4}{7}$ (B) $\dfrac{8}{7}$ (C) $\dfrac{7}{2}$ (D) 8 。

( ) 4. 求無窮等比級數 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}+3}+\cdots=$ ？ 代碼：a53099s1

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{5\sqrt{3}}{12}$ (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 。

( ) 5. 已知正三角形 $\Delta A_1B_1C_1$ 的邊長爲10公分，以此三角形各邊中點爲頂點之 $\Delta A_2B_2C_2$ 也是正三角形，如此繼續下去，得到一序列的正三角形 $\Delta A_1B_1C_1$，$\Delta A_2B_2C_2$，$\Delta A_3B_3C_3$，…，求這些正三角形 $\Delta A_1B_1C_1$，$\Delta A_2B_2C_2$，$\Delta A_3B_3C_3$，…的面積和 代碼：a53211m1



(A) $\dfrac{200\sqrt{3}}{3}$ (B) $\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ (C) $\dfrac{50\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ 。

( ) 6. 無限級數 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2+3k+2}$ 之和爲 (A) 1 (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{1}{3}$ (D) 2 。 代碼：a54201m1

( ) 7. 試求無窮級數 $1+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5^2}+\dfrac{4}{5^3}+\cdots$ 之和 (A) 1 (B) $\dfrac{5}{4}$ (C) $\dfrac{25}{16}$ (D) $\dfrac{5}{16}$ 。 代碼：a53240m1

( ) 8. 設 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 為一無窮數列，若 $a_n=\dfrac{2^n+(-1)^n}{5^n}$，則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=$ ？ 代碼：a53094s1

(A) $\dfrac{1}{5}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $\dfrac{2}{3}$ (D) $\dfrac{5}{6}$ 。

( ) 9. $\int_0^2 |x^2-1|\,dx$ 之值爲 (A)$\frac{8}{3}$ (B)$\frac{2}{3}$ (C)2 (D)$\frac{1}{3}$。 代碼：c21204m1

( ) 10. 已知 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)=9x^2-8x+5$ 且 $f(1)=3$，求 $f(2)=$？ 代碼：c21203m1
(A)5 (B)17 (C)11 (D)4。

( ) 11. 已知 $\int_a^b f(x)dx=6$，$\int_a^b g(x)dx=12$，$\int_a^b h(x)dx=4$， 代碼：c22098k1
且 $\int_a^b (mf(x)+ng(x))dx=13$，$\int_a^b (mg(x)-nh(x))dx=5$，則 $6m+8n=$？
(A)6 (B)8 (C)10 (D)12。

( ) 12. 已知 $\int_0^x f(t)dt=x^2$ 與 $\int_1^x g(t)dt=2x-2$，則 $f(x)+g(x)=$？ 代碼：c21093k2
(A) $2x+2$ (B) x^2-2x (C) x^2+2x-2 (D) x^3+x^2-2x。

( ) 13. 求曲線 $y=\sqrt{x-1}$，直線 $x=5$ 與 x 軸所圍成的封閉區域面積爲何？ 代碼：c22093k1
(A)2 (B)$\frac{8}{3}$ (C)$\frac{10}{3}$ (D)$\frac{16}{3}$。

( ) 14. 函數 $f(x)=1-x^2$ 的圖形與 x 軸在區間 $[0,2]$ 所圍區域面積爲何？ 代碼：c22098k2
(A)$-\frac{2}{3}$ (B)$\frac{2}{3}$ (C)$\frac{4}{3}$ (D)2。

( ) 15. 設 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上爲一連續函數，其中 $a<b$，則下列敘述何者<u>錯誤</u>？ 代碼：c21099k1
(複選，有2個答案)
(A) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
(B) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$，其中 k 爲任意常數
(C)若 $a<b<c$，則 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
(D) $\int_a^b x^n dx=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$，其中 n 爲任意常數。

答案：BDBDB BCBCB CADD 第 15 題(CD)