單元 1　坐標系與函數圖形

主題一　數與數系

1. 有理數的定義與運算：

(1) 定義：

凡是能化成 $\frac{q}{p}$ (p,q 皆為整數，且 $p\neq 0$)形式的數，稱為有理數。

(2) 有理數化成小數：

一個分數(有理數)必可化成整數、有限小數、循環小數。反之整數、有限小數、循環小數都可以化成分數。

(3) 封閉性：

任意兩個有理數對加、減、乘、除(分母 $\neq 0$)四則運算後，仍為有理數。
設 a,b,c,d 均為整數， $a\neq 0$ 、 $c\neq 0$ ，則

① $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}$　② $\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{ac}$　③ $\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$　④ $\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{bc}{ad}$　$(d\neq 0)$

(4) 稠密性：

任兩相異有理數之間，至少可以找到一個有理數，即有理數在數線上的分布可以說是密密麻麻，到處都是。

1 老師講解

下列何者可化爲有限小數？
(A) $\frac{53}{88}$　(B) $\frac{73}{256}$　(C) $\frac{161}{560}$　(D) $\frac{149}{40\times 12}$
(E) $\frac{77}{25^7}$

1 學生練習

試判斷下列哪個分數可化爲有限小數？
(A) $\frac{54321}{180}$　(B) $\frac{3678}{375}$　(C) $\frac{324}{52}$　(D) $\frac{909}{525}$

【代碼】f11a02m3

2 老師講解

設$\dfrac{4}{7}$化為小數後，

$f(n)$表小數點以下第n位的數字，求

(1) $f(33)=$？

(2) $f(2015)=$？

(3) $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(100)=$？

2 學生練習

設$\dfrac{5}{13}$化為小數後，

設小數點以下第n位的數字為$f(n)$，求

(1) $f(1000)=$？

(3) $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(50)=$？

【代碼】f11a02m4

2. 無理數的定義與運算：

(1) ① 在實數中不是有理數的數稱為無理數。

② 不循環的無限小數稱為無理數，

如：$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、π、…。

$$\text{小數}\begin{cases}\text{有限小數}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{有理數}\\ \text{無限小數}\begin{cases}\text{有循環}\cdots\text{有理數}\\ \text{不循環}\cdots\text{無理數}\end{cases}\end{cases}$$

(2) 若a,b為有理數，$\sqrt{c}$為無理數，若$a+b\sqrt{c}=0$，則$a=b=0$

若a,b,c,d為有理數，$\sqrt{p}$為無理數，若$a+b\sqrt{p}=c+d\sqrt{p}$，則$a=c$，$b=d$。

3 老師講解

設 a 與 b 都是有理數，
且 $\sqrt{5}(a+\sqrt{5})+b(1-2\sqrt{5})=2+4\sqrt{5}$，
求 $a+b$ 之值。

3 學生練習

設 x 與 y 都是有理數，
且 $(3+\sqrt{2})x+(4-3\sqrt{2})y=10-\sqrt{2}$，
求 $x+y$ 之值。

【代碼】f11a04m2

(3) 平方根與立方根：

若 a 為一個正實數，若 $x^2=a$，則 x 為 a 的平方根，記作 $x=\pm\sqrt{a}$

若 b 為一個實數，若 $x^3=b$，則 x 為 b 的立方根，記作 $x=\sqrt[3]{b}$

(4) 根式運算：

根式的加減法：須先將根式化簡後，再將同類根式作加減計算。

例：$x\sqrt{3}+y\sqrt{3}-z\sqrt{3}=(x+y-z)\sqrt{3}$

根式的乘除法：必須是同次根式才可以作乘除的計算。

例：$x\sqrt{a}\cdot y\sqrt{b}=xy\sqrt{ab}$

4 老師講解

試化簡下列各式：

(1) $8\sqrt{3}+6\sqrt{12}-7\sqrt{48}$　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

(3) $5\sqrt[3]{7}-3\sqrt[3]{-56}+2\sqrt[3]{189}$

4 學生練習

試化簡下列各式：

(1) $\sqrt{3}+2\sqrt{12}-4\sqrt{48}$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

(3) $7\sqrt[3]{-16}+5\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}$

【代碼】f11a13m2

3.算幾不等式：

算術平均數不小於其幾何平均數，設 a_1，a_2，$a_3 \cdots\cdots a_n$，皆為正數

則 $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}$　（“=” 成立於 $a_1=a_2=a_3\cdots=a_n$ 時）

(1) $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$　（$a,b>0$，當 $\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ 時 $a=b$）

(2) $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$　（$a,b,c>0$，當 $\dfrac{a+b+c}{3}=\sqrt[3]{abc}$ 時 $a=b=c$）

5 老師講解

設 x、$y>0$，已知 $3x+2y=12$，試求 xy 之最大值。

5 學生練習

已知 x、y 均爲正實數，且 $x+3y=6$，試求 xy 之最大值。

【代碼】a32a01m2

6 老師講解

設 $x+y=6$，且 x、y 爲正實數，求 x^2y 的最大值爲____。

6 學生練習

設 $x+y+z=8$，求 x^2yz 的最大值爲？

【代碼】a32b01m2

7 老師講解

設 x、$y>0$，已知 $xy=8$，
試求 $2x+y$ 之最小值。

7 學生練習

已知 x、y 均為正實數，且 $xy=18$，
試求 $x+2y$ 之最小值。
【代碼】a32a01m3

8 老師講解

設 $x>-2$，且 $f(x)=3+x+\dfrac{4}{x+2}$，
則 $f(x)$ 最小值為_____。

8 學生練習

設 $x>3$，若 $g(x)=x+5+\dfrac{9}{x-3}$，
求 $g(x)$ 的最小值為？
【代碼】a32b02m2

【加強題】

已知一扇形的周長為16，求此扇形面積的最大值為________。

【學生練習答案】

1. (B)	2. (1) 6　(2) 227		3. 3
4. (1) $-11\sqrt{3}$　(2) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　(3) $6\sqrt[3]{2}$		5. 3	6. 64
7. 12	8. 14		

回家功課

( ) 1. 設 x 為 $0\sim9$ 的整數，若 $\dfrac{688x6}{45}$ 可化為有限小數，則 x 值為 代碼：f11b02m1

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 。

( ) 2. 設 $\dfrac{15}{a}$ 為最簡分數且 $\dfrac{15}{a}$ 可化為有限小數，若 $\dfrac{15}{a}$ 介於 $\dfrac{3}{4}$ 與1之間， 代碼：f11b05m2

則 $a=$ (A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20 。

( ) 3. $\sqrt{\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{4^2}+1}$ 等於 (A) $\dfrac{19}{20}$ (B) $\dfrac{21}{20}$ (C) $\dfrac{23}{20}$ (D) $\dfrac{25}{20}$ 。 代碼：f11101c1

( ) 4. 設 k 為一整數。已知 $\dfrac{k}{3}<\sqrt{31}<\dfrac{k+1}{3}$，則 $k=$ 代碼：f11102c1

(A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20 。

( ) 5. 設 x 、 y 、 z 均為正整數，若 $x+2y+3z=9$，則 xyz 的最大值為 代碼：a32203m1

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 。

( ) 6. 若 $xy=16$，且 x 、 y 皆為正數，則 $4x+y$ 之極小值為 代碼：a32202m1

(A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 32 。

( ) 7. 若 $x>-2$， $g(x)=4+x+\dfrac{1}{x+2}$，則 $g(x)$ 的最小值為 代碼：a32204m1

(A) 6 (B) 4 (C) 2 (D) 1 。

( ) 8. 一長為 20 的線段，繞成一長方形，此長方形面積最大為 代碼：a32206m1

(A) 24 (B) 25 (C) 21 (D)以上皆非 。

( ) 9. 設 x 、 y 為正數，且 $x+y=3$，則 x^2y 之最大值為 代碼：a32213m1

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

答案：CBBBB CBBD

主題二　數線上的幾何

1. 距離與分點公式：

(1) 兩點距離：

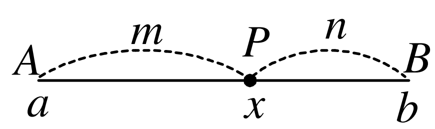
設 A 、 B 為數線上相異兩點，其坐標分別為 a 、 b ，則 A 與 B 的距離 $\overline{AB}=|a-b|$

註：若 O 是原點，則 $\overline{AO}=|a-0|=|a|$ 。

(2) 分點公式：

設 A 、 B 為數線上相異兩點，其坐標分別為 a 、 b ，若 P 在 $\overline{AB}$ 上， m,n 為正實數，

且 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$ ，則 P 點坐標為 $\dfrac{na+mb}{m+n}$ 。



1 老師講解

設數線兩點 $A(-10)$ 、 $B(6)$ ，若 $P(x)$ 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:5$，求 $x=$_____。

1 學生練習

設數線兩點 $A(5)$ 、 $B(-9)$ ，若 $P(x)$ 點在 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:4$，求 $x=$_____。

【代碼】f12a01m3

【加強題】

設數線兩點 $A(-4)$, $B(10)$ ，若 $P(x)$ 在 $\overleftrightarrow{AB}$ 直線上，且 $2\overline{AP}=5\overline{BP}$ ，則 $x=$_____。

2. 含絕對值的一次方程式與不等式：

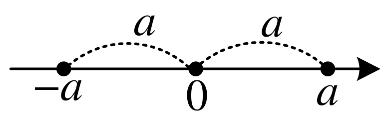
若 a 為正數：

(1) $|x|=a \Rightarrow x=a,-a$，如(圖一)

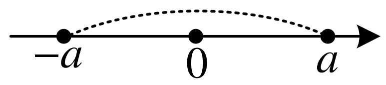
(2) $|x|<a \Rightarrow -a<x<a$，如(圖二)

(3) $|x|>a \Rightarrow x<-a, x>a$，如(圖三)

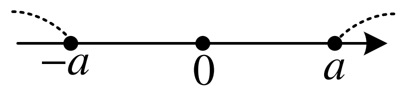
(圖一)



(圖二)



(圖三)



2 老師講解

試解下列各式：

(1) $|x-2|=5$ (2) $|x-1|<3$

(3) $|3x+4|\geq 5$ (4) $|5-2x|\leq 3$ 。

2 學生練習

(1) 試解不等式 $|x+2|>3$ 的範圍

(2) 試求 $|2x-3|\leq 4$ 的正整數解有幾個。

【代碼】a31a05m2

3 老師講解

(1) $1<|2x-3|<5$

(2) $3\leq|5-2x|<11$ 。

3 學生練習

(1) 解不等式 $1<|2x-5|\leq 7$

【代碼】f12a03m2

(2) 滿足 $7\leq|2-3x|<13$ 的整數 x 有幾個。

【代碼】f12a03m3

4 老師講解

(1) 若$|2x-a|<b$之x範圍爲$-1<x<7$，求a、b。

(2) 若$|ax+1|<b$之x範圍爲$-3<x<7$，求a、b。

(3) 若$|ax+1|>b$之x範圍爲$x<-1$或$x>9$，求a、b。

4 學生練習

(1) 設$a,b\in R$且不等式$|ax+1|<b$之解為$-2<x<3$，求a、b。
【代碼】f12a04m2

(2) 滿足不等式$|ax+2|\geq b$之x範圍為$x\geq 30$或$x\leq -10$，求a、b。
【代碼】f12a04m3

【學生練習答案】

1. -1	2. (1) $x<-5$，$x>1$　(2) 3	3. (1) $3<x\leq 6$或$-1\leq x<2$　(2) 4
4. (1) $a=-2$、$b=5$　(2) $a=-\frac{1}{5}$、$b=4$		

回家功課

(　　) 1. 數線上，$A(-2)$、$B(8)$，有一點 P 使 $3\overline{AP}=2\overline{BP}$，則 P 之坐標爲　　代碼：f12a01m5
(A) -22　(B) -23　(C) 3　(D) 4　。

(　　) 2. 若 $a<b$，$a,b\in Q$，且 $A=\dfrac{3a+2b}{5}$、$B=\dfrac{a+4b}{5}$、$C=\dfrac{3a+b}{4}$、$D=\dfrac{a+3b}{4}$，試比較 A,B,C,D 之大小次序。　代碼：f12b01m2
(A) $B>D>C>A$
(B) $C>A>D>B$　(C) $B>D>A>C$　(D) $D>B>A>C$　。

(　　) 3. 不等式 $|3x-5|<9$ 的解為整數者共有多少個？　　代碼：a31093s1
(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6　。

(　　) 4. $|-3x+5|\le 7$ 之解為　　代碼：a31214m1
(A) $-4\le x\le\dfrac{2}{3}$　(B) $x\ge 4$ 或 $x\le -\dfrac{2}{3}$
(C) $-\dfrac{2}{3}\le x\le 4$　(D) $x\ge\dfrac{2}{3}$ 或 $x\le -4$　。

(　　) 5. 不等式 $2\le|x+1|<6$ 的解為整數者，共有　　代碼：a31218m1
(A) 7　(B) 8　(C) 9　(D) 10 個　。

(　　) 6. 設 $k\in R$，若 $|2x+1|<k$ 的解爲 $-2<x<1$，則 $k=$　　代碼：f12405m1
(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6　。

(　　) 7. 不等式 $|-2x+a|>b$ 之解爲 $x>4$ 或 $x<-1$，則求 $a+b=$　　代碼：f12406m1
(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 10　。

答案：ACDDB　AC

主題三　平面坐標系

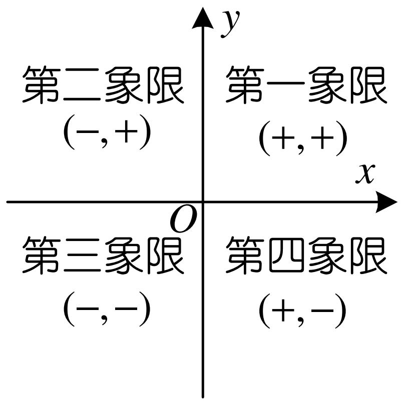
1. 直角坐標：

(1) 作兩條互相垂直而且有共同原點的數線，這兩條數線所在的平面。

① x 軸(橫軸)：水平的數線；向右爲正向，左爲負向。

② y 軸(縱軸)：鉛垂的數線；向上爲正向，下爲負向。

③ 原點：x 軸與 y 軸的交點；通常以英文大寫字母 O 來表示。



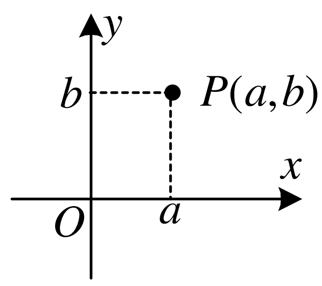
(2) 坐標平面上，x 軸與 y 軸，將坐標平面分成四個象限。

(3) 坐標平面上，任意一點 P 所對應的數對 (a,b)，

稱爲 P 點的坐標。

① a 稱爲 P 點的 x 坐標(橫坐標)

② b 稱爲 P 點的 y 坐標(縱坐標)



1 老師講解

若 a 、b 爲實數，點 $A(ab,a-b)$ 在第二象限，則點 $B(\frac{a}{b},ab^2)$ 在第幾象限？

1 學生練習

已知 a、b 爲實數，點 $P(a+b,a)$ 在第四象限，則點 $Q(ab,b-a)$ 在第幾象限？

【代碼】g11a01m2

2. 兩點距離：

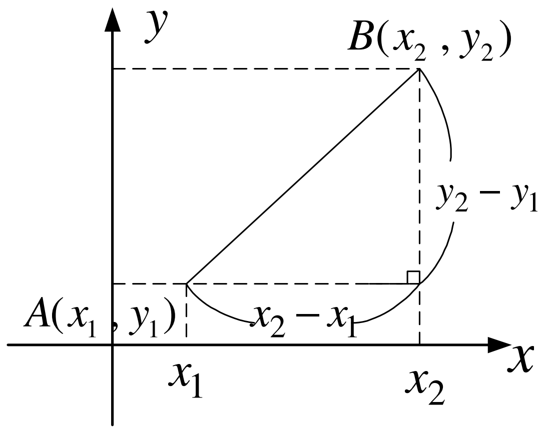
(1) 數線上的兩點距離：

數線上兩點 $P(a)$ 、 $Q(b)$ 的距離為 $\overline{PQ}=|a-b|$

(2) 坐標平面上的兩點距離：

設 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$ 為平面上兩點：

則 A 、 B 兩點之距離 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 。



2 老師講解

以 $A(2,3)$ ， $B(-3,2)$ ， $C(1,-2)$ 爲頂點的三角形形狀爲何？

2 學生練習

設 $A(-3,2)$ ， $B(1,8)$ ， $C(3,-2)$ 爲 ΔABC 的三頂點，則 ΔABC 爲
(A)直角三角形　(B)正三角形
(C)鈍角三角形　(D)等腰直角三角形。

【代碼】g11a01m4

3 老師講解

設 $A(3,-1)$ ， $B(-2,4)$ ，已知 P 爲 x 軸上一點，且 $\overline{AP}=\overline{BP}$ ，則求 P 點坐標爲何？

3 學生練習

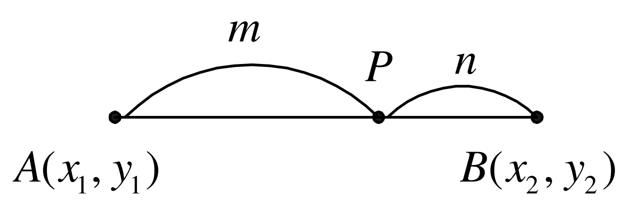
設 $A(-1,-7)$ ， $B(1,3)$ ，已知 Q 爲 y 軸上一點，且 $\overline{QA}=\overline{QB}$ ，則求 Q 點坐標。

【代碼】g11b01m2

3. 分點公式：

已知 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，設點 $P(x, y)$ 為 $\overline{AB}$ 上一點，

且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$ ，則 $P:\begin{cases} x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n} \\ y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n} \end{cases}$



4 老師講解

已知一線段 $\overline{AB}$ 中， $A(-2,4)$ 、 $B(7,-2)$ ，
$P\in\overline{AB}$ ，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$ ，
求 P 點坐標爲何？

4 學生練習

設 $A(11,7)$ 、 $B(1,2)$ ， $P\in\overline{AB}$ ，
且 $\overline{AB}:\overline{AP}=5:2$ ，求 P 點坐標爲何？

【代碼】g11a02m2

4. 中點公式：

設 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$ ，則 $\overline{PQ}$ 之中點 M 為 $(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$ 。

5 老師講解

設 $P(-1,a)$ 與 $Q(b,5)$ 爲一圓直徑上之
兩端點，且圓心爲 $(2,-3)$ ，求 $a+b$ 之值。

5 學生練習

若一直徑兩端點爲 $(-6,7)$ ， $(10,x)$ 且
圓心坐標爲 $(y,5)$ ，求 $x+y$ 之值。

【代碼】g11a02m3

6 老師講解

設平行四邊形 $ABCD$ 的三個頂點分別為 $A(3,4)$ 、 $B(2,-1)$ 、 $C(5,0)$ ，則求第四個頂點 D 的坐標為何？

6 學生練習

已知平行四邊形 $ABCD$ 的三個頂點為 $A(1,-2)$ 、 $B(5,4)$ 、 $C(7,1)$ ，求第四個頂點 D 的坐標為何？

【代碼】g11a02m4

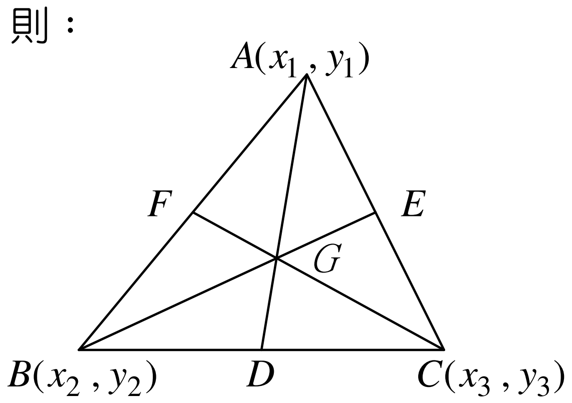
5. 重心公式：

ΔABC 中，設三頂點為 $A(x_1,y_1)$ 、 $B(x_2,y_2)$ 、 $C(x_3,y_3)$ ，則：

(1) ΔABC 之重心 $G(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3})$

(2) 重心性質：(三中線之交點)

$\Delta ABG=\Delta BCG=\Delta CAG=\dfrac{1}{3}\Delta ABC$ 。



7 老師講解

已知 ΔABC 中，$A(5,-3)$、$B(7,4)$、$C(3,5)$ ，則其重心坐標為何？

7 學生練習

已知 ΔABC 三頂點為 $A(2,15)$ 、 $B(4,-3)$ 、 $C(6,9)$ ，且其三邊中點分別為 D,E,F ，試求 ΔDEF 之重心坐標。

【代碼】g11a03m2

8 老師講解

ΔABC 中，$A(3,-1)$，若 $\overline{AB}$ 之中點爲 $M(2,3)$，重心 $G(3,4)$，則求 C 點坐標。

8 學生練習

ΔABC 中，$A(3,7)$，若 $\overline{AB}$ 之中點爲 $M(-1,1)$，重心 $G(2,-2)$，則求 C 點坐標。

【代碼】g11b04m2

6. 面積公式：

設 ΔABC 中，已知 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，則 ΔABC 之面積

$$\Delta ABC=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3|$$

9 老師講解

設三角形三頂點爲 $A(4,-1)$、$B(2,2)$、$C(-1,-3)$，求三角形面積爲何？

9 學生練習

設三角形三頂點爲 $A(-2,-1)$、$B(3,2)$、$C(4,-1)$，求三角形面積爲何？

【代碼】g11a03m3

【學生練習答案】

1. Q 在第二象限	2. (D)	3. $Q(0,-2)$	4. $P(7,5)$
5. $x+y=5$	6. $D(3,-5)$	7. $(4,7)$	8. $C(8,-8)$
9. 9			

回家功課

( ) 1. 若點 $A(a+b,a)$ 在第二象限，則點 $P(ab,b)$ 在第幾象限？ 代碼：g11093s1
(A)一 (B)二 (C)三 (D)四 。

( ) 2. 已知點 M 為 A 、 B 兩點的中點，若 M 及 B 的坐標分別為 $(2,1)$ 及 $(-1,3)$，則點 A 到點 $(3,0)$ 的距離為何？ 代碼：g11096s1
(A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{6}$ 。

( ) 3. 設 $A(2,3)$，$B(0,-1)$，$C(-1,k)$。若 C 為線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上之點，則 k 為何？ (A) -3 (B) -2 (C) 1 (D) 2 。 代碼：g11101p2

( ) 4. 設 $A(-1,-3)$ 與 $B(6,4)$ 為座標平面上之兩點。若點 C 在線段 $\overline{AB}$ 上，且 $4\overline{AC}=3\overline{BC}$，則 $\overline{BC}=$？ (A) $\sqrt{2}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{2}$ (D) $5\sqrt{2}$ 。 代碼：g11099w1

( ) 5. 設 $P(1,4)$ 、 $Q(4,-2)$，若 R 在 $\overline{PQ}$ 外，且 $2\overline{PR}=5\overline{QR}$，求 R 點坐標爲 代碼：g11b02m1
(A) $(\frac{13}{7},\frac{16}{7})$ (B) $(7,-5)$ (C) $(6,-6)$ (D) $(-5,8)$ 。

( ) 6. 若平行四邊形 $ABCD$ 之頂點 $A(-1,7)$， $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$, $D(4,-6)$ 且兩對角線之交點坐標爲 $(9,11)$，則 $x_1+x_2+y_1+y_2=$？ 代碼：g11252m1
(A) 74 (B) 76 (C) 78 (D) 80 。

( ) 7. 若以 $P(5,9)$, $Q(-1,-5)$ 爲一圓直徑的兩端點，則圓心坐標爲 (a,b)，此圓的半徑爲 r，求 $a+b+r^2=$？ (A) 62 (B) 64 (C) 66 (D) 68 。 代碼：g11253m1

( ) 8. 若在座標平面上的平行四邊形 $ABCD$ 中，點 A 、 B 、 C 的坐標分別為 $(5,2)$ 、 $(1,3)$ 、 $(-4,3)$，則 D 點之坐標為何？ 代碼：g11096h1
(A) $(1,8)$ (B) $(0,2)$ (C) $(2,7)$ (D) $(3,9)$ 。

( ) 9. 設 $A(0,6)$，$B(-12,-24)$，$C(24,12)$ 爲 ΔABC 三頂點，若 P 在 ΔABC 內，$\Delta PAB=\Delta PBC=\Delta PCA$，求 P 點坐標爲 代碼：g11251m1
(A) $(4,-2)$ (B) $(6,-3)$ (C) $(12,-6)$ (D) $(3,-2)$ 。

( ) 10. 設 ΔABC 三邊中點坐標分別為 $D(-3,-1)$， $E(-2,4)$， $F(3,2)$，則 ΔABC 的面積為 (A) 16 (B) 54 (C) $\frac{27}{2}$ (D) $\frac{81}{2}$ 。 代碼：g11203m1

( ) 11. 設 $A(2,1)$， $B(-4,4)$， $C(4,5)$， $\angle BAC$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D，求 D 點的坐標爲 (a,b)，求 $a+2b=$ (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 。 代碼：g11254m1

答案：CCDCC BABAB C

主題四　函數圖形

1. 函數定義：

對於每一個 x 值(自變數)已知時，就有一個且只有一個 y 值(應變數)與之對應，
這就是函數的觀念。

1 老師講解

設 $f(x)=\begin{cases}2x+5 & ,\ x>8\\ x^2-|x| & ,\ -8\le x\le 8\\ x-4 & ,\ x<-8\end{cases}$，
試求下列各式之值。
(1) $f(3)$　(2) $f(12)$　(3) $f(-8)$　(4) $f(f(5))$

1 學生練習

設 $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & ,\ x>2\\ 3x+5 & ,\ -1<x\le 2\\ 6 & ,\ x\le -1\end{cases}$，
試求 $f(3)+f(1)+f(-1)$ 之值。

【代碼】a61a01m2

2 老師講解

已知函數 $f(\frac{x}{x+1})=2x+5$，求 $f(\frac{3}{4})$ 之值。

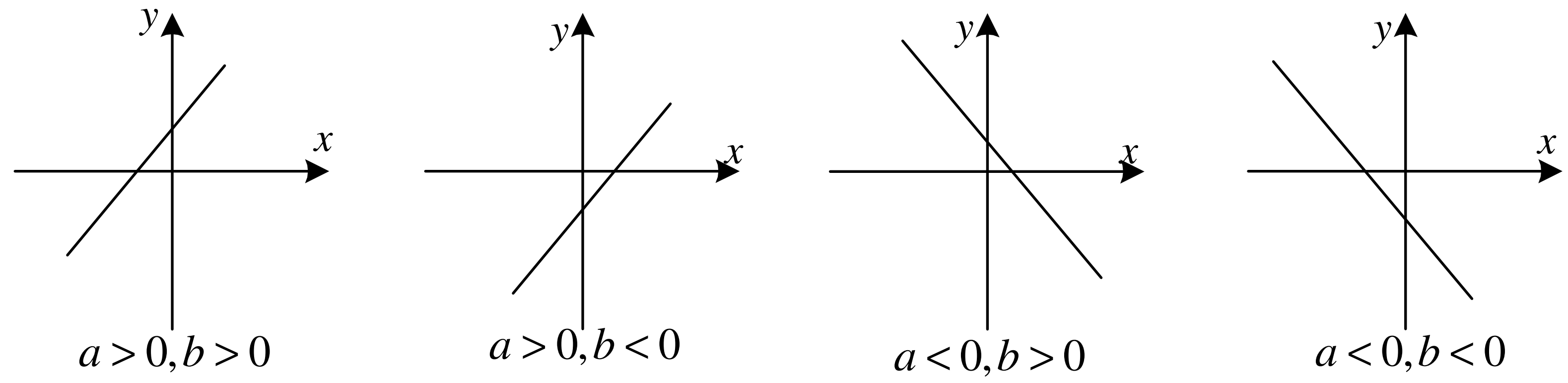
2 學生練習

設 $f(2x+1)=2x+5$，則求 $f(-5)$ 之值。

【代碼】a61a01m3

2. 線型函數：

可化為 $y=f(x)=ax+b$ 形式的函數，稱為線型函數，其圖形為一直線



(1) 若 $a=0$， $y=f(x)$ 稱為常數函數，其圖形表平行 x 軸的水平直線，例如： $f(x)=3$ 。

(2) 若 $a\ne 0$， $y=f(x)$ 為一次函數，其圖形為一條直線，例如： $f(x)=2x+3$

3 老師講解

若 $f(x)$ 為一次函數，$f(3)=5$，$f(5)=9$，求函數 $f(x)$。

3 學生練習

若 $f(x)$ 為一次函數，$f(2)=3$，$f(3)=5$，求函數 $f(x)$。

【代碼】a62a01m2

4 老師講解

若 $y=ax+b$ 之圖形通過一、二、四象限，試判斷 a、b 之正負。

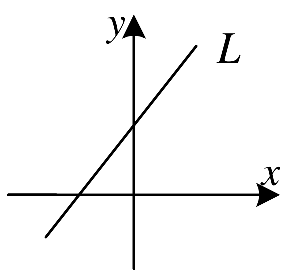
4 學生練習

若 $y=ax+b$ 之圖形通過一、三、四象限，試判斷 a、b 之正負。

【代碼】a62a01m3

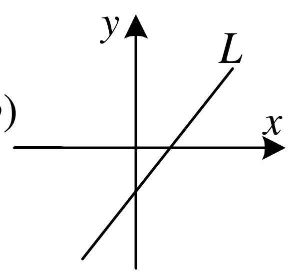
5 老師講解

若直線 $L:ax+by+c=0$ 的圖形如圖，則點 $P(ab,\frac{a}{c})$ 在第幾象限？



5 學生練習

若直線 $L:ax+by+c=0$ 的圖形如圖，則點 $P(ac,ab)$ 在第幾象限？

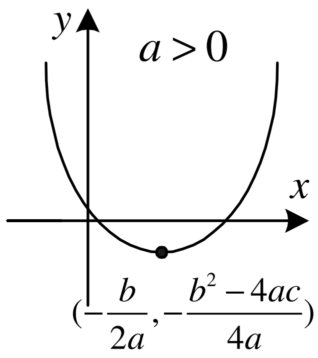


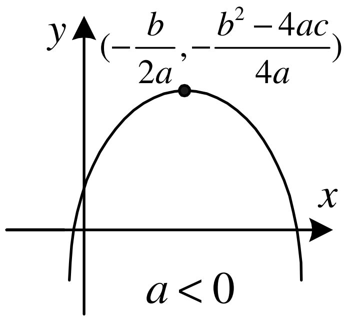
【代碼】a62a01m4

3. 二次函數：

$y=ax^2+bx+c$ (其中 $a\neq 0$)，稱為二次函數，其圖形為拋物線。

(1) $\begin{cases} a>0 \Rightarrow \text{開口朝上} \\ a<0 \Rightarrow \text{開口朝下} \end{cases}$





(2) 利用頂點求極值：

配方法求頂點：

$y=a(x-h)^2+k \Rightarrow$ 頂點 (h,k) $\Rightarrow$ 當 $x=h$ 時，y 有極值 k

公式法求頂點：

$y=ax^2+bx+c \Rightarrow$ 頂點 $(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a})$ $\Rightarrow$ 當 $x=-\frac{b}{2a}$ 時，y 有極值 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$

【註】配方法與公式法求頂點，請見【代碼】a63a01m1

6 老師講解

設 $f(x)=-2x^2+12x+5$，
求 $f(x)$ 之極大值。

6 學生練習

設 $f(x)=-2x^2-4x+3$，
則 $x=a$，$f(x)$ 有極大值 b，求 $a+b$ 之值。

【代碼】a63a02m3

7 老師講解

設 $y=x^2-4x+5$，

(1) 當 $-2\le x\le 1$，則

當 $x=$______，y 有極大值______。

當 $x=$______，y 有極小值______。

(2) 當 $-1\le x\le 3$，則

當 $x=$______，y 有極大值______。

當 $x=$______，y 有極小值______。

7 學生練習

(1) 設 $f(x)=3x^2-6x+8$，且 $-3\le x\le 4$，若 $f(x)$ 的最大値爲 M，最小値爲 m，求 $M-8m$ 之值。

(2) 設 $y=x^2-4x+3$，且 $4\le x\le 6$，則求其極小値。

【代碼】a63b01m2

8 老師講解

已知二次函數 $f(x)=ax^2-bx+11$，則當 $x=2$ 時，有極小値 3，求 $a+b$ 之值。

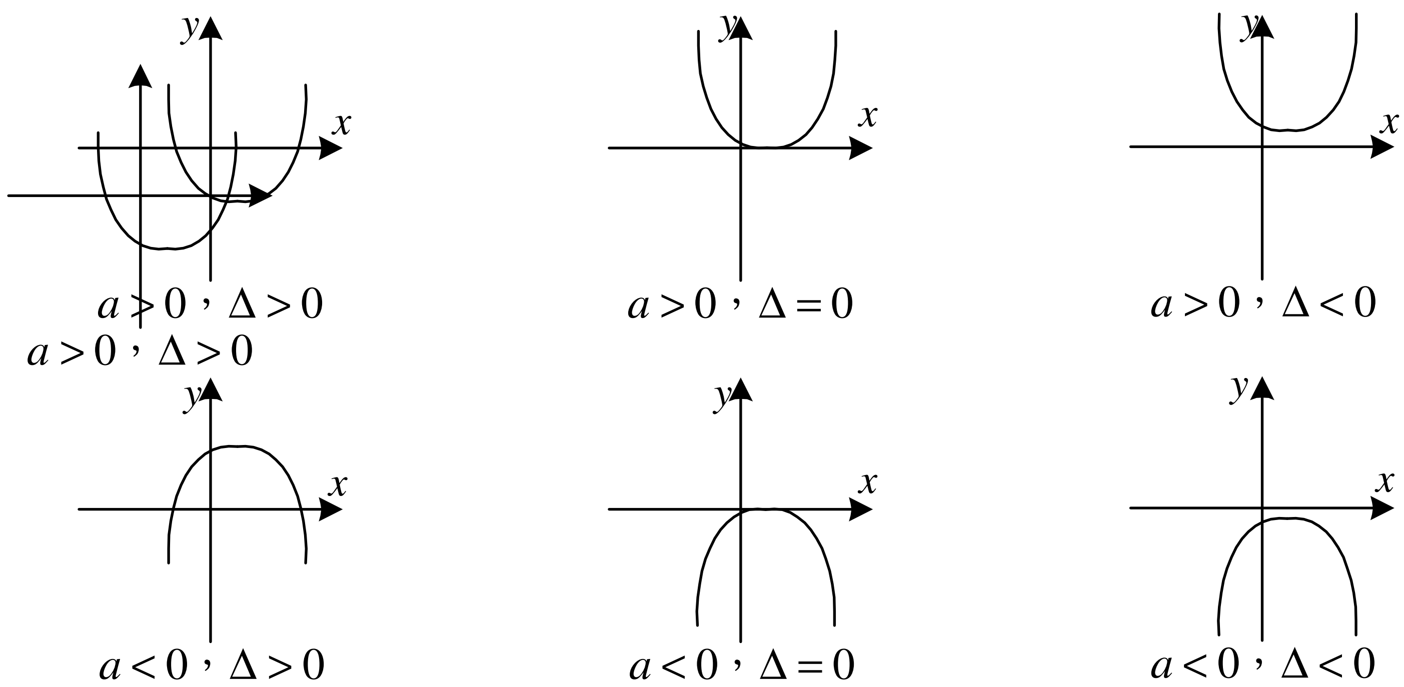
8 學生練習

已知二次函數 $f(x)=3x^2+ax+b$，則當 $x=1$ 時，有極小値 4，求 $a+b=$？

【代碼】a63a02m4

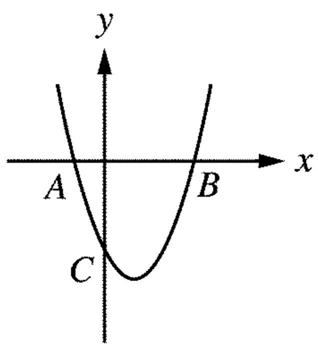
(3) 與 x 軸交點：

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta>0 \Rightarrow \text{與 } x \text{ 軸交兩點} \\ \Delta=0 \Rightarrow \text{與 } x \text{ 軸交一點} \\ \Delta<0 \Rightarrow \text{與 } x \text{ 軸沒交點} \end{cases} \quad (\Delta=b^2-4ac)$$



9 老師講解

設 $f(x)=x^2-2x-3$，
其圖形如右，
求 A 、 B 、 C 三點坐標。

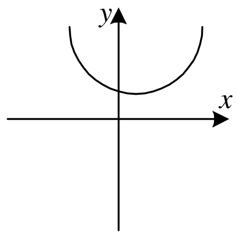


9 學生練習

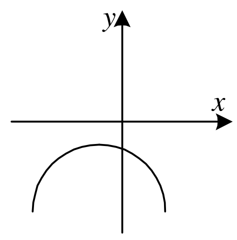
已知 $f(x)=2x^2-x-10$，
求圖形與 x 軸交點。

【代碼】a63a03m2

(4) ax^2+bx+c 恆正、恆負：

恆正⇒ 

$\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$

②恆負⇒ 

$\Rightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$

10 老師講解

若 $kx^2+(k+1)x+k$ 之值恆正，
則求 k 的範圍？

10 學生練習

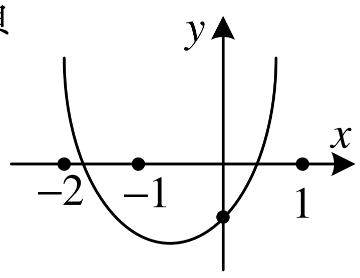
設 $k\neq 0$ ， $kx^2+(k-1)x+k$ 之值恆負，
則 k 的範圍？

【代碼】a63b03m2

11 老師講解

二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如下，
試判斷下列各式之正、負

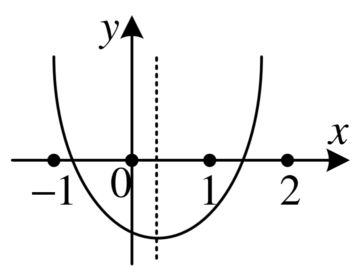
(1) a　(2) b
(3) c　(4) b^2-4ac
(5) $a+b+c$　(6) $a-b+c$
(7) $4a-2b+c$



11 學生練習

右圖中， $y=ax^2+bx+c$ ，
試判斷下列各式之值
何者為正：(複選)

(A) b　(B) c
(C) b^2-4ac　(D) $a-b+c$
(E) $2a+b$



【代碼】f21a14m2

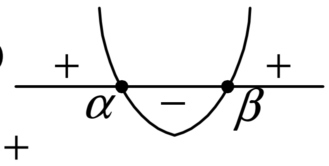
4.一元二次不等式：

設 $a,b,c\in R$ 且 $a\neq 0$，則 $ax^2+bx+c\geq 0$ 、 $ax^2+bx+c>0$ 、 $ax^2+bx+c\leq 0$ 、 $ax^2+bx+c<0$ 均稱為一元二次不等式。

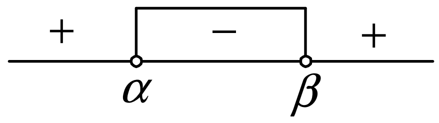
註： 解一元二次不等式可先限制 $a>0$ 。

若 $a<0$ 可將不等式兩邊同乘以 -1，使二次項係數為正。以下討論均假定 $a>0$ 。

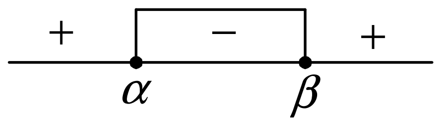
(1) 當 $b^2-4ac>0$ 時 $\Rightarrow$ ax^2+bx+c 可分解化為 $a(x-\alpha)(x-\beta)$ (其中 $\alpha<\beta$)



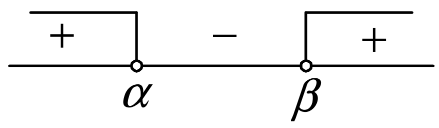
① $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ 之解為 $\alpha<x<\beta$



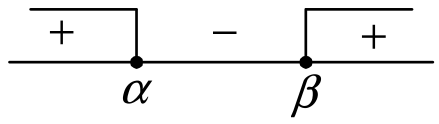
② $(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$ 之解為 $\alpha\leq x\leq\beta$



③ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 之解為 $x<\alpha$ 或 $x>\beta$



④ $(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$ 之解為 $x\leq\alpha$ 或 $x\geq\beta$



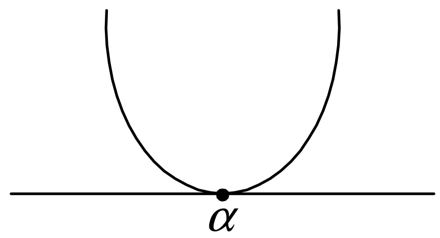
(2) 當 $b^2-4ac=0$ 時 $\Rightarrow$ ax^2+bx+c 可分解化為 $a(x-\alpha)^2$

① $(x-\alpha)^2<0$ $\Rightarrow$ x 無解

② $(x-\alpha)^2\leq 0$ $\Rightarrow$ $x=\alpha$

③ $(x-\alpha)^2>0$ $\Rightarrow$ $x\in R$，但 $x\neq\alpha$

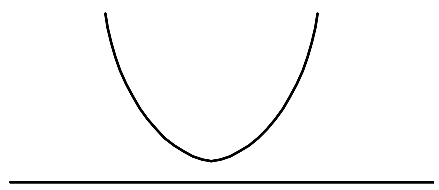
④ $(x-\alpha)^2\geq 0$ $\Rightarrow$ $x\in R$



(3) 當 $b^2-4ac<0$ 時 $\Rightarrow$ ax^2+bx+c 恆為正數

① $ax^2+bx+c>0$ 、 $ax^2+bx+c\geq 0$ $\Rightarrow$ $x\in R$

② $ax^2+bx+c<0$ 、 $ax^2+bx+c\leq 0$ $\Rightarrow$ x 無解



註：對任意實數 x

(1) ax^2+bx+c 恆為正數 $\Rightarrow$ $ax^2+bx+c>0$ 恆成立 $\Rightarrow$ $a>0$ 、 $b^2-4ac<0$

(2) ax^2+bx+c 恆為負數 $\Rightarrow$ $ax^2+bx+c<0$ 恆成立 $\Rightarrow$ $a<0$ 、 $b^2-4ac<0$

12 老師講解

試求下列各不等式的範圍：

(1) $2x^2-5x-12<0$ (2) $3x-2\leq 3x^2-2x$

12 學生練習

試求下列各不等式的範圍：

(1) $2x^2+15x+18\leq 0$

(2) $x^2-5x+6>0$

【代碼】a31a02m2

13 老師講解

試求不等式 $x^2-4x-1\le 0$ 之範圍。

13 學生練習

試求 $2-x^2\ge -4x$ 之整數解有幾個？

【代碼】a31a03m2

14 老師講解

試求下列各不等式的範圍：

(1) $x^2+6x+9\ge 0$　(2) $x^2+6x+9>0$

(3) $x^2+6x+9<0$　(4) $x^2+6x+9\le 0$

14 學生練習

試求下列各不等式的範圍：

(1) $x^2-4x+4\ge 0$　(2) $x^2-4x+4>0$

(3) $x^2-4x+4<0$　(4) $x^2-4x+4\le 0$

【代碼】a31a03m3

15 老師講解

試解下列不等式：

(1) $x^2+4x+5>0$　(2) $-2x^2+5x-4>0$

15 學生練習

試求不等式 $x+x^2<2x^2+9$ 的解。

【代碼】a31a03m4

16 老師講解

試求不等式 $3x+4<x^2\leq 4x+12$ 之解。

16 學生練習

試求不等式 $6-5x>x^2\geq x+2$ 之解。

【代碼】a31b01m2

17 老師講解

若 a 、 b 均爲實數，且 $ax^2+bx-5<0$ 之解爲 $-5<x<\dfrac{2}{3}$ ，求 $a+b$ 之值。

17 學生練習

設 a 、 b 爲實數，若 $ax^2-4x+b<0$ 之解爲 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{5}{2}$ ，求 $a+b$ 之值。

【代碼】a31a02m3

18 老師講解

若 $k\in R$ ，二次不等式 $kx^2-2kx+2k-3>0$ 無實數解，則 k 之範圍爲_____。

18 學生練習

不論 x 爲何值，$(a-2)x^2+2(2a-3)x+(5a-6)>0$ 無解，則 a 範圍爲_____。

【代碼】f24404m1

5.分式不等式：

(1) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0 \Rightarrow f(x)g(x)>0 \quad (g(x)\neq 0)$

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0 \Rightarrow f(x)g(x)<0 \quad (g(x)\neq 0)$

19 老師講解

解不等式$\dfrac{2x+3}{x+2}\geq 1$。

19 學生練習

求不等式$\dfrac{5x-16}{x-2}\leq 4$的範圍。

【代碼】a31a06m2

【學生練習答案】

1. 25	2. -1	3. $f(x)=2x-1$	4. $a>0,b<0$
5. 第三象限	6. $a+b=4$	7. (1)13 (2)3	8. $a+b=1$
9. $(\frac{5}{2},0)$、$(-2,0)$	10. $k<-1$	11. (C)(D)(E)	
12. (1)$-6\leq x\leq -\frac{3}{2}$ (2)$x>3$，$x<2$		13. 5	
14. (1)$x\in R$ (2)$x\in R$，但$x\neq 2$ (3)x無解 (4)$x=2$			
15. $x\in R$	16. $-6<x\leq -1$	17. $-\frac{1}{2}$	18. $a\leq 1$
19. $2<x\leq 8$			

回家功課

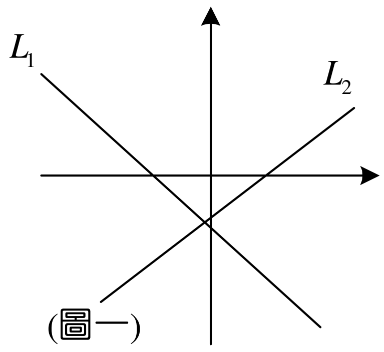
( ) 1. 已知函數 $f(x)=\begin{cases}-3x^2+5 & ，x\ge 2\\ 4x-8 & ，-1<x<2\\ 2 & ，x\le -1\end{cases}$，則 $ff(-2)$ 之值為
(A) -7 (B) -6 (C) -5 (D) -4 。

代碼：f21a02m3

( ) 2. 設 $f(x)$ 為一函數，若 $f(2x-1)=\dfrac{2x}{3x+1}$，則 $f(3)=?$
(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{4}{7}$ (C) $\dfrac{3}{5}$ (D) $\dfrac{8}{13}$ 。

代碼：a61094w1

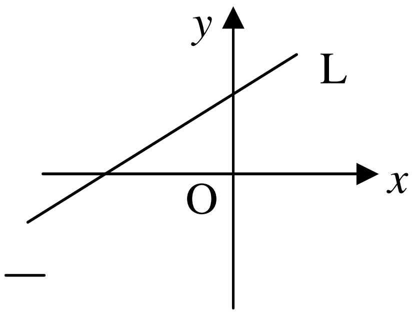
( ) 3. 已知直線 $L_1: y=m_1x+b_1$ 及直線 $L_2: y=m_2x+b_2$，如圖(一)所示，下列敘述何者正確？
(A) $m_1<0$ 且 $b_1>0$ (B) $m_1>0$ 且 $b_1<0$
(C) $m_2<0$ 且 $b_2>0$ (D) $m_2>0$ 且 $b_2<0$



(圖一)

代碼：a62099w1

( ) 4. 若直線 $L: ax+by+c=0$ 的圖形如圖(一)，則點 $P(ac,ab)$ 在第幾象限？
(A)一 (B)二 (C)三 (D)四 。



圖一

代碼：a62093k1

( ) 5. 若 $ab<0$ 且 $bc>0$，$L: ax+by+c=0$ 不通過幾象限。
(A)一 (B)二 (C)三 (D)四 。

代碼：a62221m1

( ) 6. 二次函數 $y=-2x^2+12x-5$，當 $2\le x\le 5$ 時，求 y 之最大值與最小值之和=？ (A)18 (B)12 (C)11 (D)10 。

代碼：a63201m1

( ) 7. $a,b\in R$，已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+a^2+1$ 在 $x=1$ 時有最大值 7，求 $a+b=$？ (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2 。

代碼：f21a13m2

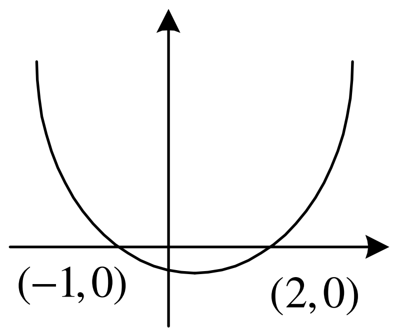
( ) 8. 設 a 為實數，若函數 $f(x)=a(x+3)^2-9a+2$ 在 $x=-3$ 時有最大值 20，則 $a=$？
(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2 。

代碼：a63097h1

( ) 9. 設二次函數 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 圖形的頂點為 $(1,3)$ 且交 y 軸於點 $(0,1)$，則下列 a 、 b 之值，何者正確？
(A) $a=-2, b=4$ (B) $a=-1, b=2$
(C) $a=1, b=-2$ (D) $a=2, b=4$ 。

代碼：a63101p1

( )10. 設 a,b 為實數，若坐標平面上的拋物線 $y=x^2+ax+b$ 的圖形與 x 軸的交點為 $(-1,0)$ 、 $(2,0)$，如圖所示，則 $a+b=$？
(A) 2 (B) 3 (C) -2 (D) -3 。



代碼：a63096k1

( )11. 不等式 $(x-1)(1-2x)\geq 0$ 之解為 (A) $\{x\,|\,x\geq 1\}$ (B) $\{x\,|\,\frac{1}{2}\leq x\leq 1\}$
(C) $\{x\,|\,x\leq\frac{1}{2}\}$ (D) $\{x\,|\,x\leq\frac{1}{2}$ 或 $x\geq 1\}$ 。

代碼：a31088x1

( ) 12. 不等式 $6+x\leq x^2<-2x+3$ 之解為
(A) $-3<x\leq -2$ (B) $-3\leq x<-2$ (C) $-3\leq x<2$ (D) $-2<x\leq 3$ 。

代碼：a31204m1

( ) 13. 解不等式 $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|<3$ 之範圍爲 $x>a$ 或 $x<b$，求 $a+5b=$？
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 。

代碼：a31a06m3

答案：ABDDB ADAAD BAD

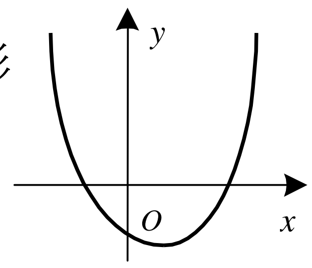
歷屆試題

( ) 1. 已知 $A(a,0)$ 與 $B(3,b)$ 兩點，線段 $\overline{AB}$ 的中點為 $M(-1,2)$，則點 A 到 y 軸的距離與點 B 到 x 軸的距離之和為何？
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12。
代碼：g11100s1 (100 年統測 B)

( ) 2. 已知 $A(1.38,0.4162)$ 與 $B(1.39,0.4177)$ 兩點，若點 P 落在線段 $\overline{AB}$ 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:3$，則 P 點之 y 坐標為何？
(A) 0.4165 (B) 0.4168 (C) 0.4171 (D) 0.4174。
代碼：g11100s2 (100 年統測 B)

( ) 3. 已知 $f(x)=-2x+1$，則此函數的圖形<u>不會</u>經過哪一象限？
(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限。
代碼：a62100s1 (100 年統測 B)

( ) 4. 若直線 $24x-7y=53$ 與二直線 $x=0$ 、 $x=7$ 分別交於 A 、 B 二點，則線段 $\overline{AB}$ 的長度為何？ (A) $\frac{24}{7}$ (B) $\frac{53}{7}$ (C) 25 (D) 53。
代碼：g12100k1 (100 年統測 C)

( ) 5. 設 a,b,c 為實數，且二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如圖所示，則點 $P(b^2-4ac,abc)$ 在第幾象限？
(A)一 (B)二 (C)三 (D)四。


代碼：a63100k1 (100 年統測 C)

( ) 6. 設 a 、 b 為實數，若一元二次不等式 $ax^2+x+b>0$ 的解集合為 $\{x\mid -\frac{1}{5}<x<\frac{2}{3}, x\text{為實數}\}$，則 $2a+b=$？ (A) -5 (B) -4 (C) 4 (D) 5。
代碼：a31100k1 (100 年統測 C)

( ) 7. 設直角坐標平面上四點 $A(-2,1)$，$B(b_1,b_2)$，$C(c_1,c_2)$，$D(4,3)$ 在同一直線上，依序為 A 、 B 、 C 、 D，且 B 、 C 兩點將線段三等份，則點 C 之坐標 (c_1,c_2) 為何？
(A) $(2,\frac{7}{3})$ (B) $(\frac{2}{3},\frac{4}{3})$ (C) $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ (D) $(0,\frac{5}{3})$。
代碼：g11101s1 (101 年統測 B)

( ) 8. 已知函數 $f(x)=a(x+1)^2-2$ 的圖形不會經過第四象限，則 a 之值可能為下列哪一數？ (A) -1 (B) 0.4 (C) 1.8 (D) 3.2。
代碼：a63101s1 (101 年統測 B)

( ) 9. 在 xy 平面上，P 和 Q 為拋物線 $y=x^2$ 上的兩點，若 P 和 Q 的 x 坐標分別是 -1 和 2，則 P 和 Q 的距離為何？ (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) $3\sqrt{2}$。
代碼：g11101k1 (101 年統測 C)

( )10. 下列何者爲不等式$3x^2-3x\le 6$之解？ (A) $x\le -2$或$x\ge 1$ (B) $-2\le x\le 1$ (C) $-1\le x\le 2$ (D) $x\le -1$或$x\ge 2$。
代碼：a31101k1 (101 年統測 C)

( )11. 已知x、y、z均爲正實數。若x、y、z滿足$2x+3y+z=12$，則下最何者爲眞？ (A) xyz的最大值爲12 (B) x^2y^3z的最大值爲32 (C) xyz^2的最大值爲48 (D) xy^2z的最大值爲18。
代碼：a32102s1 (102 年統測 B)

( )12. 不等式$\dfrac{3}{5x+10}<\dfrac{x}{5}$的解爲下列何者？ (A) $x<-2$或$x>1$ (B) $x<-2$或$x>3$ (C) $x<-3$或$x>1$ (D) $-3<x<-2$或$x>1$。
代碼：a31103s1 (103 年統測 B)

( )13. 設x,y,z皆爲正實數，且$xy+yz+zx=27$，則xyz之最大值爲何？ (A) $12\sqrt[3]{2}$ (B) 18 (C) 27 (D) $27\sqrt[3]{2}$。
代碼：a32103s1 (103 年統測 B)

( )14. 設$A(0,0)$，$B(2,2)$爲平面上兩點，點$P(m,n)$在線段$\overline{AB}$上，$\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$，則$m+n$之値爲何？ (A) 2 (B) 2.5 (C) 3 (D) 3.5。
代碼：g11103k1 (103 年統測 C)

( )15. 設$x>0$，$y>0$，$x+y=6$，則xy^2之最大值爲何？ (A) 16 (B) 18 (C) 25 (D) 32。
代碼：a32103k1 (103 年統測 C)

( )16. 若想要利用一條繩子圍出一個面積至少爲25平方公尺的矩形花園，則所需要的繩子總長度至少須爲多少公尺？ (A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 24。
代碼：a32104s1 (104 年統測 B)

( )17. 下列何者與$x^2-6x-16<0$有完全相同的解？ (A) $(x-2)(x+8)<0$ (B) $-3<x-5<3$ (C) $(x-3)^2<25$ (D) $-x^2+6x+16<0$。
代碼：a31104s1 (104 年統測 B)

( )18. 下列方程式所對應的圖形中，何者恆在x軸的上方? (A) $y=5x^2-3x+1$ (B) $y=3x^2+5x-1$ (C) $y=x^2-5x+3$ (D) $y=3x^2+x-5$。
代碼：a63104k1 (104 年統測 C)

( )19. 已知a,b爲實數，若不等式$x^2+ax\le b$之解爲$-5\le x\le 3$，則$a+b=$？ (A) -17 (B) -13 (C) 13 (D) 17。
代碼：a31104k1 (104 年統測 C)

( )20. 已知ΔABC的三頂點爲$A(-1,2)$、$B(-3,-3)$、$C(3,-1)$，則$\overline{AB}$邊上的中線長爲何？ (A) $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ (B) $\dfrac{\sqrt{71}}{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{101}}{2}$ (D) $\sqrt{26}$。
代碼：g11105s1 (105 年統測 B)

( ) 21. 已知拋物線 $y=ax^2+4bx+4a$ 與 x 軸有兩相異交點，且頂點在第一象限，則下列敘述何者正確？ (A) $a<0$，$a^2<b^2$ (B) $a<0$，$a^2>b^2$ (C) $a>0$，$a^2<b^2$ (D) $a>0$，$a^2>b^2$。

代碼：a63105s1 (105 年統測 B)

( ) 22. 已知 $ax^2+2x+c>0$ 的解爲 $-1<x<3$，則 $a+c$ 之值爲何？
(A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4。

代碼：a31105s1 (105 年統測 B)

( ) 23. 若一元二次不等式 $x^2-2x-3<0$ 的解爲 $a<x<b$，則 $a+b=$？
(A) -3 (B) -1 (C) 2 (D) 3。

代碼：a31106s1 (106 年統測 B)

( ) 24. 設直線 $2x+y=11$ 與拋物線 $y=x^2-4$ 在第二象限的交點爲 A，在第一象限的交點爲 B，若線段 $\overline{AB}$ 上一點 P 滿足 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$，則 P 點坐標爲何？ (A) $(\frac{1}{3},\frac{31}{3})$ (B) $(-2,26)$ (C) $(-1,13)$ (D) $(\frac{-7}{3},\frac{47}{3})$。

代碼：g11106k1 (106 年統測 C)

( ) 25. 設 a、b 爲實數，且不等式 $-x^2+6x+b>0$ 與不等式 $|x+a|<5$ 的解完全相同，則 $a+b=$？ (A) -13 (B) -7 (C) 7 (D) 13。

代碼：a31106k1 (106 年統測 C)

( ) 26. 若一元二次不等式 $ax^2+bx-6\geq 0$ 的解爲 $2\leq x\leq 3$，則數對 (a,b) 爲下列何者? (A) $(-1,-5)$ (B) $(-1,5)$ (C) $(1,-5)$ (D) $(1,5)$。

代碼：a31107s1 (107 年統測 B)

( ) 27. 若拋物線 $y=ax^2+b$ 之開口向上且與 x 軸沒有交點，則下列敘述何者正確?
(A) $a>0$，$b>0$ (B) $a>0$，$b<0$ (C) $a<0$，$b>0$ (D) $a<0$，$b<0$。

代碼：a63108s1 (108 年統測 B)

( ) 28. 若點 A 與點 B 在數線上的坐標分別是 -1 與 5，則線段 $\overline{AB}$ (包含兩端點，如圖(一)所示)是下列哪一個不等式之解的圖形？
(A) $|x-1|\leq 4$ (B) $|x+1|\leq 5$
(C) $x^2-4x-5\leq 0$ (D) $x^2+6x+5\leq 0$ 。

代碼：a31109s1 (109 年統測 B)

( ) 29. 已知 A、B、C 三家某知名商店，B 店位於 A 店往西 240 公尺往北 120 公尺處，而 C 店位於 B 店往東 180 公尺往南 40 公尺位置。求 A 店與 C 店的距離爲多少公尺？
(A)100 (B)120 (C)140 (D)160 。

代碼：110tcb19 (110 年統測 B)

( ) 30. 若 x 爲實數，則 $x^2-2+\frac{9}{x^2+2}$ 的最小值爲何？
(A)2 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{13}{2}$ (D)6 。

代碼：110tcc20 (110 年統測 C)

(　　) 31. 若不等式$|7x-a|<28$之解爲$b<x<5$，則點(b,a)屬於哪一象限？(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限　。
代碼：111tcb03 (111 年統測 B)

(　　) 32. 若函數$f(x)=x^2+ax+4$之圖形頂點爲$(3,b)$，則函數$f(x)$之最小值爲何？(A)-6　(B)-5　(C)-4　(D)-3　。
代碼：111tcb11 (111 年統測 B)

(　　) 33. 身高 170 公分的小游去做健康檢查，醫師說：「你的 BMI 要介於$18.5(\text{kg/m}^2)$到$24(\text{kg/m}^2)$之間才符合健康體位，你現在的體重太重了，必須再減 5 公斤才會符合健康體位」。
已知計算公式爲$\text{BMI}=\dfrac{\text{體重(kg)}}{\text{身高}^2(\text{m}^2)}$，則小游現在體重可能爲幾公斤？
(A)74　(B)75　(C)76　(D)77　。
代碼：111tcb24 (111 年統測 B)

(　　) 34. 公益文教基金會調查技術型高中三年級學生每天手機使用時間介於3.1小時至4.9小時之間（含）。若x（單位：小時）爲其中一位參與調查的技術型高中學生每天手機使用時間，且將上述使用時間範圍用$|x-a|\le b$來表示，則$ab=$？
(A)3.2　(B)3.6　(C)3.8　(D)4.2　。
代碼：111tcc03 (111 年統測 C)

(　　) 35. 不等式$5x-4<x^2<x+2$的解爲何？
(A)$-1<x<1$　(B)$-1<x<2$　(C)$-2<x<1$　(D)$0<x<4$　。
代碼：111tcc08 (111 年統測 C)

答案：ABCCA　BADDC　DDCCD　CCADC　ACCAD　BACAA　BBABA

綜合練習

( ) 1. 試問有多少個正整數n使得$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{10}{n}$爲整數？ 代碼：f11092c1

(A)1個 (B)2個 (C)3個 (D)4個。

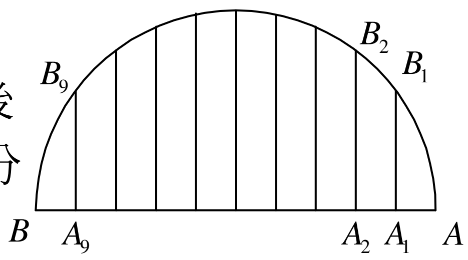
( ) 2. 若實數a，b，c滿足$abc>0$，$ab+bc+ca<0$，$a+b+c>0$，$a>b>c$，則下列敘述何者爲眞？ 代碼：f11091ck

(A)$b>0$ (B)$c>0$ (C)$|a|>|b|$ (D)$a^2<c^2$。

( ) 3. 關於下列不等式，請選出正確的選項。 (A)$\sqrt{13}<3.6$ 代碼：f11103ck

(B)$\sqrt{13}-\sqrt{3}>\sqrt{10}$ (C)$\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$ (D)$\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$。

( ) 4 如圖，有一圓形拱橋，橋面位置恰爲直徑$\overline{AB}$，爲了慶祝活動的裝飾，計劃將橋面$\overline{AB}$十等分後(也就是$\overline{AA_1}=\overline{A_1A_2}=\cdots\overline{A_8A_9}=\overline{A_9B}$)，在每個等分點豎立一個鋼住，$\overline{A_1B_1},\overline{A_2B_2},\cdots,\overline{A_9B_9}$，已知$\overline{AB}=10$公尺，試求$\overline{A_3B_3}=$ (A)$\sqrt{21}$ (B)$2\sqrt{6}$ (C)4 (D)3 公尺。 代碼：f11421m1



( ) 5. 若$p=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$，求$p^3-3p=$ 代碼：f11414m1

(A)$\sqrt[3]{6}$ (B)$\sqrt[3]{18}$ (C)4 (D)3。

( ) 6. 已知$x\in R$，則$x^2+5+\frac{4}{x^2+2}$之最小值爲 代碼：a32205m1

(A)7 (B)8 (C)9 (D)10。

( ) 7. 若實數函數$y=f(x)=3^x+3^{-x}+2$，則其值域爲 代碼：a32223m1

(A)$\{\ y\mid y>2\ \}$ (B)$\{\ y\mid y\geq 4\ \}$

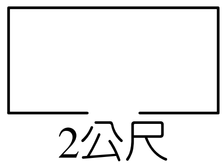
(C)$\{\ y\mid y\geq 5\ \}$ (D)$\{\ y\mid 2\leq y\leq 8\ \}$。

( ) 8. 設$x+y+z=12$，且$x>0$、$y>0$、$z>0$，求x^2yz的最大值？ 代碼：a32214m1

(A)100 (B)256 (C)324 (D)432。

(　　) 9. 若$\log_3 x + \log_3 y = 2$，求$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$之最小值？ (A) 0　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) 1。 代碼：a32095h1

(　　)10. 一農夫想用66公尺長之竹籬圍成一長方形菜圃，並在其中一邊正中央留著寬2公尺的出入口，如右圖所示。此農夫所能圍成的最大面積爲多少平方公尺。
(A) 256　(B) 289　(C) 295　(D) 343。 代碼：f11095b1



(　　)11. 坐標平面上一矩形的四個頂點分別在原點、x軸正向、y軸正向及直線$x+2y=6$上，當此矩形有最大面積時，其周長爲何?
(A) 8　(B) 9　(C) 10　(D) 11。 代碼：a32091k1

(　　)12. 請問滿足絕對值不等式$|4x-12| \le 2x$的實數x所形成的區間，其長度爲下列哪個選項？ (A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4 代碼：f12103c1

(　　)13. 求函數$f(x)=4|x+1|+3|2x-1|$的最小值？
(A) 3　(B) 4　(C) 6　(D) 9　。 代碼：a31096k2

(　　)14. 已知點$P(a-b, ab)$在坐標平面的第四象限，則下列敘述何者正確？
(A) $A(a, -b)$在第一象限　(B) $B(|ab|, \frac{a}{b})$在第二象限
(C) $C(\frac{a}{b}, -b)$在第三象限　(D) $D(\frac{a}{b}, b-a)$在第四象限。 代碼：g11101p1

(　　)15. 設$A(-1,2)$，$B(2,6)$爲坐標平面上兩點，且C爲線段$\overline{AB}$上一點，$2\overline{AC}=3\overline{BC}$，求$A$與$C$兩點間之距離爲何？
(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4。 代碼：g11099s1

(　　)16. 坐標平面中$A(a,3)$，$B(16,b)$，$C(19,12)$三點共線。已知C不在A，B
(A) 15　(B) 17　(C) 19　(D) 21。 代碼：f12102c1

(　　)17. 平面上三點$A(2,-3)$、$B(-5,7)$、$C(9,11)$。下列何者可與A、B、C三點連成平行四邊形？
(A) $(2,21)$　(B) $(-11,-7)$　(C) $(2,5)$　(D) $(16,2)$。 代碼：g11103p3

(　　)18. 在坐標平面上，若ΔABC之三頂點坐標分別爲$A(2,0)$、$B(4,0)$與$C(4,3)$，則ΔABC之三邊上共有多少點與原點的距離恰爲整數值？
(A) 2個　(B) 4個　(C) 6個　(D) 8個。 代碼：g11099k1

( )19. 設 $A(5,8)$、$B(7,0)$、$C(-3,-2)$ 是三角形 ABC 的三頂點，若 D、E、F 分別是 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 的中點，則三角形 DEF 的重心坐標爲下列何者？ (A) $(-2,3)$ (B) $(2,-3)$ (C) $(2,3)$ (D) $(3,2)$。 代碼：g11101w1

( )20. 設函數 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，則下列何者恆爲正確？ (A) $f(x)=f(-x)$ (B) $f(x)=-f(x)$ (C) $f(x)=f(\frac{1}{x})$ (D) $f(x)=\frac{1}{f(x)}$。 代碼：a61091s1

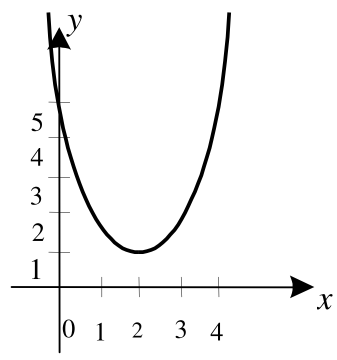
( )21. 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 爲二函數，若 $f(x)=x^3+x^2+x+1$，$g(x)=f(x^2+1)$，且 $g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$，則 $a_4=$？ (A) 4 (B) 5 (C) 8 (D) 10。 代碼：a61095w1

( )22. 設 a,b,c 爲實數。直線 $ax+by+c=0$ 通過第一、二、三象限，則點 $P(ab,ac)$ 落在第幾象限？ (A)一 (B)二 (C)三 (D)四。 代碼：a62103w1

( )23. 設 a 爲實數，且直線 $(3a-1)x-2y=a+1$ 沒有通過第一象限，則 a 的可能範圍爲何？ (A) $a<-1$ (B) $-1\le a\le\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}<a<1$ (D) $a\ge 1$。 代碼：a62096k1

( )24. 根據果農之種植經驗，若每畝種植 16 棵柿子樹時，則每棵樹平均可產 200 個柿子；但每畝增加種植一棵柿子樹，則每棵會減產 10 個柿子。問若欲達到最大收成的條件下，每畝應種植幾棵爲最佳？ (A) 16 (B) 17 (C) 18 (D) 19。 代碼：a63095s1

( )25. 設右圖爲函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 之圖形，則下列何者正確？ (A) $a<0$ (B) $b<0$ (C) $c<0$ (D) $a+b+c<0$。 代碼：a63099p1



( )26. 試判斷下列各式之值，何者爲恆正？ (A) x^2+3x+1 (B) x^2+4x+4 (C) $-x^2+3x-5$ (D) x^2+3x+5。 代碼：a63211m1

( )27. 若二次函數 $y=kx^2+(k+3)x+(k+1)$ 的圖形恆在 $y=2x+1$ 圖形的上方，則 k 之範圍爲 (A) $k>1$ (B) $k>1$ 或 $k<-\frac{1}{3}$ (C) $k<-\frac{1}{3}$ (D) $k>\frac{1}{3}$ 代碼：f21b08m2

( )28. 若不等式 $ax^2+bx+c<0$ 之解爲 $1<x<2$，則不等式 $bx^2+cx+a\ge 0$ 的整數解有幾個？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。 代碼：a31094s1

(　　)29. 下列何者與不等式$|x-4|<8$的解相同？ (A) $(x+4)(x-12)>0$ (B) $(x-4)(x+12)>0$ (C) $(x+4)(x-12)<0$ (D) $(x-4)(x+12)<0$。 代碼：a31095k1

(　　)30. 已知$4<(2x-3)^2<25$，試求x的範圍為何？ (A) $-1<x<\frac{5}{2}$ (B) $\frac{-3}{2}<x<-1$或$\frac{5}{2}<x<4$ (C) $-1<x<4$ (D) $-1<x<\frac{1}{2}$或$\frac{5}{2}<x<4$。 代碼：a31091s1

答案：DCCAC　ABCCB　BDCAC　CACDC　ABBCB　DABCD

單元 2　三角函數

主題一　有向角及其度量

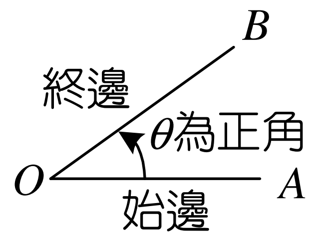
1. 有向角：

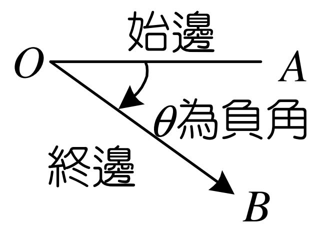
以 O 點為中心，將 $\overline{OA}$ 旋轉至 $\overline{OB}$ 所夾的角 θ，稱為有向角。

其中 $\overline{OA}$ 稱為始邊，$\overline{OB}$ 稱為終邊，O 稱為頂點

(1) 正向角 ⇒ 逆時針方向旋轉

(2) 負向角 ⇒ 順時針方向旋轉





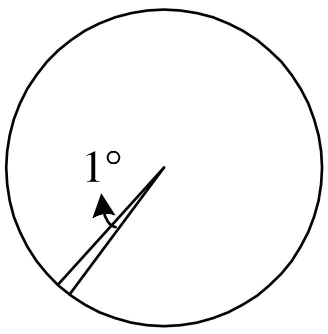
2. 角的度量：

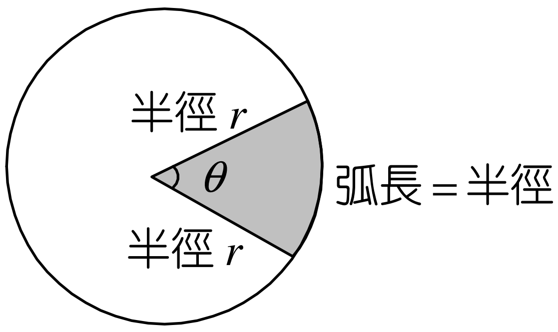
(1) 六十分制：

將圓周分成 360 等分，每一等分所對應的圓心角稱為一度，記作 1°。

(2) 弧度制(弳度制)：

一圓之弧長等於半徑時，則此弧所對應的圓心角稱為 1 弧度(或 1 弳)，1(弳) ≒ 57.3°。





(3) 換算：

一周角 $=360^\circ=2\pi \Rightarrow \pi=180^\circ$

$\pi=180^\circ \Rightarrow$ 兩邊同除以 $\pi \Rightarrow 1=\dfrac{180^\circ}{\pi}$

$\pi=180^\circ \Rightarrow$ 兩邊同除以 180 $\Rightarrow 1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$

1 老師講解

$a=\pi^\circ$，$b=\dfrac{\pi}{3}$，$c=1$，

試比較 a,b,c 大小關係。

1 學生練習

下列角度何者較大？

(A) $\dfrac{\pi}{3}$　(B) 45°　(C) 1(弳)　(D) π°。

【代碼】t11a01m2

2 老師講解

將下列角度化爲弧度制：
(1) 60°　(2) 315°

2 學生練習

將下列角度化爲弧度制：
(1) 300°　(2) 15°

【代碼】t11a01m3

3 老師講解

將下列角度化爲 60 分制：
(1) $\frac{7}{6}\pi$　(2) $\frac{3}{4}\pi$

3 學生練習

將下列角度化爲 60 分制：
(1) $\frac{5\pi}{4}$　(2) $\frac{11}{6}\pi$

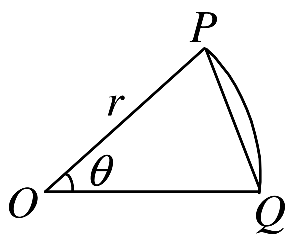
【代碼】t11a01m4

3. 弧長與扇形面積：

設 S，r，θ 分別表弧長，半徑，圓心角(弳度量)，則：

(1) 弧長 $S = r\theta$　(2) 扇形面積 $A = \frac{1}{2}rS = \frac{1}{2}r^2\theta$。

(3) 扇形周長 $= 2r + S$　(4) $\Delta OPQ = \frac{1}{2}r^2 \sin\theta$



4 老師講解

已知一扇形半徑爲 6，圓心角爲 60°，求：
(1)弧長
(2)扇形周長
(3)扇形面積

4 學生練習

已知一扇形半徑爲 5，圓心角爲 36°，則扇形面積爲何？

【代碼】t11a02m2

5 老師講解

一圓弧長4π，所對圓心角$240°$，
則所對之扇形面積爲何？

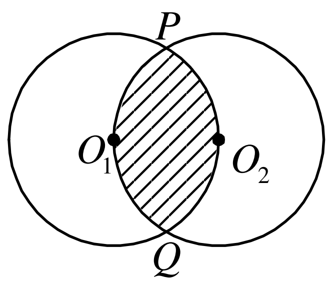
5 學生練習

扇形的弧長爲5π，面積爲15π，
則其圓心角爲何？

【代碼】t11a02m3

6 老師講解

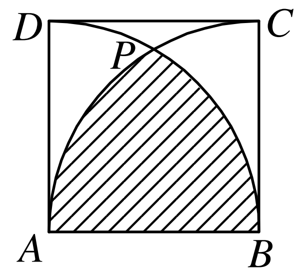
如右圖，圓O_1與圓O_2皆爲半徑爲2的圓，
且交於P、Q兩點，若此兩圓心距離
$\overline{O_1O_2}=2$，試求此斜線部分面積。



6 學生練習

如右圖，$ABCD$是邊長爲1的正方形，
今以A、B爲圓心，邊長1爲半徑，分別
畫圓弧相交於P，試求此斜線部分面積。

【代碼】t11251m1



4. 同界角：

(1) 標準位置角：

在坐標平面上，將有向角θ的頂點置於原點，且始邊與x軸正向重合，則稱為標準位置角。

若標準位置角的終邊落在第一(二、三、四)象限內，則稱為第一(二、三、四)象限角。

若標準位置角的終邊落在坐標軸上，則稱為象限角。

(2) 同界角：

兩個有向角，若始邊、終邊均相同的角互稱為同界角。

若θ_1、θ_2為同界角 $\Rightarrow$ $\theta_1-\theta_2=360°\times k$或$\theta_1-\theta_2=2\pi\times k$。($k$為整數)

7 老師講解

求下列各角之最小正同界角與最大負同界角：

(1) 780°　(2) $-\dfrac{33}{7}\pi$

7 學生練習

求下列各角之最小正同界角與最大負同界角：

(1) 1020°　(2) $-\dfrac{76}{11}\pi$

【代碼】t11a03m2

8 老師講解

下列何者不為 $\dfrac{3\pi}{7}$ 的同界角？

(A) $\dfrac{31\pi}{7}$　(B) $-\dfrac{11\pi}{7}$　(C) $\dfrac{38\pi}{7}$　(D) $-\dfrac{39\pi}{7}$ 。

8 學生練習

下列何者不為 $\dfrac{7}{3}\pi$ 的同界角？

(A) $\dfrac{85}{3}\pi$　(B) $-\dfrac{62}{3}\pi$　(C) $-\dfrac{71}{3}\pi$　(D) -300° 。

【代碼】t11a03m3

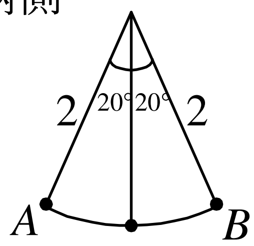
【學生練習答案】

1. (A)	2. (1) $\dfrac{5}{3}\pi$　(2) $\dfrac{\pi}{12}$	3. (1) 225°　(2) 330°	4. $\dfrac{5\pi}{2}$
5. $\dfrac{5}{6}\pi$		6. $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	
7. (1)最小正同界角 300° 、最大負同界角 -60°　(2)最小正同界角 $\dfrac{12}{11}\pi$ 、最大負同界角 $-\dfrac{10}{11}\pi$			
8. (B)			

回家功課

(　　) 1. 已知一有向角$\theta = 12$弧度。若其頂點與直角坐標的原點重合，始邊與x軸正向重合。試問其終邊落在第幾象限？
(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限　。
代碼：t11103p1

(　　) 2 有一鐵鏈長度為2公尺的鞦韆，若一小朋友於鉛直方向兩側擺動圓心角各$20°$至A、B二點如圖，則線段$\overline{AB}$長為多少公尺？
(A) $4\sin 20°$　(B) $2\sin 40°$　(C) $4\cos 20°$　(D) $2\cos 40°$
代碼：t12106w1

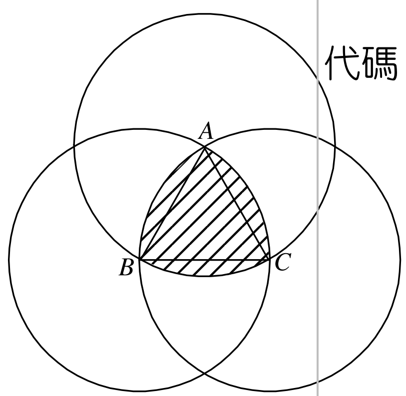


(　　) 3. 扇形圓心角$45°$，面積2π，則此圓半徑長為
(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 1　。
代碼：t11209m1

(　　) 4. 若一圓弧長為10π，其所對圓心角為$150°$，則該圓心角所對扇形面積為　(A) 24π　(B) 56π　(C) 60π　(D) 72π　。
代碼：t11232m1

(　　) 5. 設某扇形之弧長為a公分且其面積為b平方公分，若$2a = b$，則此扇形之半徑為多少公分？　(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　。
代碼：t11106w1

(　　) 6. 如右圖，設ΔABC為一正三角形且邊長為1，若分別以A, B, C三頂點為圓心，邊長為半徑，各畫一圓，則此三圓共同部分的面積為
(A) $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$　(B) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$　。
代碼：t11252m1



(　　) 7. 試求$-\frac{19}{3}\pi$之最大負同界角為
(A) $-\frac{2\pi}{3}$　(B) $-\frac{5\pi}{3}$　(C) $-\frac{\pi}{3}$　(D) $-\frac{4\pi}{3}$　(E) $-\frac{7\pi}{3}$　。
代碼：t11216m1

(　　) 8. 下列何者是$-\frac{22}{3}\pi$的同界角
(A) $\frac{\pi}{3}$　(B) $\frac{2\pi}{3}$　(C) $\frac{4\pi}{3}$　(D) $\frac{5\pi}{3}$　。
代碼：t11099p1

答案：DACCD　ACB

主題二　三角函數的定義

1. 銳角三角函數：

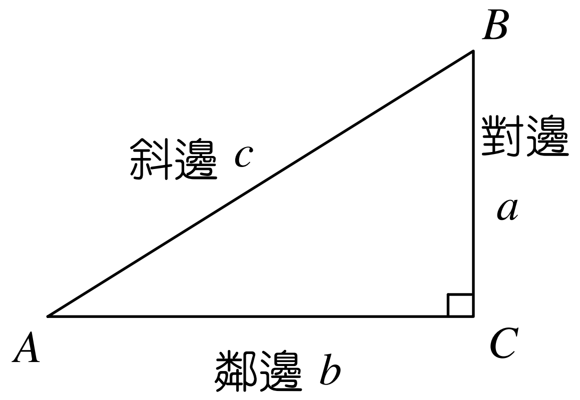
(1) 定義：

在 ΔABC 中，$\angle C=90°$，則 $\angle A$ 的六個三角函數為：

$\sin A=\dfrac{對邊}{斜邊}=\dfrac{a}{c}$　　$\csc A=\dfrac{斜邊}{對邊}=\dfrac{c}{a}$

$\cos A=\dfrac{鄰邊}{斜邊}=\dfrac{b}{c}$　　$\sec A=\dfrac{斜邊}{鄰邊}=\dfrac{c}{b}$

$\tan A=\dfrac{對邊}{鄰邊}=\dfrac{a}{b}$　　$\cot A=\dfrac{鄰邊}{對邊}=\dfrac{b}{a}$



1 老師講解

直角 ΔABC 中，$\angle C$ 爲直角，$\overline{BC}=3$，$\overline{AC}=4$，求 $\angle B$ 之各三角函數值。

1 學生練習

直角 ΔABC 中，$\angle B$ 爲直角，$\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=5$，求 $\angle A$ 之各三角函數值。

【代碼】t12a02m2

2 老師講解

在 ΔABC 中，$\angle B=90°$，$\tan A=\dfrac{24}{7}$，$\overline{AB}=14$，試求：

(1) $\cos A$　(2) $\overline{AC}$　(3) $\sin C$ 之值。

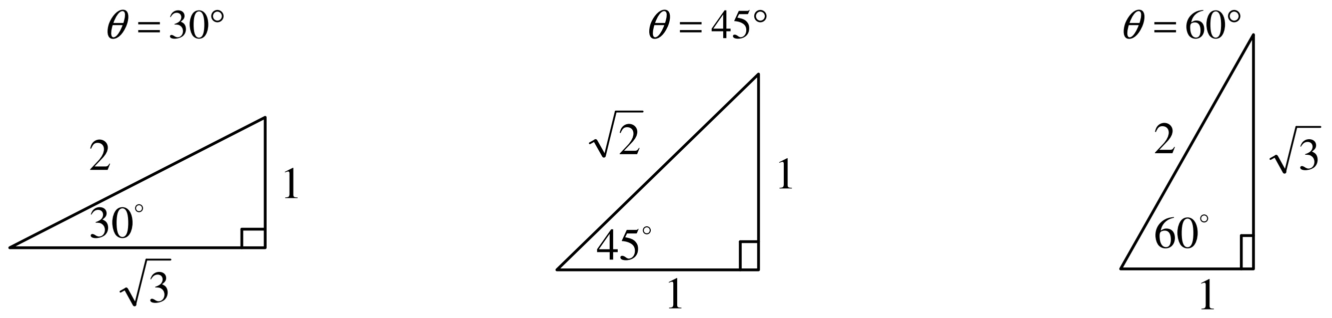
2 學生練習

在 ΔABC 中，$\angle C=90°$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$，$\overline{AC}=12$，試求：

(1) $\sec B$　(2) $\overline{AB}$　(3) $\tan A$ 之值。

【代碼】t12a02m3

(2) 特別角的三角函數值：



	互為倒數		互為倒數		互為倒數	
函數 \ 角度	sin 正弦	csc 餘割	cos 餘弦	sec 正割	tan 正切	cot 餘切
30°	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	2	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

3 老師講解

求出下列各式之值：

(1) $\sin 30^\circ \cos 45^\circ \tan 45^\circ \sec 30^\circ \cot 60^\circ$

(2) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ - \tan^2 60^\circ$

3 學生練習

求出下列各式之值：

(1) 求 $\sin 45^\circ \cos 60^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ$

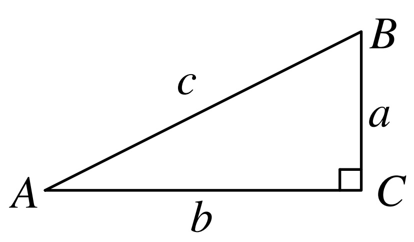
(2) $(\tan\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4})(\cot\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{3})$

【代碼】t12a03m2

(3) 餘角關係：

$A+B=90^\circ$

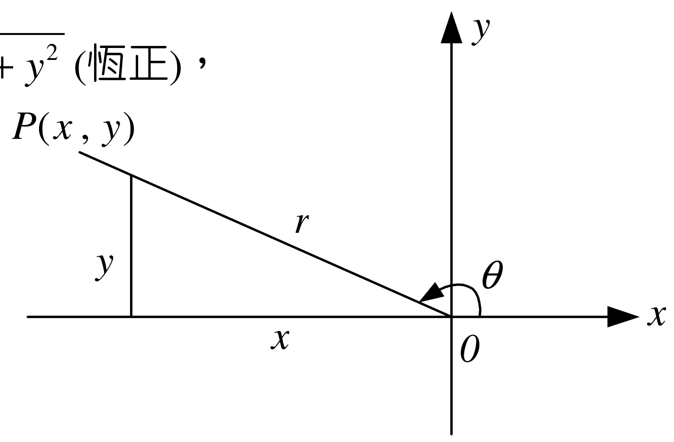
$\sin A = \cos B \quad \tan A = \cot B \quad \sec A = \csc B$



2.廣義角三角函數：

(1) 定義：

設 $P(x, y)$ 為標準位置角 θ 終邊上的一點，$\overline{OP}=r=\sqrt{x^2+y^2}$ (恆正)，
則定義角 θ 的六個三角函數值。



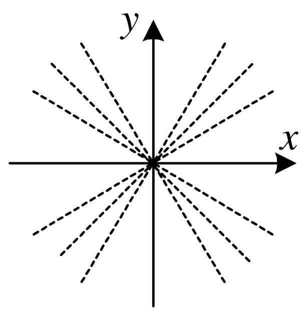
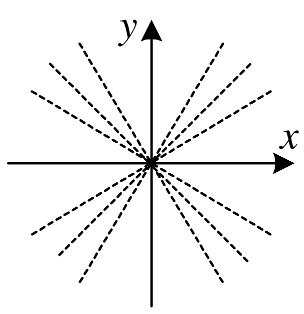
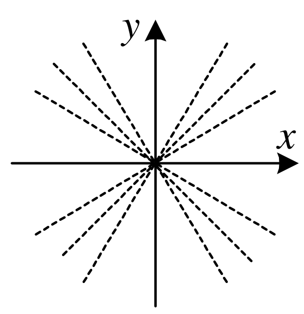
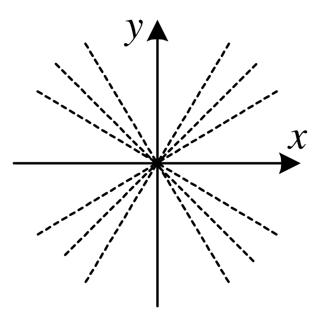
$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ $\qquad\csc\theta=\dfrac{r}{y}$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ $\qquad\sec\theta=\dfrac{r}{x}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ $\qquad\cot\theta=\dfrac{x}{y}$

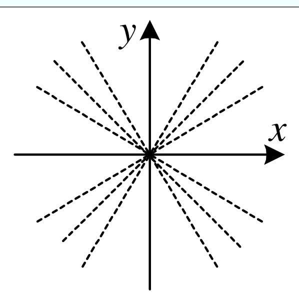
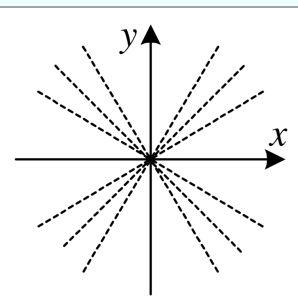
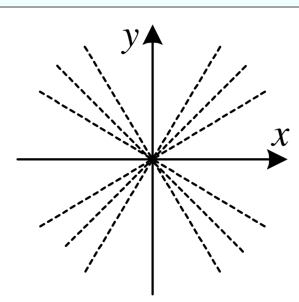
4 老師講解

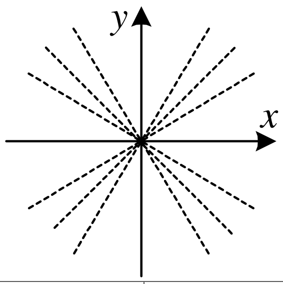
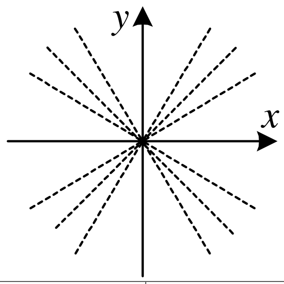
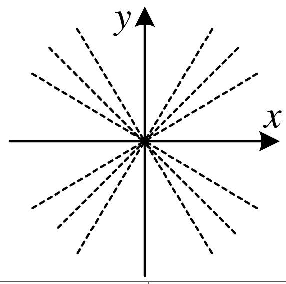
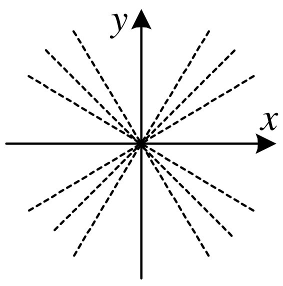
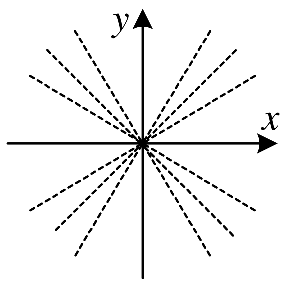
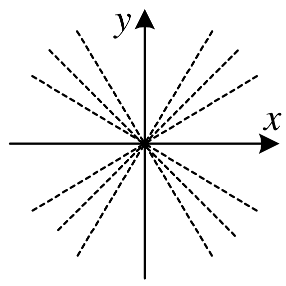
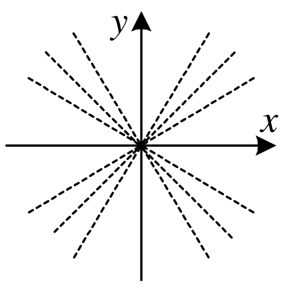
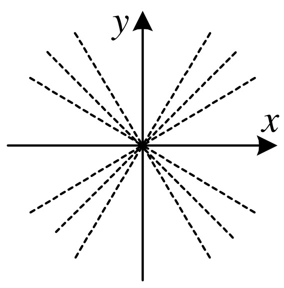
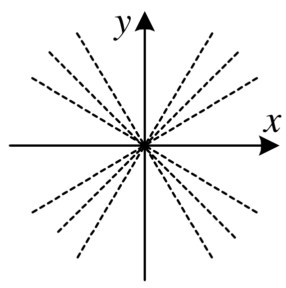
求出下列各角度之三角函數值，並填入下列空格。

① $\theta=60°$		② $\theta=150°$		③ $\theta=930°$		④ $\theta=-45°$	
							
$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$
$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$
$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$

4 學生練習

求出下列各角度之三角函數值，並填入下列空格。【代碼】t12a04m2

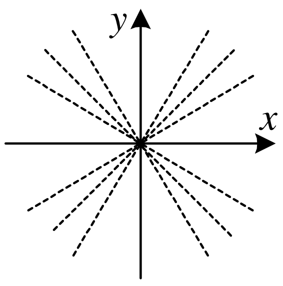
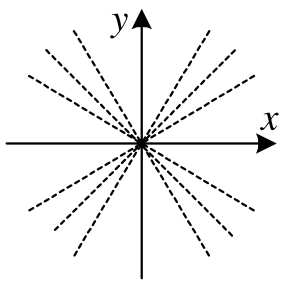
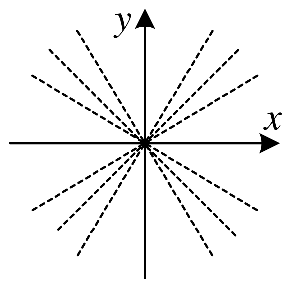
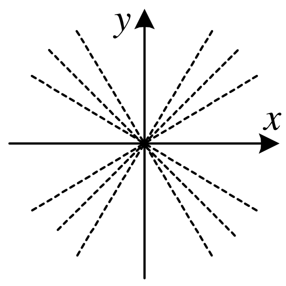
(1) $\theta=30°$		(2) $\theta=45°$		(3) $\theta=60°$	
					
$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$
$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$
$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$

(4) $\theta=120^\circ$		(5) $\theta=135^\circ$		(6) $\theta=150^\circ$	
					
$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$
$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$
$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$
(7) $\theta=210^\circ$		(8) $\theta=225^\circ$		(9) $\theta=240^\circ$	
					
$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$
$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$
$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$
(10) $\theta=300^\circ$		(11) $\theta=315^\circ$		(12) $\theta=330^\circ$	
					
$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$
$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$
$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$

(2) 象限角的三角函數值：

5 老師講解

求出下列各角度之三角函數值，並填入下列各空格。

① $\theta=0°$		② $\theta=90°$		③ $\theta=180°$		④ $\theta=270°$	
							
$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$	$\sin\theta=$	$\csc\theta=$
$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$	$\cos\theta=$	$\sec\theta=$
$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$	$\tan\theta=$	$\cot\theta=$

6 老師講解

$\sin 420°\cos(-510°)+\cos 1380°\cos 180°=$

6 學生練習

求出下列各式之值：

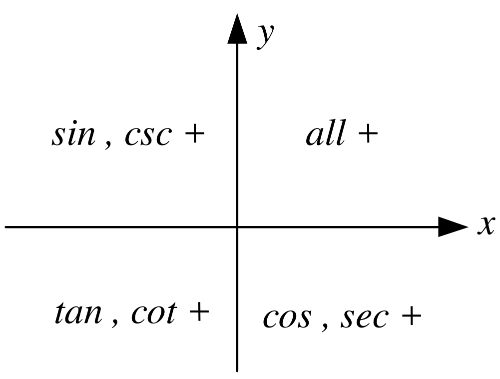
(1) $\sin 870°\cos(-1140°)$

(2) $\sin 90°+\sec 180°+\cot 270°+\cos 360°$

【代碼】t12a06m2

(3) 三角函數正負情形：

	一	二	三	四
$\sin\theta, \csc\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta, \sec\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta, \cot\theta$	+	−	+	−



7 老師講解

試判斷下列各函數值之正負號？

(1) $\sin 2030^\circ$　　(2) $\cos(-1900^\circ)$

(3) $\tan\dfrac{23}{5}\pi$　　(4) $\sin(-\dfrac{38}{7}\pi)$

7 學生練習

試判斷下列各函數值之正負號？

(1) $\sin 863^\circ$　　(2) $\csc(-310^\circ)$

(3) $\cot 2115^\circ$　　(4) $\tan(-811^\circ)$

【代碼】t12a05m2

8 老師講解

若角 $\theta \in$ 第三象限，則

點 $P(\tan\theta\cos\theta, \sec\theta\sin\theta)$ 在第幾象限？

8 學生練習

若角 $\theta \in$ 第二象限，

點 $P(\sin\theta\cos\theta, \cos\theta\cot\theta)$ 在第幾象限？

【代碼】t12b06m2

9 老師講解

若 $P(-3,-4)$ 為角 θ 終邊上之一點，

求 θ 角的六個三角函數值。

9 學生練習

若 $P(-12,5)$ 為角 θ 終邊上之一點，

求 $\sin\theta+\cos\theta$ 之值。

【代碼】t12b02m2

10 老師講解

已知 $\tan\theta=-\dfrac{12}{5}$，且 $\sin\theta<0$，

求 $\cot\theta+\csc\theta$ 之值。

10 學生練習

已知 $\cos\theta=-\dfrac{5}{13}$，且 $\sin\theta>0$，

求 $\tan\theta+\sec\theta$ 之值。

【代碼】t12b04m2

3. 化任意角為銳角：

(1) 餘函數：

$\sin \Leftrightarrow \cos$　　(sin , cos 彼此互餘)

$\tan \Leftrightarrow \cot$　　(tan , cot 彼此互餘)

$\sec \Leftrightarrow \csc$　　(sec , csc 彼此互餘)

(2) 化銳角：

遇 $\begin{cases}\text{整數}\pi(180^\circ,360^\circ)\Rightarrow\text{原函數不變}\\ \dfrac{\text{奇數}\pi}{2}(90^\circ,270^\circ)\Rightarrow\text{改餘函數}\end{cases}$

外加原函數之正、負

【註】：不管 θ 實際大小均以“銳角”視之。

$$\begin{cases}\tan120^\circ=\tan(180^\circ-60^\circ)=-\tan60^\circ=-\sqrt{3}\\ \tan120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\cot30^\circ=-\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin225^\circ=\sin(180^\circ+45^\circ)=-\sin45^\circ=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin225^\circ=\sin(270^\circ-45^\circ)=-\cos45^\circ=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos330^\circ=\cos(270^\circ+60^\circ)=\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

(3) $-\theta$ 函數的變換：

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　　$\csc(-\theta)=-\csc\theta$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$　　$\sec(-\theta)=\sec\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$　　$\cot(-\theta)=-\cot\theta$

例：$\begin{cases}\sin(-30^\circ)=-\sin30^\circ=-\dfrac{1}{2}\\ \cos(-30^\circ)=\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \tan(-30^\circ)=-\tan30^\circ=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$

【基本練習】
試求下列各三角函數值：

(1) $\sin 120°$　(2) $\tan 135°$　(3) $\tan 240°$

(4) $\cos 210°$　(5) $\cos 300°$　(6) $\sin 315°$

(7) $\cos 1320°$　(8) $\sin 1590°$

(9) $\sin(-120°)$　(10) $\tan(-1830°)$

11 老師講解

$\sin(-480°)\tan 870°+\cos(-1500°)\cot 1215°=$

11 學生練習

試求下列各式之值：
(1) $\tan 225°+\sin 210°+\cos 240°$
(2) $\sin 1230°\cos(-1140°)$

【代碼】t13a04m2

12 老師講解

化簡 $\dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(\pi-\theta)}+\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(-\theta)}+\dfrac{\tan(\frac{3}{2}\pi-\theta)}{\cot(2\pi-\theta)}$

12 學生練習

化簡 $\dfrac{\sin(\pi-\theta)}{\sin\theta}+\dfrac{\tan(\frac{3\pi}{2}-\theta)}{\cot(-\theta)}+\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(-\theta)}$

【代碼】t13b01m2

13 老師講解

設 $\sin 23° = k$，求 $\tan 157°$ 之值。

13 學生練習

設 $\cos 23° = k$，求 $\tan 337°$ 之值。

【代碼】t13b02m2

學生練習答案】

1. $\sin A = \frac{5}{13}$、$\cos A = \frac{12}{13}$、$\tan A = \frac{5}{12}$、$\csc A = \frac{13}{5}$、$\sec A = \frac{13}{12}$、$\cot A = \frac{12}{5}$			
2. (1) $\frac{5}{4}$ (2) 20 (3) $\frac{4}{3}$	3. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{7}{2}$		6. (1) $\frac{1}{4}$ (2) 1
7. (1) $\sin 863° > 0$ (2) $\cos(-310°) > 0$ (3) $\tan 2115° < 0$ (4) $\tan(-811°) > 0$			8. 第二象限
9. $-\frac{7}{13}$	10. -5	11. (1) 0 (2) $\frac{1}{4}$	12. 1
13. $-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$			

回家功課

(　) 1. 若直角三角形 ABC 之 $\angle C$ 為直角且 $\sin B=\frac{3}{5}$，則 $\frac{\sin A}{1+\cos A}$ 之值為何？ (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{27}{20}$ (D) $\frac{32}{15}$ 。	代碼：t12101p1
(　) 2. 設 θ 為銳角，若 $\tan\theta=\sqrt{2}$，試求 $\sqrt{3}\sin\theta+\sqrt{6}\cos\theta=$ ？ (A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{3}$ 。	代碼：t12097k1
(　) 3. 若 θ 為一銳角，而且其正弦函數的值為 0.2，則其餘切函數值為何？ (A) $\frac{\sqrt{6}}{12}$ (B) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ (C) $\frac{5\sqrt{6}}{12}$ (D) $2\sqrt{6}$ 。	代碼：t12090s1
(　) 4. $\sin\pi+\cos\pi+\tan\pi=$ (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 3 。	代碼：t12088s1
(　) 5. 設 m, n 為正奇數，則 $(\sin m\pi)^2+(\cos\frac{n\pi}{2})^2=$ ？ (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3	代碼：t12099s1
(　) 6. 設 θ 為實數，若 $\tan\theta=\frac{5}{12}$ 且 $\sin\theta<0$，則 $\sin\theta-\cos\theta=?$ (A) $-\frac{12}{13}$ (B) $-\frac{7}{13}$ (C) $\frac{7}{13}$ (D) $\frac{12}{13}$ 。	代碼：t12094s1
(　) 7. 點 $(\sin 700°, \cos 700°)$ 在第幾象限? (A)一 (B)二 (C)三 (D)四 。	代碼：t12092s1
(　) 8. 若點 $A(\sec\theta, \tan\theta)$ 在第四象限內，則角度 θ 為第幾象限角？ (A)一 (B)二 (C)三 (D)四 。	代碼：t12099s2
(　) 9. 試求 $\sin 690°+\cos 240°+\tan(-2025°)=$ ？ (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 。	代碼：t12098w1
(　) 10. 試求 $\cot\frac{15\pi}{4}\tan(\frac{-5\pi}{4})+\sin(\frac{-5\pi}{3})\cos\frac{7\pi}{6}+\cos(\frac{-\pi}{2})\sin(-\pi)=$ ？ (A) $\frac{-7}{4}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{7}{4}$ (D) $\frac{3}{2}$ 。	代碼：t13091s1
(　) 11. 設 θ 為銳角，則 $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(360°+\theta)}+\frac{\tan(180°+\theta)}{\cot(270°+\theta)}-\frac{\sin(270°-\theta)}{\cos(90°+\theta)}=$ ？ (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3 。	代碼：t13098s2
(　) 12. 已知 $\tan 22°=k$，則 $\sin 2002°=$ ？ (A) $\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ (B) $\frac{-1}{\sqrt{k^2+1}}$ (C) $\frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ (D) $\frac{-k}{\sqrt{k^2+1}}$ 。	代碼：t13091k1

答案：BCDAA　CBDAB　BD

主題三　三角函數的基本性質

1. 倒數關係：

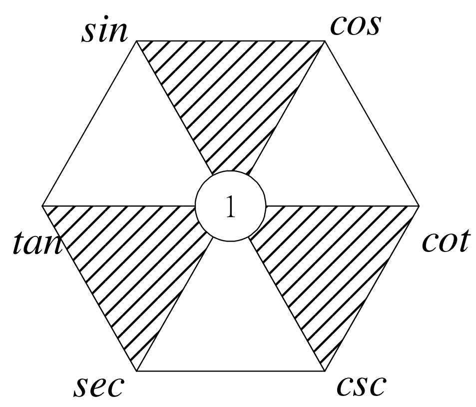
$\sin\theta\cdot\csc\theta=1$，$\cos\theta\cdot\sec\theta=1$，$\tan\theta\cdot\cot\theta=1$

2. 平方關係：

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$，$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

3. 商數關係：

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$



1 老師講解

求 $\sin 3^\circ\csc 3^\circ+\cos 5^\circ\sec 5^\circ+\tan 7^\circ\cot 7^\circ$ 之值。

1 學生練習

求 $\sin 1^\circ\cos 10^\circ\tan 25^\circ\cot 25^\circ\sec 10^\circ\csc 1^\circ$ 之值。

【代碼】t14a02m2

2 老師講解

求 $\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ+\tan^2 40^\circ-\cot^2 10^\circ-\sec^2 40^\circ+\csc^2 10^\circ$ 之值。

2 學生練習

求 $\sin^2 10^\circ+\tan^2 20^\circ-\sec^2 20^\circ+\cos^2 10^\circ$ 之值。

【代碼】t14a02m3

3 老師講解

求 $\sin^2 40°+\sin^2 50°+\tan^2 20°-\sec^2 160°$ 之值。

3 學生練習

求 $\sin^2 10°+\sin^2 25°+\sin^2 65°+\sin^2 80°$ 之值。

【代碼】t14a02m4

4 老師講解

若 $x=\sin\theta+\cos\theta+1$，$y=\sin\theta-\cos\theta+1$，求 $(x-1)^2+(y-1)^2$ 之值。

4 學生練習

化簡下列各式：

$(\tan\theta+\cot\theta)^2-(\tan\theta-\cot\theta)^2$

【代碼】t14a02m5

5 老師講解

求 $(\sin\theta-\csc\theta)^2-(\tan\theta-\cot\theta)^2+(\cos\theta-\sec\theta)^2$ 之值。

5 學生練習

化簡 $\dfrac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot\dfrac{1+\sec\theta}{1+\csc\theta}=$ ________。

【代碼】t14b04m2

6 老師講解

化簡 $(1+\tan\theta+\sec\theta)(1+\cot\theta-\csc\theta)$

6 學生練習

$(\csc\theta-\sin\theta)(\sec\theta-\cos\theta)(\tan\theta+\cot\theta)=$？

【代碼】t14b02m2

4.三角求值公式：

$$\begin{cases}\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}\\(\sin\theta\pm\cos\theta)^2=1\pm2\sin\theta\cos\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\\\sin^3\theta\pm\cos^3\theta=(\sin\theta\pm\cos\theta)(1\mp\sin\theta\cos\theta)\end{cases}$$

7 老師講解

設 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，求下列各式之值：

(1) $\sin\theta\cos\theta$
(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$
(3) $\sin\theta-\cos\theta$

7 學生練習

試求下列各式之值：

(1) 設 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，求 $\sin\theta\cos\theta=$？

(2) 設 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，求 $\sin^3\theta+\cos^3\theta=$？

【代碼】t14a03m2

8 老師講解

設 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$，若 $\tan x+\cot x=\dfrac{18}{7}$，

求下列各式之值：(1) $\sin x\cdot\cos x$

(2) $\sin x+\cos x$　(3) $\sin x-\cos x$

8 學生練習

設 $\tan\theta+\cot\theta=\dfrac{18}{5}$，且 $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，

求 $\sin\theta-\cos\theta$ 之值。

【代碼】t14b06m2

基礎數學充電站

以下題目的國中基礎運算，溫習一下吧～

根與係數的關係：代碼 **b08k02m1**

9 老師講解

設 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 為二次方程式

$5x^2-2x+k=0$ 之二根，則 k 之值為？

9 學生練習

設 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 為二次方程式

$4x^2-5x+k=0$ 之二根，則 k 之值為？

【代碼】t14a04m3

【學生練習答案】

1. 1	2. 0	3. 2	4. 4
5. $\tan\theta$	6. 1	7. (1) $\dfrac{3}{8}$　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	8. $\dfrac{2}{3}$
9. $\dfrac{9}{8}$			

回家功課

( ) 1. $\sin^2 40°+\sin^2 50°+\cot^2 50°-\sec^2 140°=$ 代碼：t14203m1
(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2 。

( ) 2. 求 $\dfrac{\sin 62°\cdot\sec 37°\cdot\cot 13°}{\tan 77°\cdot\cos 28°\cdot\csc 53°}=$ (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2 。 代碼：t14261m1

( ) 3. $\sin^2 33°(\sec^2 18°-\tan^2 18°)+\sin^2 57°(\csc^2 79°-\cot^2 79°)=$ 代碼：t14262m1
(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

( ) 4. 求 $\sin^2 10°+\sin^2 20°+\sin^2 30°+\cdots+\sin^2 80°+\sin^2 90°$ 之值爲 代碼：t14263m1
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 。

( ) 5. 試求 $(\sin 5°-\csc 5°)^2+(\cos 5°-\sec 5°)^2-(\tan 5°)^2-(\cot 5°)^2=?$ 代碼：t14091s1
(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 。

( ) 6. 已知 $\cot\theta=\dfrac{1}{3}$，則 $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=$ 代碼：t14218m1
(A) 30 (B) 20 (C) 15 (D) 12 。

( ) 7. $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1+\sec\theta}+\dfrac{1}{1+\csc\theta}=$ 代碼：t14b04m1
(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 。

( ) 8. $\dfrac{x}{\csc^2 x}+\dfrac{x}{\sec^2 x}=\dfrac{\pi}{12}$，則 $x=$ 代碼：t14213m1
(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{3}$ (C) $\dfrac{\pi}{4}$ (D) $\dfrac{\pi}{12}$ (E) $\dfrac{\pi}{8}$ 。

( ) 9. 化簡 $\sin^2(\pi+\theta)+\cos^2(\theta-\pi)+\sec^2(\pi+\theta)-\tan^2(\theta-\pi)$ 為 代碼：t14088z2
(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) -2 。

( ) 10. 設 $\tan\theta=3$，則 $\dfrac{2\sin\theta-3\cos\theta}{3\sin\theta-2\cos\theta}$ 的值為 代碼：t14207m1
(A) $\dfrac{7}{3}$ (B) $-\dfrac{7}{3}$ (C) $\dfrac{3}{7}$ (D) $-\dfrac{3}{7}$ 。

( ) 11. 設 $\tan\theta+\cot\theta=3$，且 $\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$，則 $\sin\theta+\cos\theta$ 之值為 代碼：t14211m1
(A) $-\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ (B) $-\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ (C) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ (D) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$ 。

(　　) 12. 已知θ為銳角，且$\sin\theta > \cos\theta$。若$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{\sqrt{17}}{3}$，
則$\sin\theta - \cos\theta =$？
(A)$\dfrac{1}{9}$　(B)$\dfrac{2}{9}$　(C)$\dfrac{1}{3}$　(D)$\dfrac{4}{9}$　。

代碼：t14098s1

(　　) 13. 設θ為實數，若$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{3}$，則$\sec\theta - \csc\theta =$？
(A)$\dfrac{3}{4}$　(B)$\dfrac{4}{3}$　(C)$\dfrac{4}{5}$　(D)$\dfrac{5}{4}$　。

代碼：t14096s1

(　　) 14. 設a是一常數，若$\sin p$與$\cos p$是二次方程式$x^2 + ax + \dfrac{1}{2} = 0$的兩根，
則$\tan p + \cot p =$？
(A)8　(B)6　(C)4　(D)2　。

代碼：t14098w1

(　　) 15. 設$\theta = 10^\circ$，求$\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos 18\theta =$
(A)-1　(B)0　(C)1　(D)3　。

代碼：t13b03m1

(　　) 16. 設$\theta = 10^\circ$，求$\cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \cdots + \cos^2 18\theta =$
(A)8　(B)9　(C)10　(D)18　。

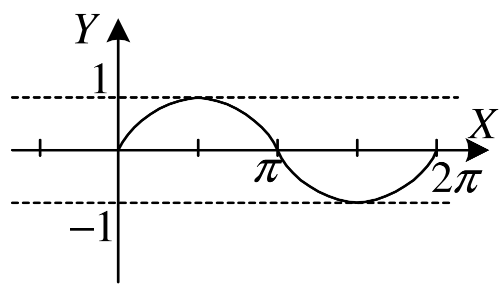
代碼：t14264m1

答案：ABBAA　BDDBC　ACADA　B

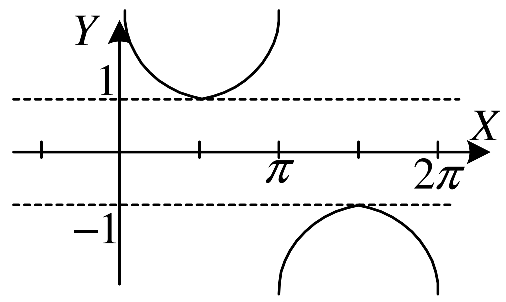
主題四　三角函數圖形

試繪下列各圖形：

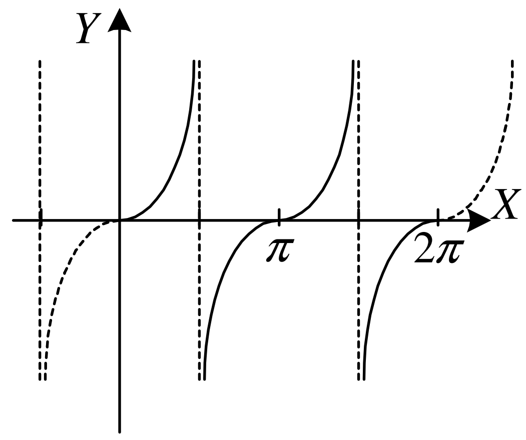
(1) $y=\sin x$



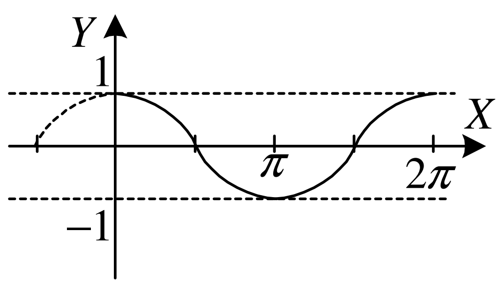
(3) $y=\csc x$



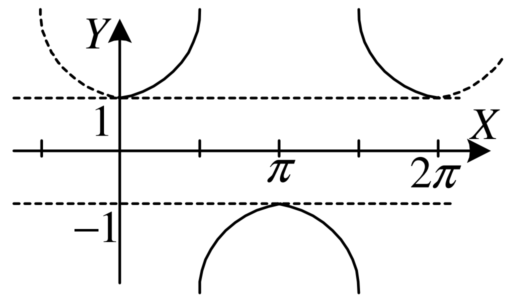
(5) $y=\tan x$



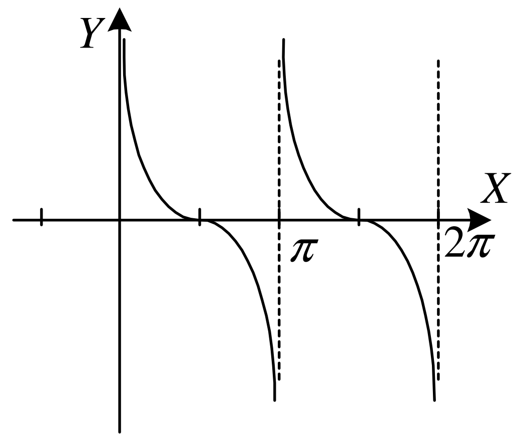
(2) $y=\cos x$



(4) $y=\sec x$



(6) $y=\cot x$



1.週期之求法：

(1) $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$ 的週期皆為 2π

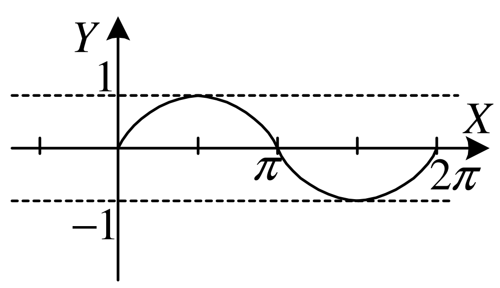
(2) $y=\tan x$、$y=\cot x$ 的週期皆為 π

(3) $y=|\sin x|$、$y=|\cos x|$、$y=|\tan x|$、$y=|\cot x|$、$y=|\sec x|$、$y=|\csc x|$ 的週期皆為 π

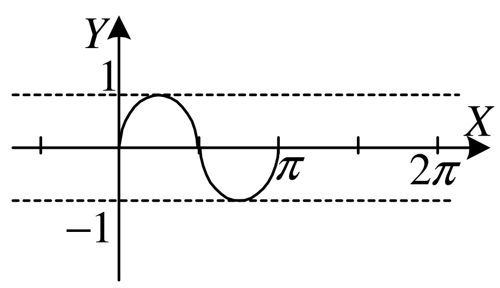
(4) $y=\sin^2 x$、$y=\cos^2 x$、$y=\tan^2 x$、$y=\cot^2 x$、$y=\sec^2 x$、$y=\csc^2 x$ 的週期皆為 π

(5) 設 $f(x)$ 之週期為 p，則 $f(kx)$ 之週期為 $\dfrac{p}{k}$。

$y=\sin x$



$y=\sin 2x$



例：　$\sin 2x$ 的週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

$\tan 3x$ 的週期為 $\dfrac{\pi}{3}$

1 老師講解

試繪出 $y=2\sin x+1$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 的部分圖形

1 學生練習

已知 $y=-2\sin x+1$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 的圖形與水平線 $y=2$ 交點個數有幾個？

【代碼】t15a07m1

2 老師講解

試繪出 $y=3\sin 2x$ 在 $0\le x\le 2\pi$ 的部分圖形

2 學生練習

關於函數 $y=2\sin 3x$ ，則下列何者錯誤？

(A) $-2\le y\le 2$

(B) 此函數在 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 時有最大值

(C) 此函數週期為 2π

(D) 此函數圖形對稱於 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 。

【代碼】t15a07m2

3 老師講解

求下列各函數之週期：

(1) $\cos 5x$

(2) $\sin\dfrac{x}{2}$

(3) $3|\cos(2x+30^\circ)|+2$

(4) $3\sec^2(-3x+\dfrac{\pi}{5})+2$

3 學生練習

求下列各函數之週期：

(1) $f(x)=3\cos(2x+\dfrac{2\pi}{3})$

(2) $f(x)=5+2\sin^2(3x+\dfrac{4\pi}{7})$

【代碼】t15a02m2

2. 三角函數之值域：

$-1\le\sin\theta\le1 \quad\Rightarrow|\sin\theta|\le1$

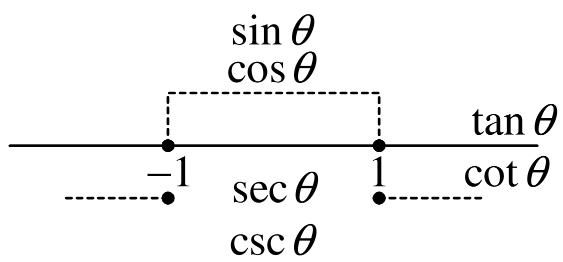
$-1\le\cos\theta\le1 \quad\Rightarrow|\cos\theta|\le1$

$\tan\theta\in R$

$\cot\theta\in R$

$\sec\theta\le-1$，$\sec\theta\ge1 \quad\Rightarrow|\sec\theta|\ge1$

$\csc\theta\le-1$，$\csc\theta\ge1 \quad\Rightarrow|\csc\theta|\ge1$



4 老師講解

下列各式中何者有解？

(A) $\sin x=\dfrac{4}{3}$ (B) $\cos x=-\dfrac{7}{5}$

(C) $\sec x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\tan x=-99$ 。

4 學生練習

下列各式中何者無解？

(A) $\sin x=-\dfrac{4}{5}$ (B) $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\sec x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\tan x=-0.9$ 。

【代碼】t15a03m2

5 老師講解

若 $90° < \theta < 180°$，
且 $2\cos^2\theta - 5\sin\theta + 1 = 0$，求 θ 的角度？

5 學生練習

設 $\sin^2 x = \cos x$，求 $\cos x$ 之值。

【代碼】t15a04m3

6 老師講解

若 $f(x) = 2\cos^2 x + 3\sin x$，
求 $f(x)$ 之最大值與最小值。

6 學生練習

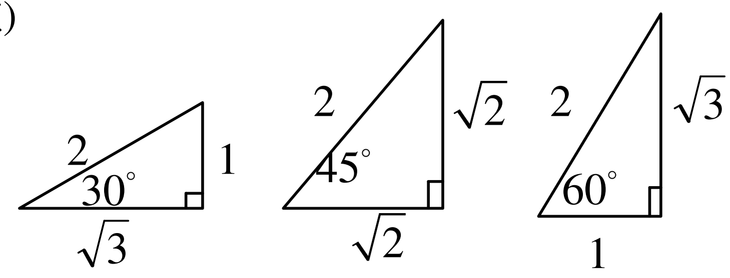
求 $f(x) = \cos^2 x - \cos x + 3$ 之最小值。

【代碼】t15b02m2

3.比大小：

(1) $0^\circ \sim 90^\circ \Rightarrow \theta$愈大$\Rightarrow \begin{cases} \sin\theta \text{愈大} \\ \cos\theta \text{愈小} \end{cases}$ $(\tan\theta$、$\sec\theta$愈大$)$

(2) $\begin{cases} 0^\circ \sim 45^\circ \Rightarrow \sin\theta < \cos\theta\,,\ \tan\theta < 1 \\ 45^\circ \sim 90^\circ \Rightarrow \sin\theta > \cos\theta\,,\ \tan\theta > 1 \end{cases}$



(3) $0^\circ \sim 90^\circ$ ：$\begin{cases} \sin\theta < 1 \\ \cos\theta < 1 \end{cases}$、$\begin{cases} \sec\theta > 1 \\ \csc\theta > 1 \end{cases}$、$\begin{cases} 0^\circ \sim 45^\circ \Rightarrow \tan\theta < 1 \\ 45^\circ \sim 90^\circ \Rightarrow \tan\theta > 1 \end{cases}$

7 老師講解

試比較$a=\sin 43^\circ$、$b=\sec 1^\circ$、$c=\cos 74^\circ$之大小

7 學生練習

試比較下列大小：

(1) $a=\sin 20^\circ$、$b=\cos 40^\circ$、$c=\cot 10^\circ$

(2) $a=\cos 54^\circ$，$b=\csc 18^\circ$，$c=\sin 20^\circ$

【代碼】t15a05m2

8 老師講解

試比較下列三角函數大小：

(1) $a=\sin 1220^\circ$、$b=\cos(-800^\circ)$、$c=\cot(-1240^\circ)$

(2) $a=\sec 40^\circ$、$b=\cot 72^\circ$、$c=\csc 20^\circ$

8 學生練習

(1) 設$a=\sin 870^\circ$，$b=\cos 410^\circ$，$c=\tan 1310^\circ$，$d=\sin(-2095^\circ)$比較a,b,c,d之大小。

(2) 三角函數值$\sin 71^\circ$、$\cos 71^\circ$、$\sec 71^\circ$、$\csc 71^\circ$中，何者爲最大？

【代碼】t15b03m2

【學生練習答案】

1. 2	2. (C)	3. (1) π (2) $\frac{\pi}{3}$	4. (C)
5. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	6. $\frac{11}{4}$	7. (1) $c>b>a$ (2) $b>a>c$	
8. (1) $c>d>b>a$ (2) $\sec 71^\circ$			

回家功課

( ) 1. 已知正弦函數 $f(x)=\sin x$ 之週期為 2π，則 $g(x)=4\sin 2x+3$ 的週期為何？ 代碼：t15100p2
(A) π (B) 2π (C) 3π (D) 4π

( ) 2. 若 $y=\sin 2x$ 的週期爲 a， $y=2\sin x$ 的週期爲 b，則 $a+2b=$ 代碼：t15106w1
(A) 2π (B) 3π (C) 4π (D) 5π

( ) 3. 已知 $-1\le\cos x\le 1$，則 $|\cos x|+2$ 最小值為何？ 代碼：t15102p1
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

( ) 4. 若 $\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{7\pi}{6}$，則 $\sin x$ 之最大值爲 M，最小值爲 m，求 $M+m=$？ 代碼：t15251m1
(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $-\frac{1}{2}$ 。

( ) 5. 若 $90°<\theta<270°$，則 $\sqrt{\cos^2\theta}+\sqrt{(1+\cos\theta)^2}=$ 代碼：t15217m1
(A) 0 (B) $4+2\cos\theta$ (C) 1 (D) -1 。

( ) 6. 已知 $\cos^2\theta=\sin\theta-1$，求 $\sin\theta=$ 代碼：t15207m1
(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (D) $-\frac{1}{2}$ 。

( ) 7. 設 $3\tan^2\theta-5\sec\theta+1=0$，且 θ 在第四象限，求 $\sin\theta=$ 代碼：t15219m1
(A) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ (B) $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

( ) 8. 設 $0\le x\le 2\pi$，若 $2\sin^2 x+\cos x$ 的最大值為 a、最小值為 b，則 (a,b) 為何 ？ 代碼：t15092s1
(A) $(\frac{17}{8},-1)$ (B) $(3,-1)$ (C) $(2,1)$ (D) $(\frac{9}{8},1)$ 。

( ) 9. 三角函數值 $\sin 35°$、$\cos 35°$、$\tan 35°$、$\cot 35°$ 中，何者為最小? 代碼：t15092s2
(A) $\sin 35°$ (B) $\cos 35°$ (C) $\tan 35°$ (D) $\cot 35°$ 。

( ) 10. 若 $a=\sin 770°$、$b=\cos(-380°)$、$c=\tan 1150°$，則下列何者正確？ 代碼：t15093s1
(A) $a<c<b$ (B) $a<b<c$ (C) $b<c<a$ (D) $c<a<b$ 。

答案：ADBBC　ADAAB

主題五　正弦、餘弦定理、三角形面積

1. 正弦定理：

設 ΔABC 中 a 、 b 、 c 分別表 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊長， R 為 ΔABC 之外接圓之半徑，則：

(1) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

(2) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

1　老師講解

ΔABC 中，若 $b=3\sqrt{2}$ ， $\angle A=75^\circ$ ， $\angle C=60^\circ$ ，試求 $\overline{AB}$ 之值與 ΔABC 外接圓半徑。

1　學生練習

ΔABC 中，已知 $\overline{BC}=2$ ， $\angle B=45^\circ$ ， $\angle C=105^\circ$ ，試求 b 之值。

【代碼】t31a01m3

2　老師講解

設 ΔABC 中，三邊長 a,b,c ，
且 $(a+b-2c)^2+(3a-2b+c)^2=0$ ，
試求 $\sin A:\sin B:\sin C$ 之值。

2　學生練習

設 ΔABC 中，三邊長 a,b,c ，
且 $(3a-12b+8c)^2+(5a+2b-5c)^2=0$ ，
試求 $\sin A:\sin B:\sin C$ 之值。

【代碼】t31b01m2

2.餘弦定理：

設 ΔABC 中以 a 、 b 、 c 分別表 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的對邊長

(1) $\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$

(已知三邊長 SSS，求三內角度數)

(2) $\begin{cases} a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2 = c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$

(已知兩邊一夾角 SAS，求第三邊)

3 老師講解

ΔABC 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=5$，$\angle A=120^\circ$
試求 $\overline{BC}$ 之值。

3 學生練習

ΔABC 中，$\overline{AB}=\sqrt{3}$ 、 $\overline{AC}=3$ 、 $\angle A=30^\circ$
試求 $\overline{BC}$ 之值。

【代碼】t31a02m2

4 老師講解

設 ΔABC 中，三邊長比例為 $7:8:13$，
試求此三角形之最大內角度量。

4 學生練習

一三角形，其三邊長比為 $4:5:6$，
設最大邊所對角為 θ，試求 $\cos\theta$ 之值。

【代碼】t31a02m3

5 老師講解

設 ΔABC 三邊長為 a,b,c，
若 $a^2-(b-c)^2=bc$，試求 $\angle A$ 的度量。

5 學生練習

設 a,b,c 表 ΔABC 三邊之長，
若 $a^2-(b+c)^2=-bc$，試求 $\angle A$ 的度量。

【代碼】t31b02m2

6 老師講解

圓內接四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\angle ABC=120^\circ$，試求 $\overline{AD}$ 之值。

6 學生練習

已知四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=8$，$\overline{CD}=8$，$\overline{AD}=3$，且 $\angle ABC=\angle ADC=60^\circ$，試求 $\overline{BC}$ 之值。

【代碼】t31b03m2

3.三角形面積公式與外接圓、內切圓半徑：

設 ΔABC 中以 a、b、c 分別表 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

(1) ΔABC 面積 $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$ (已知兩邊一夾角 SAS，求面積)

(2) 海龍公式：

ΔABC 面積 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (已知三邊長 SSS，求面積)

(3) 三角形的外接圓與內切圓半徑：

ΔABC 面積 $\Delta=rs$ (r 表 Δ 內切圓之半徑)

ΔABC 面積 $\Delta=\frac{abc}{4R}$ (R 表 Δ 外接圓之半徑)

7 老師講解

ΔABC 中 $\angle A=120^\circ$，$b=4$，$c=5$，試求 ΔABC 的面積。

7 學生練習

在 ΔABC 中，$a=12$，$c=\sqrt{3}$，$\angle B=60^\circ$ 試求 ΔABC 的面積。

【代碼】t32a01m2

8 老師講解

已知三角形三邊長爲6、10、14，試求此三角形面積。

8 學生練習

已知三角形的三邊長爲13，14，15，試求此三角形面積。

【代碼】t32a02m2

9 老師講解

ΔABC 中 $\overline{BC}=2$，$\angle B=45°$，$\angle C=105°$ 試求 ΔABC 面積。

9 學生練習

ΔABC 中 $b=2\sqrt{2}$，$\angle A=75°$，$\angle C=60°$，試求 ΔABC 面積。

【代碼】t32b01m2

10 老師講解

ΔABC，$\angle A=120°$，$b=4$，$c=12$，試求 $\angle A$ 之內角平分線長。

10 學生練習

ΔABC 之中，$\angle A=60°$、$b=4$、$c=8$，試求 $\angle A$ 之內角平分線長。

【代碼】t32b02m2

11 老師講解

ΔABC，$\angle A=120°$，$b=4$，$c=12$，
試求 ΔABC 外接圓面積。

11 學生練習

ΔABC 之中，$\angle A=60°$、$b=4$、$c=8$，
試求 ΔABC 外接圓面積。

【代碼】t32b03m2

12 老師講解

設 ΔABC 中，$a=7$，$b=4$，$c=5$，
試求：
(1) ΔABC 之外接圓半徑
(2) ΔABC 之內切圓面積

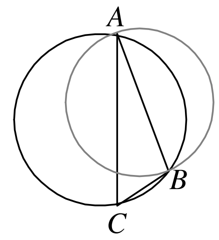
12 學生練習

設 ΔABC 三邊長分別為 4、6、8，試求：
(1) ΔABC 之面積
(2) 邊長 6 所對應之高
(3) ΔABC 之內切圓半徑
(4) ΔABC 之外接圓半徑

【代碼】t32a02m3

【加強題】

1. 如右圖，先作 ΔABC 的外接圓 O_1，再以 $\overline{AB}$ 長為直徑作另一圓 O_2，若 $\angle ACB = 60°$，則將圓 O_1 與圓 O_2 的面積比寫成簡單的整數比為______。



2. 在三角形 ABC 中，若 D 點在邊 $\overline{BC}$ 上，$\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=13$，$\overline{BD}=7$，$\overline{CD}=8$，則 $\overline{AD}=$________。

【學生練習答案】

1. $2\sqrt{2}$	2. $4:5:6$	3. $\sqrt{3}$	4. $\frac{1}{8}$
5. $120°$	6. 5或3	7. 9	8. 84
9. $3+\sqrt{3}$	10. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$	11. 16π	12. (1) $3\sqrt{15}$ (2) $\sqrt{15}$ (3) $\frac{\sqrt{15}}{3}$ (4) $\frac{16\sqrt{15}}{15}$

回家功課

( ) 1. ΔABC中，若$\angle A:\angle B:\angle C=1:1:4$，試求$a:b:c=$ (A)$1:1:1$ (B)$1:1:\sqrt{2}$ (C)$1:1:\sqrt{3}$ (D)$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$ 。	代碼：t31a01m4
( ) 2. 在ΔABC中，設a,b,c分別為$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的對邊長。 若$a-2b+c=0$且$3a+b-2c=0$，則下列何者正確？ (A)$\angle A>\angle B>\angle C$ (B)$\angle B>\angle C>\angle A$ (C)$\angle C>\angle B>\angle A$ (D)$\angle C>\angle A>\angle B$ 。	代碼：t31094s1
( ) 3. ΔABC中，$\overline{AB}=30$公分，$\overline{AC}=10$公分，$\angle A=60^\circ$，則$\dfrac{\sin B}{\sin C}$之值為 (A)$\frac{1}{2}$ (B)$\frac{1}{3}$ (C)$\frac{1}{4}$ (D)$\frac{1}{5}$ (E)$\frac{1}{6}$ 。	代碼：t31203m1
( ) 4. ΔABC中，若$\dfrac{7}{\sin A}=\dfrac{8}{\sin B}=\dfrac{13}{\sin C}$，則$\angle C$等於 (A)$30^\circ$ (B)60° (C)120 (D)150 。	代碼：t31205m1
( ) 5. 設$A(1,0)$，$B(3,0)$，$C(-1,2)$，則$\angle CAB$之度數為何？ (A)120° (B)135° (C)150° (D)160° 。	代碼：t31101p1
( ) 6. 已知ΔABC中，邊長滿足$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}\cdot\overline{BC}$，求$\cos C=?$ (A)$\frac{-2}{3}$ (B)$\frac{-1}{2}$ (C)$\frac{1}{2}$ (D)$\frac{2}{3}$ 。	代碼：t31102p2
( ) 7. 已之四邊形$ABCD$(按順序)中，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AD}=3$， 且$\angle ABC=\angle ADC=60^\circ$，則$\overline{CD}$之長為多少？ (A)5 (B)6 (C)7 (D)8 。	代碼：t31098k1
( ) 8. 若ΔABC中，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=2\sqrt{3}$，且$\angle A=60^\circ$，則ΔABC之面積為何？ (A)$2\sqrt{3}$ (B)$4\sqrt{3}$ (C)$6\sqrt{3}$ (D)$8\sqrt{3}$ 。	代碼：t32099s1
( ) 9. 在ΔABC中，設$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$之對應邊長分別為a,b,c 若$\angle B=120^\circ,a=5,c=3$，則$\Delta ABC$的外接圓面積為何？ (A)$\frac{7}{\sqrt{3}}\pi$ (B)$\frac{49}{\sqrt{3}}\pi$ (C)$\frac{7}{3}\pi$ (D)$\frac{49}{3}\pi$ 。	代碼：t32095k2
( ) 10. 設A、B、C為一圓之圓周上三點，若$\overline{AB}=4$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=8$， 則該圓之面積為何？ (A)$\frac{256}{15}\pi$ (B)$\frac{256}{13}\pi$ (C)$\frac{81}{4}\pi$ (D)$\frac{81}{2}\pi$ 。	代碼：t32099k1
( ) 11. 梯形$ABCD$中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，$\overline{AD}=4$、$\overline{BC}=10$、$\overline{AB}=5$、$\overline{DC}=7$， 試求梯形$ABCD$面積$=$ (A)$14\sqrt{3}$ (B)$14\sqrt{6}$ (C)$18\sqrt{2}$ (D)$16\sqrt{3}$ 。	代碼：t32251m1

答案：CCBCB BDCDA B

歷屆試題

( ) 1. 求$\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}\cot(-\frac{\pi}{4})+\sin(-\frac{11\pi}{6})\cos\frac{\pi}{3}=$？

(A)-2 (B)$-\sqrt{3}$ (C)0 (D)$\sqrt{3}$。

代碼：t12100s1 (100 年統測 B)

( ) 2. 下列哪一個點在$y=\sin x+\cos x$的圖形上？

(A)$(-\frac{\pi}{2},1)$ (B)$(-\frac{\pi}{6},\frac{1-\sqrt{3}}{2})$ (C)$(\pi,1)$ (D)$(\frac{5\pi}{3},\frac{1-\sqrt{3}}{2})$。

代碼：t15100s1 (100 年統測 B)

( ) 3. 已知ΔABC中，$\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{3}:2$，則下列何者正確？

(A)$2\sqrt{3}\overline{BC}=2\overline{CA}=\sqrt{3}\overline{AB}$ (B)$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:\sqrt{3}:2$

(C)$\cos A:\cos B:\cos C=1:\sqrt{3}:2$ (D)$\angle A=60°$，$\angle B=30°$，$\angle C=90°$。

代碼：t31100s1 (100 年統測 B)

( ) 4. 已知$0\le\alpha,\beta\le\pi$。下列各選項中，何者恆爲正確？

(A)若$\cos\alpha=\cos\beta$，則$\alpha=\beta$ (B)若$\cos(\alpha-\beta)=0$，則$\alpha=\beta$

(C)若$\sin\alpha=\sin\beta$，則$\alpha=\beta$ (D)若$\sin(\alpha-\beta)=0$，則$\alpha=\beta$。

代碼：t12100k1 (100 年統測 C)

( ) 5. 下列何者正確？ (A)$\sin 240°=\cos 30°$ (B)$\cos(-330)°=-\cos 30°$

(C)$\sec 225°=\csc 45°$ (D)$\tan 135°=-\cot 45°$。

代碼：t13101s1 (101 年統測 B)

( ) 6. 已知θ爲一銳角，且$\tan\theta=\frac{7}{19}$，則$(\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta})(\frac{1+\sec\theta}{1+\csc\theta})$之值爲何？

(A)$\frac{25}{17}$ (B)$\frac{7}{19}$ (C)$\frac{19}{267}$ (D)$\frac{277}{319}$。

代碼：t14101s1 (101 年統測 B)

( ) 7. 已知$\sin\theta=\sin\phi=\frac{1}{3}$，且$0<\theta<x<\frac{\pi}{2}<\phi<y<\pi$，令$a=\sin x-\frac{1}{3}$，

$b=\sin y-\frac{1}{3}$，則下列何者正確？ (A)$a>0$，$b>0$ (B)$a>0$，$b<0$

(C)$a<0$，$b>0$ (D)$a<0$，$b<0$。

代碼：t15101s1 (101 年統測 B)

( ) 8. 已知三角形Δ_1的三邊長分別爲8、7、5，面積爲x；三角形Δ_2的三邊長分別爲8、6、6，面積爲y；三角形Δ_3的三邊長分別爲9、7、4，面積爲z，則下列何者正確？

(A)$y<z$ (B)$x<z$ (C)$x<y$ (D)$x+y+z=\sqrt{800}$。

代碼：t32101s1 (101 年統測 B)

( ) 9 已知中ΔABC中$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=2\sqrt{3}$，$\angle A=30°$，$\angle B>90°$，則ΔABC之面積為何？ (A)$2\sqrt{3}$ (B)$3\sqrt{3}$ (C)$4\sqrt{3}$ (D)$6\sqrt{3}$。

代碼：t32101s2
(101 年統測 B)

( )10. 試問下列哪一個三角函數值與$\sec 250°$相等？
(A)$-\csc 70°$ (B)$-\sec 110°$ (C)$-\sec 340°$ (D)$-\csc 160°$。

代碼：t13101k1
(101 年統測 C)

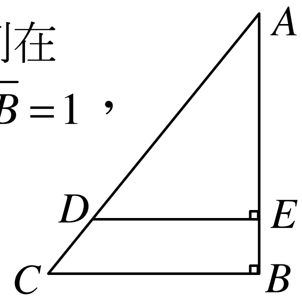
( )11. $\sin^2 210°+\cos^2 570°+\sec^2 930°-\tan^2 1290°+\csc^2 1650°-\cot^2 2010°=$？
(A)-1 (B)1 (C)$\frac{3}{2}$ (D)3。

代碼：t14101k1
(101 年統測 C)

( )12. ΔABC中，若$\overline{BC}=\sqrt{13}$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=60°$，則$\cos C$之值為何？
(A)$-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ (B)$-\frac{1}{\sqrt{13}}$ (C)$\frac{1}{\sqrt{13}}$ (D)$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$。

代碼：t31101k1
(101 年統測 C)

( )13. 已知ΔABC為直角三角形，$\angle B$為直角，點D、E分別在線段$\overline{AC}$、$\overline{AB}$上。若$\overline{DE}$、$\overline{AB}$互相垂直，且$\overline{AD}=\overline{AB}=1$，$\overline{AB}\neq\overline{BC}$，如圖(一)，則下列敘述何者為眞？
(A)$\overline{BC}=\cot A$ (B)$\overline{DE}=\tan A$
(C)$\overline{AE}=\sin C$ (D)$\overline{AC}=\sec C$。



圖(一)

代碼：t12102s1
(102 年統測 B)

( )14. 已知ΔABC中，$\sin A:\sin B:\sin C=5:7:8$，求$\cos A$之值。
(A)$\frac{11}{14}$ (B)$\frac{5}{7}$ (C)$\frac{9}{14}$ (D)$\frac{4}{7}$。

代碼：t31102s1
(102 年統測 B)

( )15. 已知θ為第三象限角，且$\tan\theta=\frac{3}{4}$，則$\frac{2\sin\theta-1}{3+4\cos\theta}=$？
(A)$\frac{1}{31}$ (B)$\frac{13}{7}$ (C)11 (D)31。

代碼：t12102k1
(102 年統測 C)

( )16. 若ΔABC中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=9$、$\overline{CA}=10$，則$\cos(\angle A+\angle B)=$？
(A)$\frac{-13}{15}$ (B)$\frac{-7}{15}$ (C)$\frac{7}{15}$ (D)$\frac{13}{15}$。

代碼：t31102k1
(102 年統測 C)

( )17. 已知$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{8}{3}$，則$(\sin\theta+\cos\theta)^2=$
(A)$\frac{1}{4}$ (B)$\frac{3}{4}$ (C)$\frac{5}{4}$ (D)$\frac{7}{4}$。

代碼：t14103s1
(103 年統測 B)

(　　)18. 已知ΔABC三邊長a,b,c滿足$(a-b)^2=c^2-(2+\sqrt{3})ab$，若$\angle C$爲邊長$c$所對應的角，則$\angle C=$？　(A)$30°$　(B)$60°$　(C)$150°$　(D)$120°$。　代碼：t31103s1 (103 年統測 B)

(　　)19. 在ΔABC中，設三邊長之比$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=7:5:3$，則$\Delta ABC$之最大內角爲何？　(A)$75°$　(B)$90°$　(C)$120°$　(D)$135°$。　代碼：t31103k1 (103 年統測 C)

(　　)20. 若$0°<\theta<90°$且$\sin\theta=\frac{1}{3}$，則$2\sin\theta\cos\theta=$？
(A)$\frac{\sqrt{2}}{6}$　(B)$\frac{4\sqrt{2}}{9}$　(C)$\frac{2}{3}$　(D)$\frac{2\sqrt{2}}{3}$。　代碼：t12104s2 (104 年統測 B)

(　　)21. 若$a=\sin 45°$、$b=\tan 45°$、$c=\sec 45°$，則$a^2+b^2+c^2=$？
(A)3　(B)$\frac{7}{2}$　(C)4　(D)$\frac{9}{2}$。　代碼：t12104s1 (104 年統測 B)

(　　)22. 已知$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$，則$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=$？
(A)$2(\sqrt{3}-1)$　(B)$4(\sqrt{3}-1)$　(C)$2(\sqrt{3}+1)$　(D)$4(\sqrt{3}+1)$。　代碼：t14104k1 (104 年統測 C)

(　　)23. 已知三角形的三邊長分別爲3公分、3公分、4公分，則此三角形之外接圓半徑爲何？　(A)$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　(B)$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　(C)$\frac{7\sqrt{5}}{10}$　(D)$\frac{9\sqrt{5}}{10}$。　代碼：t32104k1 (104 年統測 C)

(　　)24. 已知$\csc\theta>0$且$\tan\theta<0$，則θ爲第幾象限角？
(A)一　(B)二　(C)三　(D)四。　代碼：t12105s1 (105 年統測 B)

(　　)25. 試求三角函數$\sin(-960°)$之值　(A)$\frac{-\sqrt{3}}{2}$　(B)$-\frac{1}{2}$　(C)$\frac{1}{2}$　(D)$\frac{\sqrt{3}}{2}$。　代碼：t12105s2 (105 年統測 B)

(　　)26. 若$f(x)=\sec^2\frac{x}{2}+\csc^2\frac{x}{2}$的週期爲$P$，求$P$之值
(A)$\frac{\pi}{2}$　(B)π　(C)2π　(D)π^2。　代碼：t15105k1 (105 年統測 C)

(　　)27. 設$\sec\theta+\csc\theta=1$，求$\sec\theta\csc\theta$之值
(A)$\sqrt{2}+1$　(B)$\sqrt{2}-1$　(C)$-\sqrt{2}-1$　(D)$-\sqrt{2}+1$。　代碼：t14105k1 (105 年統測 C)

( )28. 設ΔABC三內角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的對應邊分別為a、b、c，且$\sqrt{a^2-3bc}=b-c$，求$\angle A$之值 (A)$\frac{\pi}{2}$ (B)$\frac{2\pi}{3}$ (C)$\frac{3\pi}{4}$ (D)$\frac{5\pi}{6}$。

代碼：t31105k1 (105 年統測 C)

( )29. 已知$y=2\sin x+1$，$0\le x\le 2\pi$的圖形與水平線$y=1$、$y=0$、$y=-1$的交點個數分別為a、b、c，則下列何者正確？
(A)$a=3$、$b=2$、$c=1$ (B)$a=2$、$b=2$、$c=2$
(C)$a=2$、$b=3$、$c=2$ (D)$a=1$、$b=3$、$c=1$。

代碼：t15106s1 (106 年統測 B)

( )30. 已知A點坐標為$(\cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6})$，$B$點坐標為$(\cos\frac{11\pi}{6},\tan\frac{11\pi}{6})$，則線段$\overline{AB}$的長度為何？ (A)$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B)$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C)$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D)$\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

代碼：t13106s1 (106 年統測 B)

( ) 31. 已知$\sin\theta=\frac{7}{25}$，$\cos\theta=\frac{-24}{25}$，則$\tan\theta+\sec\theta=$？
(A)$\frac{-4}{3}$ (B)$\frac{-1}{7}$ (C)$\frac{1}{7}$ (D)$\frac{4}{3}$。

代碼：t14106s1 (106 年統測 B)

( ) 32. 已知ΔABC三內角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的對應邊長分別為a、b、c。若$a=\sqrt{2}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}-1$，則最大內角的角度為何？
(A)$105°$ (B)$120°$ (C)$135°$ (D)$150°$。

代碼：t31106s1 (106 年統測 B)

( ) 33. 若$\tan\theta\csc\theta=-1+6\cos\theta$，其中$\theta$為第三象限角，則$\tan\theta=$？
(A)$2\sqrt{2}$ (B)$\sqrt{3}$ (C)$-\sqrt{3}$ (D)$-2\sqrt{2}$。

代碼：t15106k1 (106 年統測 C)

( ) 34. 求$\sin^2 18°+\sin^2 36°+\sin^2 54°+\sin^2 72°+\sin^2 90°=$？
(A)2 (B)2.5 (C)3 (D)3.5。

代碼：t14106k1 (106 年統測 C)

( )35. 設三角形的三邊長為7、24、25，其內切圓半徑為r，外接圓半徑為R，求$\frac{r}{R}=$？ (A)0.12 (B)0.24 (C)0.25 (D)0.48。

代碼：t32106k1 (106 年統測 C)

( ) 36. 若$\sin\theta=\frac{33}{65}$，且$\tan\theta=\frac{-33}{56}$，則$\theta$為哪一象限角?
(A)第一象限角 (B)第二象限角 (C)第三象限角 (D)第四象限角。

代碼：t12107s1 (107 年統測 B)

( ) 37. 若 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，則 $\tan\theta+\sec\theta=?$

(A) $\dfrac{12}{35}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\dfrac{35}{12}$ 。

代碼：t12107s2
(107 年統測 B)

( ) 38. 若 $\tan\theta=\dfrac{8}{15}$，則 $\sin^2\theta+\cos^2\theta+\sec^2\theta=?$

(A) $\dfrac{514}{225}$ (B) $\dfrac{38}{15}$ (C) $\dfrac{64}{225}$ (D) $\dfrac{49}{625}$ 。

代碼：t13107s1
(107 年統測 B)

( ) 39. $\cos 0°+\cos 10°+\cos 20°+\cos 30°+\cdots+\cos 350°+\cos 360°=?$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 。

代碼：t13107k1
(107 年統測 C)

( ) 40. 設三角形三邊長分別爲 5 、6 、7 ，若三角形面積爲 A ，內切圓半徑爲 r ，則 $A\cdot r=?$ (A) 24 (B) 35 (C) 105 (D) 210 。

代碼：t32107k1
(107 年統測 C)

( ) 41. 假設分針原始指在時鐘 12 的位置，現將分針依順時針的方向轉了 2019°。試問下列敘述何者正確?

(A)分針指在 9 跟 10 之間 (B)分針指在 7 跟 8 之間

(C)分針指在 5 跟 6 之間 (D)分針指在 3 跟 4 之間。

代碼：t11108s1
(108 年統測 B)

( ) 42. 若 $a=\sin\theta$，則下列敘述何者恆爲正確?

(A) $\sin(\theta+90°)=a$ (B) $\cos(\theta+90°)=a$

(C) $\sin(\theta+180°)=-a$ (D) $\cos(\theta+180°)=-a$ 。

代碼：t13108s1
(108 年統測 B)

( ) 43. 當角度 θ 由 15° 上升至 75° 時，關於 $\tan\theta$ 之值的變化，下列敘述何者正確?

(A)一直上升 (B)一直下降 (C)先上升後下降 (D)先下降後上升。

代碼：t15108s1
(108 年統測 B)

( ) 44. 已知扇形面積爲 1 且其周長爲 5 ，試問此扇形的半徑爲何?

(A) $\dfrac{2}{5}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2 。

代碼：t11108k1
(108 年統測 C)

( ) 45. 若點 $P(x,y)$ 爲有向角 θ 終邊上一點且 $xy\neq 0$ ，則下列何者正確?

(A) $x\sin\theta>0$ (B) $y\cos\theta>0$ (C) $x\cot\theta>0$ (D) $y\csc\theta>0$ 。

代碼：t12108k1
(108 年統測 C)

(　　) 46. 若θ爲一個標準位置角，且由計算器得知$\sin\theta$及$\cos\theta$都小於0，則θ在哪個象限？
(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限　。

代碼：t12109s1
(109 年統測 B)

(　　) 47. 若θ爲第二象限角，且$\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$，則$\cos\theta=?$
(A)$\frac{-3}{4}$　(B)$\frac{-\sqrt{5}}{4}$　(C)$\frac{\sqrt{5}}{4}$　(D)$\frac{3}{4}$　。

代碼：t12109s2
(109 年統測 B)

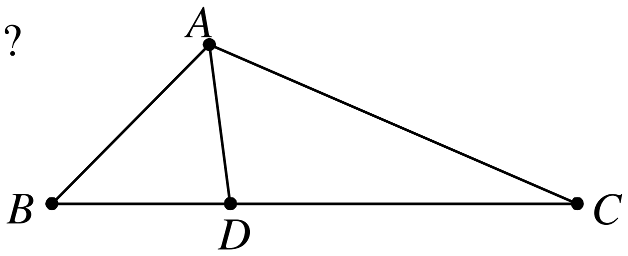
(　　) 48. 若$a=\tan 480^\circ$，$b=\sec 135^\circ$，$c=\cos(-60^\circ)$，則下列有序數對何者在第二象限？　(A)(b,c)　(B)(a,b)　(C)(c,a)　(D)(c,b)　。

代碼：t15109k1
(109 年統測 C)

(　　) 49. 設函數$f(x)=2\cos 3x-1$，$x\in[0,2\pi]$，若其圖形和x軸的交點個數與函數的最大値分別爲a、b，則$ab=?$　(A)6　(B)9　(C)12　(D)18　。

代碼：t15109k2
(109 年統測 C)

(　　) 50. 在ΔABC中，若$\angle A$之內角平分線交$\overline{BC}$於D，其中$\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=6$，且$\angle A=120^\circ$，如圖(二)，則$\overline{CD}=?$
(A)$\sqrt{26}$　(B)$3\sqrt{3}$
(C)$2\sqrt{7}$　(D)$\sqrt{7}$　。



代碼：t31109k1
(109 年統測 C)

(　　) 51. 若下列四個選項中，其中有三個互爲同界角，則下列何者不是另外三個選項的同界角？(A)$-\frac{9}{5}\pi$　(B)-36°　(C)$\frac{\pi}{5}$　(D)1116°　。

代碼：110tcb04
(110 年統測 B)

(　　) 52. 已知$\tan\theta=\frac{7}{25}$。若$\sin\theta\cos\theta=a$，則下列何者正確？
(A)$\frac{1}{2}<a<1$　(B)$0<a<\frac{1}{2}$　(C)$-\frac{1}{2}<a<0$　(D)$-1<a<-\frac{1}{2}$　。

代碼：110tcb14
(110 年統測 B)

(　　) 53. 若$\tan\theta+\sec\theta=5$，則$\tan\theta-\sec\theta=$？
(A)$-\frac{3}{5}$　(B)$-\frac{1}{5}$　(C)$\frac{1}{5}$　(D)$\frac{3}{5}$　。

代碼：110tcc02
(110 年統測 C)

(　　) 54. $\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cos 50^\circ-\sin 25^\circ\cos 25^\circ\cos 20^\circ=$？
(A)$\frac{1}{2}$　(B)$\frac{1}{4}$　(C)$-\frac{1}{4}$　(D)$-\frac{1}{2}$　。

代碼：110tcc03
(110 年統測 C)

(　　) 55. 已知ΔABC中，a、b、c分別爲$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$之對邊長。
若$ab:bc:ca=3:4:6$，則$\sin A:\sin B:\sin C=$？
(A)4：3：2　(B)4：2：3　(C)2：3：4　(D)3：2：4　。

代碼：110tcc14
(110 年統測 C)

(　　) 56. 下列敘述何者正確？　　代碼：110tcc18 (110 年統測 C)

(A) $y=\tan\dfrac{\theta}{3}$ 的週期爲 $\dfrac{\pi}{3}$

(B) $\tan^2\theta-\sec^2\theta=1$

(C) $-\sqrt{2}\le\sin\theta+\cos\theta\le\sqrt{2}$

(D)若 $\cos\theta=\sin\theta$，則 $\theta=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$，其中 n 爲整數　。

(　　) 57. 若 $P(-99,87)$ 是標準位置角 θ 終邊上的點，　　代碼：111tcb09 (111 年統測 B)

則點 $Q(5\sin\theta-6\cos\theta,7\cos\theta+8\tan\theta)$ 落在第幾象限？

(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限(D)第四象限　。

(　　) 58. 在 ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=2$ 、 $\overline{AC}=2\sqrt{3}$ 且其面積爲3，則 $\overline{BC}$ 可能之值爲何？(A) $\sqrt{16-4\sqrt{3}}$　(B) $\sqrt{16-2\sqrt{3}}$　(C) $\sqrt{16+2\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{16+3\sqrt{3}}$　。　　代碼：111tcb13 (111 年統測 B)

(　　) 59. 甲生在某次實驗中描繪出下圖 (一)，是 $y=a\sin(bx)+c$, $0\le x\le 4\pi$ 的曲線圖形，圖中所示 A 、 B 、 C 、 D 四點分別是左端點、最高點、最低點、右端點。若它們的坐標分別爲 $A(0,3)$ 、 $B(\pi,5)$ 、 $C(3\pi,1)$ 、 $D(4\pi,3)$，則 $a+2b+c=$？

(A)4　(B)5　(C)6　(D)7　。　　代碼：111tcb14 (111 年統測 B)

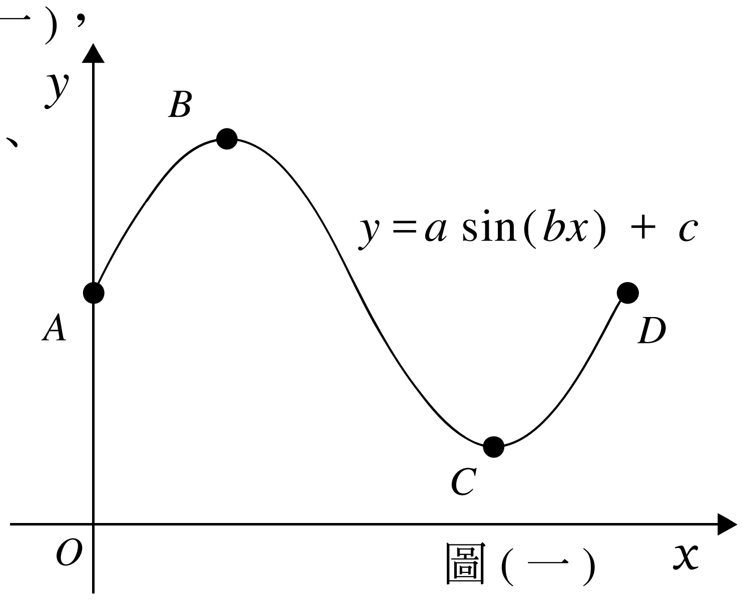


圖 (一)

(　　) 60. 一圓形時鐘上的分針是 8 公分，時針是 5 公分，兩針的一端點固定在圓心上。試問 2 點的時候，時鐘上分針與時針的端點 (如示意圖 (二)中的 $\overline{HM}$)間距離爲下列何者？

(A)5 公分　(B)6 公分　(C)7 公分　(D)8 公分　。　　代碼：111tcb20 (111 年統測 B)

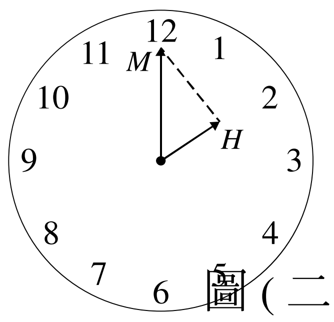


圖 (二)

(　　) 61. 下列何者<u>錯誤</u>？　　代碼：111tcc04 (111 年統測 C)

(A) $y=|\sin2x|$ 之週期爲 $\dfrac{\pi}{2}$　(B) $y=3\sin x$ 之週期爲 2π

(C) $y=\cos2x$ 之週期爲 $\dfrac{\pi}{2}$　(D) $y=4\cos x$ 之週期爲 2π　。

(　　) 62. 已知 ΔABC 中，a 、b 、c 分別爲 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之對邊長。　　代碼：110tcc14 (110 年統測 C)

若 $ab：bc：ca=3：4：6$，則 $\sin A：\sin B：\sin C=$？

(A)4：3：2　(B)4：2：3　(C)2：3：4　(D)3：2：4　。

(　　) 63. 若ΔABC三邊長為4、5、6，則其外接圓直徑為何？
(A)$\dfrac{8}{\sqrt{7}}$　(B)$\dfrac{12}{\sqrt{7}}$　(C)$\dfrac{16}{\sqrt{7}}$　(D)$\dfrac{20}{\sqrt{7}}$　。

代碼：111tcc22
(111 年統測 C)

(　　) 64. 已知ΔABC的面積為$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，其中$\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=2$，且$\angle BAC$為鈍角。若$\overline{BC}$的長度為a，則$a^2=$？
(A)$13-6\sqrt{2}$　(B)$13-2\sqrt{6}$　(C)$13+2\sqrt{6}$　(D)$13+6\sqrt{2}$　。

代碼：111tcc23
(111 年統測 C)

答案：　CDAAD　BBCBD　DCCAC　AACCB　BCDBD　BCBAA　ACACB　BCABA
BCADD　CAAAC　BBBCD　CDACC　CDCD

綜合練習

( ) 1. 設標準位置角 $\theta = 10°$，則下列何者正確？
(A) $100°$ 跟 θ 在同一象限內 (B) $100°$ 是 θ 的一個同界角
(C) θ 為 $\frac{\pi}{18}$ 弧度 (D)圓心角為 θ 且半徑為1的扇形之弧長為10。
代碼：t11105w1

( ) 2. 設直角 ΔABC，$\angle C = 90°$。若 $\tan A = \frac{n}{m}$，其中 $m > 0$，$n > 0$，則下列何者正確？ (A) $\cot A = -\frac{n}{m}$ (B) $\cos A = \frac{n}{m^2+n^2}$
(C) $\sin A = \frac{n}{m^2+n^2}$ (D) $\sec A = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$。
代碼：t12099w2

( ) 3. 設角 θ 終邊上一點 P 為 $(x,-1)$，且 $\cot\theta = 3$，試求 $\cos\theta =$？
(A) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$ (B) $-\frac{1}{10}$ (C) $-\frac{\sqrt{10}}{3}$ (D) $\frac{3}{\sqrt{10}}$。
代碼：t12090k1

( ) 4. 下列何者正確？
(A) $\sin\frac{17\pi}{3} > 0$ (B) $\cos\frac{17\pi}{3} > 0$ (C) $\tan\frac{17\pi}{6} > 0$ (D) $\sec\frac{17\pi}{6} > 0$。
代碼：t12087x1

( ) 5. $\frac{\sin(\pi-\theta)}{\sin\theta} + \frac{\tan(\frac{3\pi}{2}-\theta)}{\cot(-\theta)} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(-\theta)} =$ (A) -1 (B) 1 (C) -3 (D) 3。
代碼：t13202m1

( ) 6. $\tan(-3\pi+\theta)$ 之值為 (A) $-\tan\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $-\cot\theta$ (D) $\cot\theta$。
代碼：t13206m1

( ) 7. 試問下列各函數值，何者與 $\cos 800°$ 的函數值相同？
(A) $\sin 100°$ (B) $\sin(-80°)$ (C) $\cos 100°$ (D) $\cos(-80°)$。
代碼：t13098s1

( ) 8. 若 $\sin 230° = k$，則 $\tan 50° =$？
(A) $-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ (B) $-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$ (C) $-\sqrt{1-k^2}$ (D) $-\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$。
代碼：t13098k1

( ) 9. 試問在坐標平面上原點至點$(\sin 15°, \sin 75°)$的距離為何？ 代碼：t14096k1

(A)$\frac{1}{2}$ (B)$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C)$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D)1。

( ) 10. 已知θ在第四象限，若$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$，試求$\sin\theta-\cos\theta=$？ 代碼：t14097s1

(A)$-\frac{\sqrt{14}}{3}$ (B)$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (C)$\frac{\sqrt{14}}{3}$ (D)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

( ) 11. 設$0<\theta<\pi$，若$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$，則$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=$？ 代碼：t14099s1

(A)$\sqrt{2}$ (B)$2\sqrt{2}$ (C)$3\sqrt{2}$ (D)$4\sqrt{2}$。

( ) 12. 設t是任意實數，若$x=\frac{1-\sin^2 t}{1+\sin^2 t}$、$y=\frac{2\sin t}{1+\sin^2 t}$，則$x^2+y^2$之值等於下列何者？ (A)0 (B)1 (C)2 (D)3。 代碼：t14101w1

( ) 13. 設θ，k為實數，若$\sin\theta$和$\cos\theta$為方程式$3x^2+2x+k=0$之兩根，則$k=$? (A)$-\frac{5}{6}$ (B)$-\frac{5}{12}$ (C)$\frac{5}{6}$ (D)$\frac{5}{12}$。 代碼：t14095k1

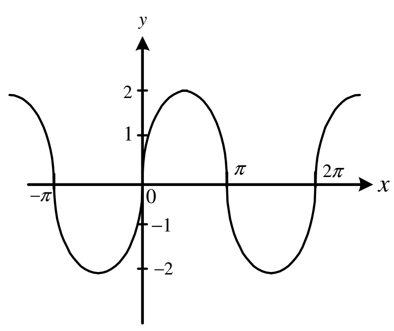
( ) 14. 設$\cot\alpha$和$\cot\beta$為方程式$2x^2-3x-6=0$的兩根，則$\cot^2\alpha+\cot^2\beta=$？ 代碼：t14102w1

(A)$-\frac{33}{4}$ (B)$-\frac{15}{4}$ (C)$\frac{15}{4}$ (D)$\frac{33}{4}$。

( ) 15. 下列哪個方程式所繪製之圖形如右圖所示？ 代碼：t15099p1

(A) $y=2\sin x$ (B) $y=\sin 2x$

(C) $y=2\cos x$ (D) $y=\cos 2x$。



( ) 16. 下列何者為三角函數$y=3\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})$的週期？ 代碼：t15095s1

(A)$\frac{2}{3}\pi$ (B)$\frac{3}{2}\pi$ (C)π (D)2π。

( ) 17. 設$0\le\theta\le\pi$，且$2\sin^2\theta+11\cos\theta-7=0$，則$\theta=$？ 代碼：t15093k1

(A)$\dfrac{\pi}{6}$ (B)$\dfrac{\pi}{3}$ (C)$\dfrac{2\pi}{3}$ (D)$\dfrac{3\pi}{4}$。

( ) 18. 設$0\le x\le 2\pi$，則$f(x)=\sin^2 x+\cos x-1$的最大值爲何？ 代碼：t15096s1

(A)$\dfrac{1}{2}$ (B)$\dfrac{1}{4}$ (C)$-\dfrac{1}{4}$ (D)$-\dfrac{1}{2}$。

( ) 19. 設$0\le x\le 2\pi$，試問函數$f(x)=\sin^2 x-2\cos x+2$之最大值爲何？ 代碼：t15095k1

(A)1 (B)2 (C)4 (D)5。

( ) 20. 下列關係何者正確？ 代碼：t15096k1

(A)$\sec 47^\circ>\tan 47^\circ>\sin 47^\circ$ (B)$\tan 47^\circ>\sec 47^\circ>\sin 47^\circ$

(C)$\sec 47^\circ>\sin 47^\circ>\tan 47^\circ$ (D)$\tan 47^\circ>\sin 47^\circ>\sec 47^\circ$。

( ) 21. 下列選項何者爲眞？ (A)$\sin 35^\circ>\cos 35^\circ$ (B)$\sin 65^\circ>\cos 65^\circ$ 代碼：t15097s1

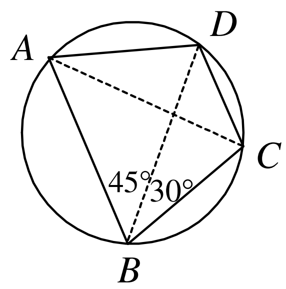
(C)$\sin 35^\circ<\cos 65^\circ$ (D)$\sin 65^\circ<\cos 35^\circ$。

( ) 22. 下列各三角函數值，何者數值最小？ 代碼：t15099k1

(A)$\sin 885^\circ$ (B)$\cos(-430^\circ)$ (C)$\tan 131^\circ$ (D)$\sin(-2010^\circ)$。

( ) 23. 如右圖，$ABCD$爲圓內接四邊形，若$\angle DBC=30^\circ$，$\angle ABD=45^\circ$，$\overline{CD}=6$，則$\overline{AD}=$ 代碼：s13095c1

(A)$6\sqrt{2}$ (B)$3\sqrt{6}$ (C)$3\sqrt{2}$ (D)$6\sqrt{3}$。



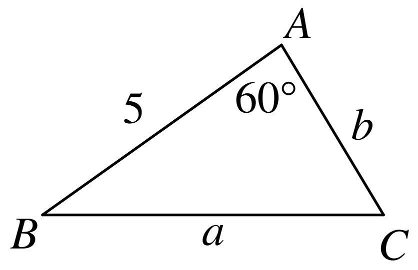
( ) 24. 設點O是ΔABC的外接圓圓心，且在ΔABC的內部，$\overline{AB}$的長度爲m，$\overline{AC}$的長度爲n。若$\angle AOB=120^\circ$，$\angle BOC=150^\circ$，則$\dfrac{m}{n}=$？ 代碼：t31104w1

(A)$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (B)$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (C)$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D)$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$。

( ) 25. 已知ΔABC中，$\overline{AB}=4$、$\overline{AC}=5$、$\overline{BC}=6$，則$\sin A=$？ 代碼：t31093k1

(A)$-\dfrac{\sqrt{63}}{8}$ (B)$-\dfrac{7}{8}$ (C)$\dfrac{7}{8}$ (D)$\dfrac{\sqrt{63}}{8}$。

(　　) 26. 已知ΔABC中，$\angle A = 60^\circ$，$\overline{AB} = 5$，$a + b = 7$，如圖，則$a =$？ (A)$\frac{8}{3}$ (B)3 (C)4 (D)$\frac{13}{3}$。

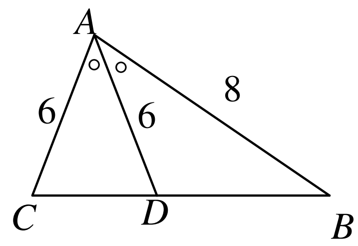


代碼：t31103w1

(　　) 27. 已知圓內接四邊形的各邊長爲$\overline{AB} = 1$，$\overline{BC} = 2$，$\overline{CD} = 3$，$\overline{DA} = 4$，則對角線$\overline{BD}$的長度爲 (A)$\frac{\sqrt{355}}{5}$ (B)$\frac{\sqrt{385}}{5}$ (C)6 (D)7。

代碼：s13086c1

(　　) 28. 如右圖，ΔABC中，$\overline{AC} = 6$，$\overline{AB} = 8$，且$\angle A$之角平分線爲$\overline{AD}$，$\overline{AD} = 6$則$\overline{BC} =$？
(A)1 (B)3 (C)5 (D)7。



代碼：s13208m1

(　　) 29. ΔABC三內角$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$之對應邊長分別爲a, b, c，若$a = 2\sqrt{3}$，$b = 2$，$\angle A = 120^\circ$，則$c =$? (A)$\sqrt{3}$ (B)2 (C)3 (D)$2\sqrt{3}$。

代碼：t31091k2

(　　) 30. 已知ΔABC中，$\angle BCA = 120^\circ$，$\overline{AC} = 3$，$\overline{BC} = 5$，且D在$\overline{AB}$上。若$\overline{CD} \perp \overline{AB}$，則$\overline{CD} =$？ (A)$\frac{5\sqrt{3}}{14}$ (B)$\frac{15\sqrt{3}}{14}$ (C)$\frac{35\sqrt{3}}{2}$ (D)$\frac{105\sqrt{3}}{2}$。

代碼：t32104w1

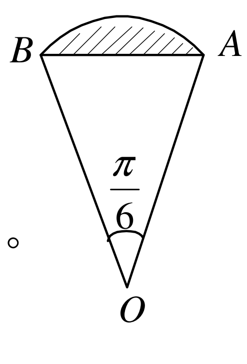
(　　) 31. 在鈍角三角形ΔABC中，設a, b, c分別爲$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的對邊長，若$\angle A = 30^\circ$，且$a : b = 1 : \sqrt{3}$，則$\angle C =$?
(A)30° (B)60° (C)120° (D)150°。

代碼：t31094k3

(　　) 32. 有一繩子的長度是24公分，若圍成正三角形的面積爲a平方公分，圍成正方形的面積爲b平方公分，圍成正六邊形的面積爲c平方公分，則下列何者正確？ (A)$a < b < c$ (B)$a < c < b$ (C)$c < a < b$ (D)$c < b < a$。

代碼：t32095k1

(　　) 33. 設一扇形AOB的半徑爲8，圓心角爲$\frac{\pi}{6}$，則所圍弓形區域(如右圖)，斜線部分)的面積爲
(A)$16\pi - 16$ (B)$\frac{16}{3}\pi - 16$ (C)$32\pi - 32$ (D)$\frac{32}{3}\pi - 32$。



代碼：t32088f1

(　　) 34. 在ΔABC中，若D在$\overline{AC}$上且$\overline{AD} : \overline{DC} = 1 : 2$，$\angle BAD = 30^\circ$，$\angle BDC = 60^\circ$，$\angle DCB$的角度爲何？ (A)30° (B)45° (C)60° (D)75°

代碼：t31099k1

(　　) 35. 在ΔABC中，已知$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$之對應邊長分別爲a、b、c，$\angle B=120°$，$a=6$，則下列選項何者正確？　(A) $0<b-c<3$　(B) $3<b-c<6$　(C) $6<b-c<9$　(D) $9<b-c<12$。 代碼：t31096k1

(　　) 36. 周長爲36且三邊長均爲正整數之所有三角形中，邊長的最大值爲何？(A) 21　(B) 18　(C) 17　(D) 15。 代碼：t31094k2

答案：CDABB　BDBDA　BBADA　CBBCA　BCADD　DBDBB　AABAB　C

筆記欄

單元 3　向量

主題一　向量的意義、加減法與實數積

向量概念引入：

(1) 向量的物理意義：

純量：一般而言我們在日常生活中所用的量，大多是純量。
例如：身高、體重、長度、…等，這些只考慮大小的量，稱為純量。

向量：除了『大小』之外還包含『方向』雙重觀念的物理量。

例如：位移、作用力、速度、加速度…等。

位移：某人從甲地朝西北方前進 30 公里到達乙地。

作用力：某人以大小 $10F$ 的水平作用力向右邊拉動一物體。

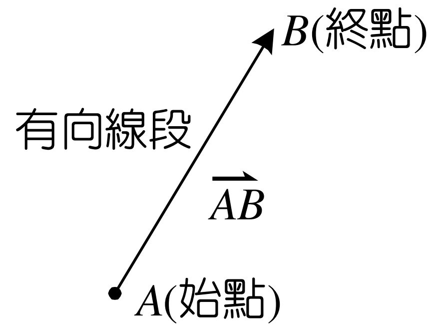
速度：颱風以每小時 15 公里的速度朝西北西方向移動。

(2) 有向線段與向量：

有向線段：

將線段 $\overline{AB}$ 賦予『由 A 指向 B』的方向，

稱為『由 A 到 B 的有向線段』，以 $\overrightarrow{AB}$ 表示。
其中 A 稱為始點，B 稱為終點。



向量：

以 A 為始點，B 為終點的有向線段稱為向量，以符號 $\overrightarrow{AB}$ 表示。

其中向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小就是 $\overline{AB}$ 的長度，記作 $|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}$。

註：通常以小寫英文字母來簡記向量，即 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$…等表示不同之向量，如：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$。

1　老師講解

(1) 正五邊形 $ABCDE$ 的邊可以形成幾個不同的向量？

(2) 正六邊形 $ABCDEF$ 的邊可以形成幾個不同的向量？

1　學生練習

正八邊形的 8 個邊可以形成幾個不同的向量？

【代碼】a71271m1

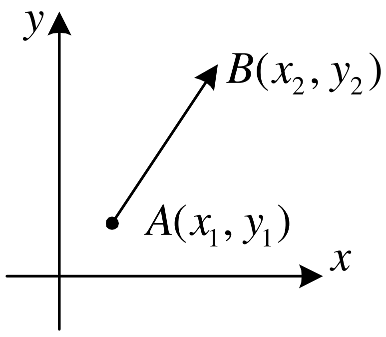
1.向量的坐標表示法：

(1) **定義**：坐標平面上二點 $A(x_1,y_1)$ ， $B(x_2,y_2)$ ，則

① $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$

② $\overrightarrow{AB}$ 長度 $=|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

③ $\overrightarrow{AB}$ 之單位向量 $=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ (單位向量表長度為1之向量)



註：若向量 $\vec{a}$ 與向量 $\vec{b}$ 的大小相等，方向相反，則此兩向量互稱為『逆向量』，記作 $\vec{a}=-\vec{b}$

2 老師講解

已知 $P(-1,7)$ ， $Q(2,3)$ 求下列各式：

(1) $\overrightarrow{PQ}$　　(2) $\overrightarrow{QP}$

(3) $|\overrightarrow{PQ}|$　　(4) $|\overrightarrow{QP}|$

(5) $\overrightarrow{PQ}$ 之單位向量。

2 學生練習

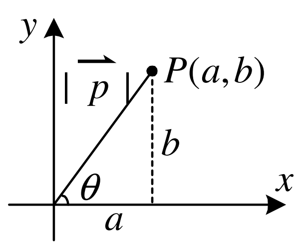
(1) 設 $A(-4,3)$ 、 $B(2,4)$ ，試求 $\overrightarrow{AB}$ 。

(2) 平面上 A 、 B 二點 $A(2,3)$ ， $B(7,15)$ ，求 $\overrightarrow{AB}$ 之單位向量。

【代碼】a71a01m2

2.方向角：

設 P 點坐標為 (a,b) ，則 $\vec{p}=\overrightarrow{OP}=(a,b)$ ，



亦即 $\vec{p}=\overrightarrow{OP}=(a,b)=(|\vec{p}|\cos\theta,|\vec{p}|\sin\theta)$

故任一向量 $\vec{p}$ 可由其長度 $|\vec{p}|$ 與方向角 θ 來表示

3 老師講解

(1) 設 $A(4,3)$、$B(2,5)$，
求 $\overrightarrow{AB}$ 的大小及方向角。

(2) 已知向量 $\overrightarrow{p}=(-2,-2\sqrt{3})$，
試求 $\overrightarrow{p}$ 的大小及方向角。

(3) 已知向量 $\overrightarrow{a}$ 的方向角爲 $\frac{5\pi}{3}$，
且 $|\overrightarrow{a}|=6$，試求向量 $\overrightarrow{a}$。

3 學生練習

(1) 設 $A(1,3)$、$B(2,3+\sqrt{3})$，
求 $\overrightarrow{AB}$ 的大小及方向角。

(2) 已知向量 $\overrightarrow{p}=(-2\sqrt{3},2)$，
試求 $\overrightarrow{p}$ 的大小及方向角？

(3) 已知向量 $\overrightarrow{a}$ 的方向角爲 $\frac{3\pi}{4}$，
且 $|\overrightarrow{a}|=2\sqrt{2}$，試求向量 $\overrightarrow{a}$。

【代碼】a71a02m2

3. 向量相等：

設 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$；若 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b} \Leftrightarrow x_1=x_2$，$y_1=y_2$

4 老師講解

$A(a,4)$，$B(5,b)$，$C(3,-a)$，$D(6,-1)$
爲相異四點，且 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$，則 $a+b$ 之值。

4 學生練習

設 $A(-3,2)$，$B(2,5)$，$C(-1,-2)$ 爲平面上三點，已知 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，求 D 點坐標。

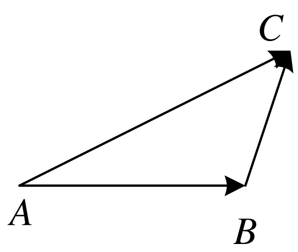
【代碼】a71a03m2

4.運算：

(1) **向量的加法：**

如右圖(一)所示，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

設 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1)$、$\overrightarrow{BC}=(x_2,y_2)$，則 $\overrightarrow{AC}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$。

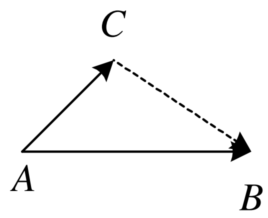


(圖一)

(2) **向量的減法：**

如右圖(二)所示，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

設 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1)$、$\overrightarrow{AC}=(x_2,y_2)$，則 $\overrightarrow{CB}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$。



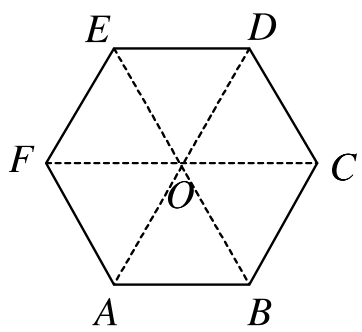
(圖二)

(3) **零向量：** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$

5 老師講解

如下圖，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{b}$，求：

(1) $\overrightarrow{BC}$ (2) $\overrightarrow{AC}$ (3) $\overrightarrow{AE}$

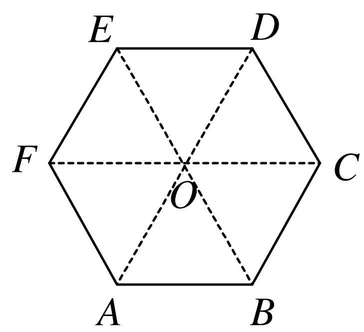


5 學生練習

如下圖，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{b}$，求：

(1) $\overrightarrow{AD}$ (2) $\overrightarrow{FD}$

【代碼】a71a03m3



(4) **實數積：**

設 $\overrightarrow{a}=(x,y)$，$r\in R$，則 $r\overrightarrow{a}=(rx,ry)$

當 $r>0$ $\Rightarrow$ 方向相同，大小 r 倍

當 $r<0$ $\Rightarrow$ 方向相反，大小 $|r|$ 倍

6 老師講解

已知 $P(-1,7)$，$Q(2,3)$，$R(-2,3)$，試求：

(1) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RP}$ (2) $3\overrightarrow{PQ}-2\overrightarrow{RP}$

6 學生練習

若 $A(2,3)$，$B(-4,7)$ 及 $C(x,y)$ 爲平面上三點，且 $2\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{AC}$，求 $C(x,y)$ 爲何？

【代碼】a71a04m3

7 老師講解

平面上三向量 $\overrightarrow{a}=(1,4)$，$\overrightarrow{b}=(1,-7)$，$\overrightarrow{c}=(-1,29)$，若二實數 α、β 滿足 $\overrightarrow{c}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}$，求 $2\alpha+\beta$ 之值。

7 學生練習

已知有三向量 $\overrightarrow{a}=(-1,-2)$，$\overrightarrow{b}=(3,4)$，$\overrightarrow{c}=(-5,-8)$，若二實數 α、β 滿足 $\overrightarrow{c}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}$，求 $\alpha+\beta$ 之值。

【代碼】a71b02m2

8 老師講解

平面上ΔABC，已知$\overrightarrow{AB}=(3,4)$，$\overrightarrow{AC}=(5,12)$，試求$\Delta ABC$之周長。

8 學生練習

平面上有A、B、C三點，已知由A至B的向量$\overrightarrow{AB}=(5,-12)$，由$B$至$C$的向量$\overrightarrow{BC}=(-3,4)$，試求以此$A$、$B$、$C$三點爲頂點之$\Delta ABC$之周長。

【代碼】a71b03m2

9 老師講解

平面上向量$\overrightarrow{a}=(-1,2)$，$\overrightarrow{b}=(-3,-4)$，則$|t\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$之最小值爲？

9 學生練習

已知向量$\overrightarrow{a}=(1,-2)$，$\overrightarrow{b}=(0,5)$，則$|t\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|$之最小值爲？

【代碼】a71b07m2

5.向量平行與垂直：

設$\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$：若：

(1) $\overrightarrow{a}//\overrightarrow{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$　(2) $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

10 老師講解

設 $\overrightarrow{i}=(1,0)$，$\overrightarrow{j}=(0,1)$，

且 $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{B}=5\overrightarrow{i}+m\overrightarrow{j}$，

$\overrightarrow{C}=3\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$，$\overrightarrow{D}=n\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}$，

若 $\overrightarrow{A}//\overrightarrow{B}$ 且 $\overrightarrow{C}\perp\overrightarrow{D}$，則 $m+n=$？

10 學生練習

設 $\overrightarrow{i}=(1,0)$，$\overrightarrow{j}=(0,1)$，且

$\overrightarrow{A}=2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}$、$\overrightarrow{B}=\overrightarrow{i}+a\overrightarrow{j}$，

若 $\overrightarrow{A}\perp\overrightarrow{B}$，則 a 為

【代碼】】a71a05m2

11 老師講解

已知平面上三點 $A(1,3)$，$B(3,k)$，$C(5,1)$，

若向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，則 $k=$？

11 學生練習

設向量 $\overrightarrow{a}=(-3,1)$、$\overrightarrow{b}=(2,3)$，若

$m\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 平行，試求 m 之值。

【代碼】a71b04m2

12 老師講解

若 $A(1,2)$，$B(5,5)$，$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 反向，

且 $|\overrightarrow{a}|=3$，求 $\overrightarrow{a}$ 之值。

12 學生練習

若 $A(3,2)$，$B(-1,5)$，$\overrightarrow{a}=(x,y)$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 反向，

且 $|\overrightarrow{a}|=2$，求 $3x+4y$ 之值。

【代碼】a71b05m2

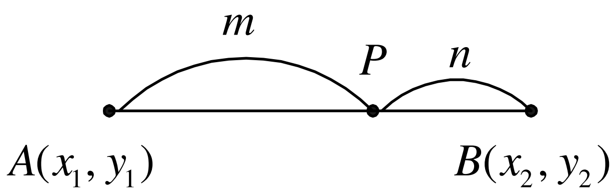
6.分點公式與向量應用：

(1) 分點公式：

已知 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2\ ,y_2)$ 且點 $P(x,y)\in\overline{AB}$，

即 $A-P-B$ (如圖)，若 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，

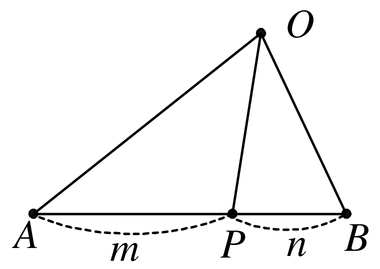
則 $P:\begin{cases}x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}\\ y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\end{cases}$



(2) 向量分點公式：

在 ΔOAB 中，若 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，

則 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$



13 老師講解

在 ΔOAB 中，P 在 $\overline{AB}$ 上，

且 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:4$，若 $\overrightarrow{OP}=r\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$，

求 $r,s=$？

13 學生練習

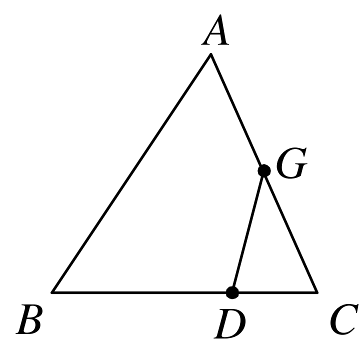
在 ΔABC 中，P 在 $\overline{BC}$ 上，$\overline{BP}:\overline{PC}=2:5$，

若 $\overrightarrow{AP}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，求 $r,s=$？

【代碼】a71a06m2

【加強題】

1. 如圖所示，$\overline{AG}=\overline{GC}$，$\overline{CD}:\overline{DB}=1:2$，若 $\overrightarrow{GD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對 $(x,y)=$ ______ 。



【學生練習答案】

1. 8	2. (1) $(6,1)$ (2) $(\frac{5}{13},\frac{12}{13})$	3. (1) 2 ；$\theta=60°$ (2) 4 ；$\theta=150°$ (3) $(-2,2)$	
4. $(4,1)$	5. (1) $2(\vec{a}+\vec{b})$ (2) $2\vec{a}+\vec{b}$		6. $(14,-5)$
7. 1	8. $18+2\sqrt{17}$	9. $\sqrt{5}$	10. 2
11. -1	12. 0	13. $r=\frac{5}{7}$ $s=\frac{2}{7}$	

回家功課

(　　) 1. 已知 $A(2,-3)$，$B(0,1)$，$C(-2,7)$，$D(-1,-2)$，若 $\vec{a}=2\overline{DA}-3\overline{BD}+\overline{AC}$，且 $\vec{a}$ 之坐標為 (p,q)，則 $3p-q$ 之值為
(A) -2　(B) 0　(C) 2　(D) 4　。
代碼：a71207m1

(　　) 2. 若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 為平面上之三個向量且 $\vec{a}=(\cos 30°,\sin 30°)$、$\vec{b}=(\cos 150^{\circ},\sin 150^{\circ})$、$\vec{c}=(\cos 270^{\circ},\sin 270^{\circ})$，試求 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=$？
(A) $(1,0)$　(B) $(0,1)$　(C) $(1,1)$　(D) $(0,0)$　。
代碼：a71095k1

(　　) 3. 已知平面上 $A(1,2)$、$B(2,-1)$、$C(a,b)$ 三點共線，且 $\overline{AB}=-2\overline{AC}$，則 $a+b=$？
(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5　。
代碼：a71102p1

(　　) 4. 平面上有 $A(1,3)$，$B(8,-6)$，$C(-2,4)$ 三點，且 O 為原點，若 $\overline{OB}=\ell\overline{OA}+m\overline{OC}$，則 $\ell\cdot m$ 之值為
(A) -8　(B) 8　(C) -5　(D) -6　。
代碼：a71088z1

(　　) 5. 設向量 $\overrightarrow{a}=(2,-1)$、$\overrightarrow{b}=(m,3)$，若 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 平行，試求 $m=$
(A) -8　(B) 8　(C) -5　(D) -6　。
代碼：a71b04m1

(　　) 6. 已知在 ΔABC 中，向量 $\overline{AB}=(-3,4)$，$\overline{AC}=(4,3)$，求 $\overline{BC}$ 之長為何？
(A) 5　(B) $2\sqrt{10}$　(C) $5\sqrt{2}$　(D) $2\sqrt{5}$　。
代碼：a71224m1

(　　) 7. 已知 $A(1,-1)$ 與 $B(-2,3)$ 為平面上的兩點，設長度為 3 的向量 $\vec{v}=(a,b)$ 與向量 $\overline{AB}$ 同方向，則 $2a+b=$？
(A) -3　(B) $-\dfrac{6}{5}$　(C) $\dfrac{6}{5}$　(D) 3　。
代碼：a71093k1

(　　) 8. 若 $\vec{a}=(\sin\theta+\cos\theta,\sin\theta-\cos\theta)$，試求 $|\vec{a}|$ 的值。
(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) $\sqrt{3}$　(D) 2　。
代碼：a71b01m1

答案：ADCDD　CBB

主題二　向量的內積與夾角

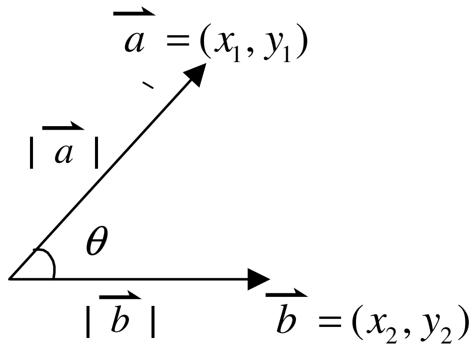
1.定義：

$\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$，其夾角為$\theta$，$0°\le\theta\le180°$，

則$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$之內積以$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$表示。

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=x_1x_2+y_1y_2$　(坐標式)

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$　(幾何式)



1 老師講解

設$\overrightarrow{A}=(-3,1)$、$\overrightarrow{B}=(-2,-3)$、$\overrightarrow{C}=(2,-1)$，

試求：(1) $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}$　(2) $(2\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B})\cdot(\overrightarrow{B}-2\overrightarrow{C})$

1 學生練習

設$\overrightarrow{U}=(5,2)$，$\overrightarrow{V}=(2,-3)$二向量，

試求$(3\overrightarrow{U}+2\overrightarrow{V})\cdot(5\overrightarrow{U}-\overrightarrow{V})$之值。

【代碼】a72a01m2

2 老師講解

設$|\overrightarrow{a}|=5$，$|\overrightarrow{b}|=6$，$\overrightarrow{a}$與$\overrightarrow{b}$的夾角

爲$30°$，試求$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$的值。

2 學生練習

ΔABC中，已知$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，

且$\angle A=120°$，則$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$之值。

【代碼】a72a01m3

3 老師講解

正 ΔABC 邊長為 6，求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

3 學生練習

正 ΔABC 邊長為 8，求：

(1) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ (2) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$

【代碼】a72b01m2

4 老師講解

已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AC}=9$，求下列各內積：

(1) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ (2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$。

4 學生練習

ΔABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=6$，試求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 之值。

【代碼】a72b02m2

2. 應用：

設兩向量 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$，其夾角為 θ，$0°\le\theta\le180°$，

(1) $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}\ \Rightarrow\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0\ \Rightarrow\ x_1x_2+y_1y_2=0$

(2) $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$

(3) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|^2$

證：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{a}|\cos 0°=|\overrightarrow{a}|^2$

(4) $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

證：$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})=|\overrightarrow{a}|^2+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

5 老師講解

設 $\overrightarrow{V}=(-1,1)$，$\overrightarrow{U}=(\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 為平面上二向量，求此二向量之夾角。

5 學生練習

設 $\overrightarrow{a}=(1,1)$、$\overrightarrow{b}=(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$，求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角。

【代碼】a72a02m2

6 老師講解

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 之夾角 $60°$，求：

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|$　(2) $|\vec{a}+2\vec{b}|$

6 學生練習

已知 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角為 θ，且 $\theta=60°$，求 $|2\vec{a}-\vec{b}|$ 之值。

【代碼】a72b03m2

7 老師講解

若 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=5$，$|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{21}$，試求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角。

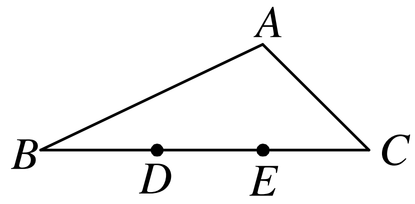
7 學生練習

若 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{37}$，試求 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角。

【代碼】a72b04m2

【加強題】

1. 右圖 ΔABC 中，$\angle BAC=120°$，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=1$，D、E 兩點三等分 $\overline{BC}$，則內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=$ ______。



2. 若 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 為非零向量，$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $2\overrightarrow{a}-5\overrightarrow{b}$ 垂直，且 $|\overrightarrow{a}|=2|\overrightarrow{b}|$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角 $=$ ______。

【學生練習答案】

1. 437	2. -6	3. (1) 32 (2) -32	4. $\frac{11}{2}$
5. $30°$	6. $2\sqrt{7}$	7. $120°$	

回家功課

( ) 1. 在坐標平面上，點 A 、 B 、 C 的坐標分別為 $(-1,k)$ 、 $(1,2)$ 、 $(1,1)$ ，若向量 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 的內積為 0 ，則 $k=$ ？ 代碼：a72096k1

(A) -1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1 。

( ) 2. 設 $\vec{u}$ ， $\vec{v}$ 為平面二個單位向量，若其內積為 $\frac{1}{2}$ ，則 $\vec{u}$ 與 $\vec{v}$ 之夾角為何？ 代碼：a72097k1

(A) 30^o (B) 45^o (C) 60^o (D) 120^o 。

( ) 3. 設平面上有兩向量 $\overline{A}=<6,4>$ ， $\overline{B}=<5,-1>$ ，求向量 $\overline{A}$ 與向量 $\overline{B}$ 的夾角？ 代碼：a72090k1

(A) $30°$ (B) $45°$ (C) $60°$ (D) $120°$ 。

( ) 4. 設 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為平面上的兩個向量，已知 $|\vec{a}|=1$ ， $|\vec{b}|=3$ ，且 $|3\vec{a}-2\vec{b}|=3$ ，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ？ 代碼：a72095k1

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 。

( ) 5. $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\overline{O}$ ， $|\overline{OA}|=1$ ， $|\overline{OB}|=2$ ， $|\overline{OC}|=\sqrt{3}$ ， θ 為向量 $\overline{OA}$ ， $\overline{OB}$ 之夾角，則 $\sin\theta=$ ？ 代碼：a72214m1

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$ 。

答案：DCBDA

主題三　向量的應用

1. 柯西(舒瓦茲)不等式：

設 a_1，a_2，a_3，……a_n；b_1，b_2，b_3，……$b_n \in R$，

則 $(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n)^2$

（“=”成立於 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$ 時)

(1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$

[當 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2$ 時 $a:b=x:y$]

(2) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2$

[當 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ 時 $a:b:c=x:y:z$]

1 老師講解

設 $x, y \in R$，已知 $3x^2+4y^2=16$，
試求 $3x-2y$ 的極大值爲？

1 學生練習

設 $x, y \in R$，已知 $9x^2+4y^2=20$，
試求 $6x-2y$ 的極小值爲？

【代碼】a32a02m2

2 老師講解

設 $x, y \in R$，已知 $2x+3y=14$，
試求 x^2+3y^2 的極小值。

2 學生練習

設 $x, y \in R$，已知 $3x-4y=15$，
試求 x^2+y^2 的極小值爲？

【代碼】a32a02m3

3 老師講解

設 $a>0$、$b>0$，求 $(9a+b)(\frac{1}{a}+\frac{25}{b})$ 的最小值。

3 學生練習

設 $a>0$、$b>0$，求 $(4a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$ 的最小值。

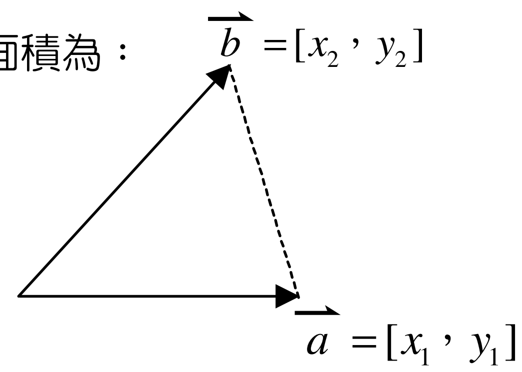
【代碼】a32b03m2

2. 利用向量求三角形面積：

設 $\overrightarrow{a}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{b}=(x_2,y_2)$，則以 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 所成之三角形面積為：

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right|$$ 設

(幾何)　　(坐標)



註：二階行列式的定義

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

例：$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=14-15=-1$

4 老師講解

(1) 設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積為 2，且 $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=3$，試求以 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 為鄰邊所決定的三角形面積。

(2) 設 $\overrightarrow{AB}=(3,4)$，$\overrightarrow{AC}=(7,1)$，則求 ΔABC 面積。

4 學生練習

(1) 設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的內積為 3，且 $|\overrightarrow{a}|=2$，$|\overrightarrow{b}|=3$，試求以 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 為鄰邊所決定的三角形面積。

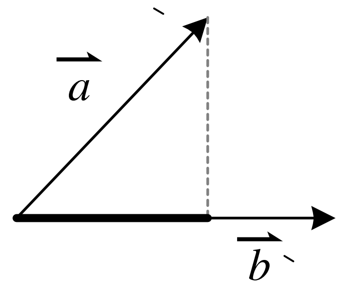
(2) 設 $\overrightarrow{AB}=(-2,5)$，$\overrightarrow{AC}=(3,7)$，則求 ΔABC 面積。

【代碼】a72a03m2

3. 正射影：

① $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影長為 $\left|\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}\right|$

② $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影為 $\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}$



5 老師講解

設 $\overrightarrow{a}=(4,-8)$，$\overrightarrow{b}=(3,4)$，

求 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影長，並求正射影。

5 學生練習

已知 $\overrightarrow{a}=(-2,6)$，$\overrightarrow{b}=(-4,-3)$，

求 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影長及正射影爲？

【代碼】a72a04m2

【加強題】

1. 設 x，y 爲正實數，且 $x+y=16$，則當數對 $(x,y)=$ ______ 時，$\dfrac{9}{x}+\dfrac{25}{y}$ 有最小值爲 ______ 。

【學生練習答案】

1. -10	2. 9	3. 9	4. (1) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (2) $\dfrac{29}{2}$
5. $(\dfrac{8}{5},\dfrac{6}{5})$			

回家功課

( ) 1. 已知 x、y 均為正數，且 $x^2+y^2=20$，則 $3x-y$ 之最大值為 代碼：a32207m1
(A) $2\sqrt{10}$ (B) $\sqrt{70}$ (C) 50 (D) $10\sqrt{2}$ 。

( ) 2. 已知 x、y 皆為自然數，且 $x+3y=20$，則 x^2+3y^2 之最小值為 代碼：a32209m1
(A) 100 (B) 121 (C) 144 (D) 169 。

( ) 3. 設 $xy>0$，則 $(x^2+\dfrac{9}{y^2})(4y^2+\dfrac{1}{x^2})$ 之最小值為 代碼：a32211m1
(A) 49 (B) 36 (C) 7 (D) 6 。

( ) 4. 設 $\overrightarrow{a}=(3,4)$、$\overrightarrow{b}=(2,-14)$，則 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 設上之正投射影爲 代碼：a72219m1
(A) $(4,6)$ (B) $(-6,-8)$ (C) $(-6,-4)$ (D) $(6,8)$ 。

答案：DAAB

歷屆試題

(　　) 1. 設 $A(-13,-19)$，$B(x,y)$ 為平面上相異兩點。若向量 $\overrightarrow{AB}$ 與向量 $\overrightarrow{u}=(5,12)$ 同方向且 $|\overrightarrow{AB}|=26$，則 $3x-4y=$？
(A) -103　(B) -29　(C) 29　(D) 103。
代碼：a71100k1 (100 年統測 C)

(　　) 2. 已知兩向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 互相垂直。若 $|\overrightarrow{a}|=4\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=5\sqrt{5}$，則 $|\overrightarrow{b}|=$？　(A) $\sqrt{5}$　(B) $2\sqrt{5}$　(C) $3\sqrt{5}$　(D) $4\sqrt{5}$。
代碼：a72100k1 (100 年統測 C)

(　　) 3. 若 $\overrightarrow{a}=(3+x,4)$、$\overrightarrow{b}=(4,-3)$、$\overrightarrow{c}=(3,1-2y)$ 且 $\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}-3\overrightarrow{c}=(3,1)$ 則 $3x+2y$ 之值為何？　(A) 5　(B) 2　(C) 1　(D) 0。
代碼：a71101s1 (101 年統測 B)

(　　) 4. 已知向量 $\overrightarrow{u}$ 的長度為 2，向量 $\overrightarrow{v}$ 的長度為 5，且 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 兩向量夾角為 $\frac{2\pi}{3}$，則向量 $3\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 的長度為何？　(A) $\sqrt{11}$　(B) $\sqrt{31}$　(C) $\sqrt{30}$　(D) $\sqrt{21}$。
代碼：a72101s1 (101 年統測 B)

(　　) 5. 設向量 $\overrightarrow{u}=(a,2)$，$\overrightarrow{v}=(3,2a)$，$\overrightarrow{w}=(-1,2)$，則下列敘述何者正確？
(A)若 $2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{w}$ 平行，則 $a=-3$　(B)若 $(2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=0$，則 $a=-\frac{5}{2}$
代碼：a72101k1 (101 年統測 C)

(　　) 6. 已知平面上五個點 $A(\frac{1}{3},\frac{-1}{4})$、$B(\frac{51}{13},\frac{1}{4})$、$C(\frac{571}{13},\frac{69}{7})$、$D(\frac{-51}{16},\frac{69}{17})$、$E(\frac{-23}{4},\frac{-10}{3})$，若向量相加 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=(m,n)$，求 $m-n$ 之值。
(A) -3　(B) -1　(C) 1　(D) 3。
代碼：a71102s1 (102 年統測 B)

(　　) 7. 設向量 $\overrightarrow{a}=(3,4)$，向量 $\overrightarrow{b}//\overrightarrow{a}$，且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-50$，則 $|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|=$？
(A) 20　(B) 40　(C) 60　(D) 80。
代碼：a72102k1 (102 年統測 C)

(　　) 8. 設平面上三點 $A(x,y)$，$B(-1,4)$ 及 $C(9,-1)$，若 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$，則 D 點坐標為何？　(A) $(1,5)$　(B) $(3,2)$　(C) $(5,1)$　(D) $(2,3)$。
代碼：a71103s1 (103 年統測 B)

( ) 9. 設向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角爲 $60°$，且 $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|=1$，則向量 $\overrightarrow{a}$ 和 $(-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})$ 之夾角爲何？ (A)$30°$ (B)$60°$ (C)$90°$ (D)$120°$。

代碼：a72103s1
(103 年統測 B)

( )10. 已知平面三向量 $\overrightarrow{a}=(3,4)$，$\overrightarrow{b}=(x,-9)$，$\overrightarrow{c}=(-8,y)$。設 $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ 且 $\overrightarrow{b}\,//\,\overrightarrow{c}$，則 $y-x$ 之值爲何？ (A)-18 (B)-6 (C)6 (D)18。

代碼：a71103k1
(103 年統測 C)

( )11. 設二向量 $\overrightarrow{u}=(2\cos\theta,\sin\theta)$，$\overrightarrow{v}=(\sin\theta,2\cos\theta)$ 且其內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=1$，若 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$，則 θ 之值可能爲何？ (A)$\dfrac{\pi}{12}$ (B)$\dfrac{\pi}{6}$ (C)$\dfrac{\pi}{4}$ (D)$\dfrac{\pi}{3}$。

代碼：a72103k1
(103 年統測 C)

( )12. 已知二向量 $\overrightarrow{a}=(1,2)$ 與 $\overrightarrow{b}=(2,3)$，若 $3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}=(r,s)$，則 $s-2r=$？ (A)-2 (B)-1 (C)2 (D)3。

代碼：a71104s1
(104 年統測 B)

( )13. 已知 k 爲實數，若向量 $\overrightarrow{a}=(1,k+1)$ 與向量 $\overrightarrow{b}=(2k,3)$ 的內積爲 18，則 $k=$？ (A)-1 (B)1 (C)3 (D)5。

代碼：a72104s1
(104 年統測 B)

( )14. 已知平面上四點坐標爲 $A(57,23)$、$B(7,-2)$、$C(5,12)$、$D(x,y)$。若向量 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{7}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，則 $x+y=$？ (A)-4 (B)-2 (C)2 (D)4。

代碼：a71104k1
(104 年統測 C)

( )15. 已知 $A(0,1)$、$B(-3,5)$、$C(a,b)$ 爲平面上三點。若向量 $\overrightarrow{AC}$ 的長度爲 10，且與向量 $\overrightarrow{AB}$ 反向，則 a，b 之值爲何？ (A)$a=9,b=0$ (B)$a=-3,b=5$ (C)$a=6,b=-7$ (D)$a=-6,b=9$。

代碼：a71105s1
(105 年統測 B)

( )16. 已知 $|\overrightarrow{AB}|=4$、$|\overrightarrow{AC}|=3$，又 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的夾角爲 $\dfrac{\pi}{3}$，則 $|\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}|$ 之值爲何？ (A)$\sqrt{52}$ (B)$\sqrt{76}$ (C)$\sqrt{52+24\sqrt{3}}$ (D)10。

代碼：a72105s1
(105 年統測 B)

( )17. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(-6,8)$ 且與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角爲 $60°$，則向量 $\overrightarrow{a}$ 在向量 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影長爲何？ (A)5 (B)7 (C)$5\sqrt{3}$ (D)10。

代碼：a72105k1
(105 年統測 C)

( )18. 已知坐標平面上三點 $A(1,a)$、$B(2,3)$、$C(5,1)$，若向量內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值爲 1，則 $a=$？ (A)-3 (B)-1 (C)1 (D)2。

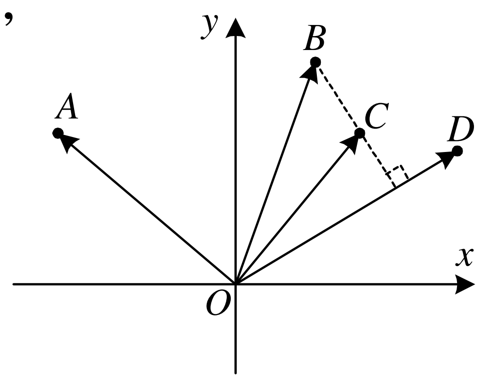
代碼：a72106s1
(106 年統測 B)

( )19. 已知$|\overrightarrow{a}|=1$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-2$。若$t\overrightarrow{a}+(1-t)\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 垂直，其中t為實數，則$t=$？ (A)$\frac{7}{10}$ (B)$\frac{\sqrt{5}}{3}$ (C)$\frac{3}{4}$ (D)$\frac{\sqrt{5}}{2}$。 代碼：a72106k1 (106 年統測 C)

( ) 20. 已知坐標平面上三個點$A(1,2)$、$B(2,5)$、$C(0,-1)$，則向量 $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=$? (A)$(-2,5)$ (B)$(3,0)$ (C)$(1,3)$ (D)$(3,15)$。 代碼：a71107s1 (107 年統測 B)

( ) 21. 如右圖所示，以O為原點的直角坐標系上有四點，由左至右依序為A、B、C、D，其中A落在第2象限，B、C、D落在第1象限，且直線BC與直線OD的交點落在O、D兩點之間。已知$\angle AOD>90°$，且$\overrightarrow{BC}$與$\overrightarrow{OD}$的內積為0。若向量$\overrightarrow{OD}$分別與向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$及$\overrightarrow{OD}$求內積，依次得到a、b、c及d四個數值，則下列何者正確? 代碼：a72108s1 (108 年統測 B)

(A)$b>a>c>d$
(B)$b=c>d>a$
(C)$a>b>c>d$
(D)$d>b=c>a$。



( )22. 設x、y為實數，且$x-2y=10$。試問$f(x,y)=x^2+y^2$之最小值為何? (A)25 (B)20 (C)17 (D)16。 代碼：a32108s1 (108 年統測 B)

( ) 23. 已知$\overrightarrow{u}=(1,1)$，$\overrightarrow{v}=(x+4,y-1)$及$\overrightarrow{w}=(2x,y)$。若$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$垂直且$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{w}$平行， 則下列何者正確? 代碼：a71108k1 (108 年統測 C)
(A)$x=1$ (B)$y=-2$ (C)$y=1$ (D)$x=-2$。

( ) 24. 已知$A(3,1)$、$B(2,-3)$、$C(7,-1)$及$D(x,y)$為坐標平面上的四個點。若$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}$，則$x+y=$? 代碼：a71109s1 (109 年統測 B)
(A)-8 (B)-4 (C)5 (D)6 。

( ) 25. 設平面上三點$A(1,1)$、$B(5,-2)$、$C(5,2)$，且$\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$的正射影為$\overrightarrow{AD}$，若$\overrightarrow{DC}=(x,y)$，則$x+y=$? 代碼：a72109k1 (109 年統測 C)
(A)$\frac{34}{25}$ (B)$\frac{89}{25}$ (C)$\frac{104}{25}$ (D)$\frac{112}{25}$ 。

( ) 26. 已知$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}$為平面上的三向量，且$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=0$，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=0$，$|\overrightarrow{a}|=5$，$|\overrightarrow{b}|=12$，$|\overrightarrow{c}|=13$。若$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}<0$，則$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$？ 代碼：110tcc16 (110 年統測 C)
(A)-30 (B)-60 (C)-65 (D)-156 。

(　　) 27. 下列哪一個向量<u>不是</u>單位向量？

(A) $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$　(B) $(-1,0)$　(C) $(\frac{3}{5},\frac{-4}{5})$　(D) $(\cos 30°,\sin 30°)$　。

代碼：111tcb01
(111 年統測 B)

(　　) 28. 已知平面上兩向量 $\overrightarrow{a}=(2x+1,-3)$、$\overrightarrow{b}=(3,x-2)$，滿足 $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2$，則 $x=$？ (A)3　(B)1　(C)-1　(D)-3　。

代碼：111tcc16
(111 年統測 C)

答案：BCABB　AACCB　ACCAC　BADAC　DBBCD　BAD

綜合練習

( ) 1. 設向量 $\overrightarrow{a}=(\cos 75°+\cos 15°, \sin 75°+\sin 15°)$，則向量的長度 $|\overrightarrow{a}|=$？ (A) $\sqrt{3}$ (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{6}$。 代碼：a71099s1

( ) 2. 設向量 $\overrightarrow{a}=(5t, 3)$，$\overrightarrow{b}=(60, -9)$，若 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$ 與 $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$ 平行，則 t 爲何？ (A) -5 (B) -4 (C) 0 (D) 5。 代碼：a71101p3

( ) 3. 已知平面上三點 $A(1,3)$，$B(3,k)$，$C(5,1)$，若向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 垂直，則 $k=$？ (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7。 代碼：a71091k1

( ) 4. 若向量 $\overrightarrow{a}=(x, y)$ 與向量 $\overrightarrow{b}=(-5,12)$ 的方向相反，且 $|\overrightarrow{a}|=52$，則 $x+y=$？ (A) -68 (B) -28 (C) 28 (D) 68。 代碼：a71103w2

( ) 5. 在坐標平面上的平行四邊形 $ABCD$ (按順序)中，若 $\overrightarrow{AB}=(4,8)$、$\overrightarrow{AD}=(1,4)$，則 $|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|=$ (A) $4\sqrt{5}+\sqrt{17}$ (B) 18 (C) $8\sqrt{5}+2\sqrt{17}$ (D) 36。 代碼：a71099k1

( ) 6. 在坐標平面上的 ΔABC 中，P 爲 $\overline{BC}$ 邊之中點，Q 爲 $\overline{AC}$ 邊上且 $\overline{AQ}=2\overline{QC}$。已知 $\overrightarrow{PA}=(4,3)$，$\overrightarrow{PQ}=(1,5)$，則 $\overrightarrow{BC}=$ (A) $(2,-6)$ (B) $(-1,-6)$ (C) $(-1,12)$ (D) $(-2,6)$。 代碼：r21096c1

( ) 7. 設平面上兩向量 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$ 及 $\overrightarrow{BC}=(1,1)$，則 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$？ (A) -8 (B) -2 (C) 2 (D) 8。 代碼：a72102p1

( ) 8. 設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ 爲平面三向量，且「$\cdot$」表向量的內積，若 $\overrightarrow{a}\cdot(3\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})=9$ 且 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=6$，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}=$？ (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9。 代碼：a72097k2

( ) 9. 設 $\overrightarrow{a}=(2,3)$，$\overrightarrow{b}=(-3,5)$，與 $\overrightarrow{c}=(-1,k)$ 是平面上三個向量，且「$\cdot$」表示二個向量的內積。若 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})=17$，則 $k=$？ (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13。 代碼：a72098s1

( ) 10. 設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 爲兩向量，$\overrightarrow{a}=(x,y)$，x,y 爲實數且 $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{13}$，$\overrightarrow{b}=(3,-2)$，則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之內積最大值爲何？ (A) $\sqrt{13}$ (B) $\sqrt{65}$ (C) 13 (D) 65。 代碼：a72091k1

( ) 11. 設 $\overrightarrow{a}=(4,3)$，$\overrightarrow{b}=(x,y)$ 爲平面上兩向量，且 $x^2+y^2=40$，求此兩向量內積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的最大值？ (A) $10\sqrt{10}$ (B) $12\sqrt{10}$ (C) $14\sqrt{10}$ (D) $16\sqrt{10}$。 代碼：a72098k1

( ) 12. 設 ΔABC 是邊長爲 9 的正三角形，求 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$ 兩向量的內積？ (A) $-\dfrac{81}{2}$ (B) $\dfrac{81}{2}$ (C) 45 (D) 81。 代碼：a72102w1

( ) 13. 已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=7$、$\overline{AC}=8$，則下列各內積中，何者爲最大？ (A) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (B) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$ (C) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ (D) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$。 代碼：a72093k1

( ) 14. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(-1,2)$，$\overrightarrow{b}=(1,x)$，且向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角爲 $\dfrac{\pi}{4}$，則 $x=$？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。 代碼：a72099s1

( ) 15. 設 $|\overrightarrow{a}|=1$，$|\overrightarrow{b}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{c}|=\sqrt{5}$ 且 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$，試求 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 夾角爲何？ (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 120°。 代碼：a72b05m1

( ) 16. 設向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 的夾角爲 θ，且 $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$，$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=4$，$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=3$，則 $\cos\theta=$？ (A) $\dfrac{7}{25}$ (B) $\dfrac{5}{13}$ (C) $\dfrac{3}{5}$ (D) $\dfrac{4}{5}$。 代碼：a72092k1

( ) 17. 設平面上兩向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角爲 θ，若 $\cos\theta=\dfrac{33}{65}$，且 $|\overrightarrow{a}|=5$，$|\overrightarrow{b}|=13$，則 $(4\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=$？ (A) -39 (B) 93 (C) 97 (D) 435。 代碼：a72104w1

( ) 18. 在 ΔABC 中，若 D 爲線段 $\overline{BC}$ 的中點，且 $\overline{AB}=9$、$\overline{AC}=5$，則向量內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=$？ (A) -28 (B) -14 (C) 14 (D) 28。 代碼：a72099k1

( ) 19. 二向量 $\overrightarrow{A}=(3,-4)$ 、 $\overrightarrow{B}=(1,2)$ ，且夾角爲 θ ，則 $\sin\theta$ 之值爲 (A) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (C) $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (D) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

代碼：a72209m1

( ) 20. 設 a 、 b 、 c 爲實數，且 $a^2+b^2+c^2=33$ ，則 $2a-3b+3c$ 之最大值爲 (A) 66 (B) 33 (C) $11\sqrt{3}$ (D) $11\sqrt{6}$ 。

代碼：a32208m1

( ) 21. 設 a 、 b 、 $c>0$ ，則 $(a+2b+3c)(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c})$ 之最小值爲 (A) 30 (B) 36 (C) 41 (D) 42 。

代碼：a32212m1

( ) 22. x ， y 爲實數，若 $x^2+y^2=52$ ，當 (x,y) 爲何時， $3x+2y$ 爲最大？ (A) $(6,4)$ (B) $(4,6)$ (C) $(7,\sqrt{3})$ (D) $(\sqrt{3},7)$ 。

代碼：a32088x1

( ) 23. 設 $A(2,5)$ ， $B(4,3)$ ， $C(5,1)$ 爲坐標平面上之三點，若 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影爲 $\overrightarrow{AD}$ ，則 $|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{AC}|=$ ？ (A) $7:5$ (B) $14:5$ (C) $7:25$ (D) $14:25$ 。

代碼：a72095k2

( ) 24. 設 $A(a,1)$ ， $B(2,b)$ 與 $C(3,4)$ 爲坐標平面上三點，而 O 爲原點，若 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 上的正射影相同，則 $3a-4b=$ ？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

代碼：r22087b1

答案：ABDBB CDDAC AACCB ACABD BADB

單元 4　式的運算

主題一　多項式性質

1. 定義：

基礎數學充電站　多項式基本觀念：代碼 b05k01m1

以下題目的國中基礎運算，溫習一下吧～

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$，

其中 a_n、a_{n-1}、…、a_2、a_1、a_0 為實數，n 為正整數或 0，則稱 $f(x)$ 為不定元 x 的多項式。

(1) 若 $a_n\neq 0$，則稱 $f(x)$ 為 n 次多項式，n 為 $f(x)$ 的次數，以 $\deg f(x)=n$ 表示，

此時 a_n 為 $f(x)$ 的領導係數。

(2) 若 $f(x)=a_0$，則稱 $f(x)$ 為常數多項式

若 $a_0\neq 0$，則稱 $f(x)$ 為零次多項式。　例：$f(x)=3$

若 $a_0=0$，則稱 $f(x)$ 為零多項式。　例：$f(x)=0$

1 老師講解

下列何者爲 x 的多項式？

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x}+5$　(B) $f(x)=\sqrt{x}-3$

(C) $f(x)=\sqrt{2}x+7$　(D) $f(x)=|x|+5$。

1 學生練習

下列何者爲 x 的多項式？

(A) 2^x+3　(B) $\sqrt{7}x+8$

(C) $\dfrac{3}{5x-4}$　(D) $5\sqrt{x}+2$。

【代碼】a11a01m3

2. 係數公式：

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$，$n$ 為正整數或 0

(1)常數項 $=a_0=f(0)$

(2)各項係數和 $=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=f(1)$

(3)偶次項係數和 $=a_0+a_2+a_4+\cdots=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$

(4)奇次項係數和 $=a_1+a_3+a_5+\cdots=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$

2 老師講解

設 $f(x)=(x^3-4x^2+x+3)^2$ 展開式中，求：
(1)常數項 (2)各項係數之和
(3)偶次方項係數和 (4)奇次方項係數和

2 學生練習

設 $f(x)=(x^3+x^2-2x+2)^3$，
求 $f(x)$ 展開式中偶次項係數和為何？
【代碼】a11a02m2

3. 多項式的相等：

對於任意兩個實係數多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\,(a_n\neq 0)$，
$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0\,(b_m\neq 0)$，若 $f(x)=g(x)$，則：
(1) 次數相同、所有對應項的係數也相同 $\Rightarrow n=m$，$a_n=b_m$、$a_{n-1}=b_{m-1}$、…、$a_1=b_1$、$a_0=b_0$
(2) 將 x 以相同值代入，二多項式之值恆相等，如：$x=a$ 代入，則 $f(a)=g(a)$

3 老師講解

若 $3x^2+2x-1=$
$a(x-1)(x-2)+b(x-2)(x-3)+c(x-3)(x-1)$
求 $a+b+c$ 之值。

3 學生練習

設 a,b,c 為實數，
且 $a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$
$=4x+2$，求 $a+b+c$ 之值。
【代碼】a11b01m2

4.多項式的四則運算：

基礎數學充電站　多項式加減乘法：代碼 b05k02m1

以下題目的國中基礎運算，溫習一下吧～

(1) **多項式的加減法**：同次項合併，係數相加、減

(2) **多項式的乘法**：

利用指數律($x^m\cdot x^n=x^{m+n}$)及乘法對加法的分配律[$a(b+c)=ab+ac$]，再同次項合併。

(3) **多項式的除法**：

設 $f(x)$、$g(x)$ 為兩多項式，且 $g(x)\neq 0$，則存在一組多項式 $q(x)$ 和 $r(x)$，

滿足 $f(x)=g(x)\times q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg r(x)<\deg g(x)$

$f(x)$ 稱為被除式、$g(x)$ 為除式、$q(x)$ 為商式、$r(x)$ 為餘式 $\Rightarrow$ 被除式＝除式×商式＋餘式

運算時先將 $f(x)$、$g(x)$ 分別按降冪排列，再利用長除法(分離係數法)運算。

【基本練習】

設 $f(x)=4x^3-2x^2+3x-4$，$g(x)=3x^2+x-2$，試求：(1) $f(x)+g(x)$　(2) $f(x)-g(x)$

4 老師講解

試求 $(x^4+2x^3-x+1)(5x^3+2x-3)$ 乘開後，x^4 項的係數。

4 學生練習

試求 $(x^3+4x^2-3x+1)(5x^2+x-2)$ 乘開後，x^3 項的係數。

【代碼】a11a04m3

5 老師講解

若 x^2-2x+2 除 x^4-4x^2+ax+b 之餘式為 $7x+3$，試求 $a+b$ 之值。

5 學生練習

若 $3x^3-2x^2+ax+b$ 除以 x^2-x+2 之餘式為 $2x-1$，試求 $a+b$ 之值。

【代碼】a11a04m5

5.綜合除法：

當除式為一次時，可用綜合除法快速求得商式與餘式。

6 老師講解

利用綜合除法，
求以 $x+2$ 除 $f(x)=2x^3+7x^2+5x-3$
之商式與餘式。

6 學生練習

利用綜合除法，
求以 $x-2$ 除 $f(x)=x^3-3x^2+x+6$
之商式與餘式。

【代碼】a12a01m2

7 老師講解

利用綜合除法，
求以 $3x-1$ 除 $f(x)=6x^4+x^3-7x^2+14x+2$
之商式與餘式。

7 學生練習

利用綜合除法，
求以 $2x-1$ 除 $f(x)=4x^3+8x^2-11x+6$
之商式與餘式。

【代碼】a12a01m3

8 老師講解

設 $x^3-5x+7=$
$A(x-2)^3+B(x-2)^2+C(x-2)+D$，分別求出 A,B,C,D 之值。

8 學生練習

設 $3x^3-2x^2+x-4=$
$a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$，
求 $2a+b+c+d$ 之值。

【代碼】a12b04m2

9 老師講解

若 $f(x)=x^3+4x^2+4x+1$，
試求 $f(\sqrt{2}-1)$ 之值。

9 學生練習

設 $x=\sqrt{3}-1$，
求 $f(x)=2x^3+2x^2-6x+5$ 之值。

【代碼】a12b02m2

【加強題】

1. $f(x)=x^3+5x^2-10x+5$，則 $f(2.01)=$__________。(四捨五入至小數以下第2位)。

【學生練習答案】

1. (B)	2. 36	3. 0	4. -13
5. 8	6. 商式爲 x^2-x-1，餘式爲4	7. 商式爲 $2x^2+5x-3$ 餘式爲3	8. 17
9. $2\sqrt{3}-1$			

回家功課

( ) 1. 若 $f(x)=(a+2)x^3+(b-3)x^2+(c+4)x+5$ 為一零次多項式，則 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 之值為 (A) $\frac{-7}{6}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{-5}{12}$ (D) $\frac{12}{5}$ 。 代碼：a11088z1

( ) 2. $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，a,b,c,d,e 皆爲整數，且 $3|a|+2|b-2|+|c+5|=1$，若 $\deg f(x)=m$，領導係數爲 n，求 $m+n=$？ (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 。 代碼：f22420m1

( ) 3. 將 $(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(8x-1)$ 展開後，其係數總和為 (A) 52 (B) 42 (C) 32 (D) 22 。 代碼：a11205m1

( ) 4. 設 $x^6+6x^5+6x^4-16x^3-12x^2+24x-8=(ax^2+bx+c)^3$，求 $a+b+c=$？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：a11241m1

( ) 5. 設 $(7x^2+8x+6)^2=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，求 $a-b+c-d+e=$？ (A) 23 (B) 25 (C) 27 (D) 29 。 代碼：a11a03m2

( ) 6. 設 $f(x)+g(x)=5x^3+5x^2+x+1$ 且 $f(x)-g(x)=x^3+3x^2+x+3$，則 $g(x)$ 的 x^2 項之係數為何？ (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 代碼：a11100p2

( ) 7. 求 $(2x^3-x^2+3x+1)(x^2+x-1)$ 展開式中，x^4 項係數為何？ (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2 。 代碼：a11099p1

( ) 8. $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+99x^{98}+100x^{99})\times(9x^8+8x^7+\cdots+3x^2+2x+1)$ 展開後 x^8 項之係數爲 (A) 121 (B) 132 (C) 143 (D) 165 。 代碼：f22405m1

( ) 9. 設 $-2x^3-4x^2-x+3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$，則 $a+b+c+d=$？ (A) -4 (B) -3 (C) 3 (D) 4 。 代碼：a12098w2

( ) 10. 求 $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^4+(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^3+5(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})+1=$？ (A) $2\sqrt{5}$ (B) $2\sqrt{5}+1$ (C) $5\sqrt{5}+3$ (D) $3\sqrt{5}+1$ 。 代碼：a12224m1

答案：CCBAB CCDCA

主題二　餘因式定理

1.餘式定理：

(1) 以 $x-a$ 除多項式 $f(x)$，則餘式為 $f(a)$。

(2) 以 $ax-b$ 除多項式 $f(x)$，則餘式為 $f(\frac{b}{a})$。

註：求餘式的方法　(1)除法運算　(2)餘式定理

1 老師講解

若 $f(x)=x^3+ax^2+bx-6$ 被 $x-2$ 除得餘式爲8，被 $x-1$ 除得餘式爲 -4，求 a 、 b 之值。

1 學生練習

設多項式 $f(x)=x^3+mx^2+nx-6$ 被 $x+1$ 及 $x-2$ 除之餘式分別爲 -6 與18，求 $m+n$ 之值。

【代碼】a13a01m5

2 老師講解

已知 $f(x)=7x^4-47x^3-15x^2+6x+9$，求 $f(7)$ 之值。

2 學生練習

設 $f(x)=100x^3-290x^2-29x+3$，求 $f(3)$ 之值。

【代碼】a12b01m2

2.因式定理：

多項式 $f(x)$ 可以被 $g(x)$ 整除，則 $f(x)$ 稱為 $g(x)$ 的倍式， $g(x)$ 稱為 $f(x)$ 的因式。

(1) 多項式 $f(x)$ 有 $(x-a)$ 之因式，則 $f(a)=0$

(2) 多項式 $f(x)$ 有 $(x-a)(x-b)$ 之因式，則 $f(a)=0$ ， $f(b)=0$

3 老師講解

若 x^2-3x+2 爲 $2x^3-3x^2+ax+b$ 的因式，求 $a-b$ 之值。

3 學生練習

設 ax^3+4x^2-5x+b 能被 x^2+x-2 整除，求 $a-b$ 之值。

【代碼】a13a02m3

4 老師講解

設 $f(x)$ 的次數至少二次， $f(x)$ 以 $x-1$ 除之餘式爲 4 ，以 $x+2$ 除之餘式爲 -2 ，求以 $(x-1)(x+2)$ 除之所得之餘式。

4 學生練習

設 $f(x)$ 爲不低於二次的多項式， $f(x)$ 以 $x-1$ 除之餘式爲 5 ，以 $x-2$ 除之餘式爲 6 ，求以 $(x-1)(x-2)$ 除之所得之餘式。

【代碼】a13b01m2

5 老師講解

設 $f(x)$ 除以 x^2-x-2 的餘式 $ax-1$，
除以 x^2-2x-3 的餘式 $bx+c$，
除以 x^2-5x+6 的餘式 $-2x+7$，
求 a,b,c 之值。

5 學生練習

設 $f(x)$ 除以 $x(x-2)$ 的餘式 $ax+2$，
除以 x^2-x-2 的餘式 bx，
除以 $x(x+1)$ 的餘式 $4x+c$，
求 $a+b+c$ 之值。

【代碼】a13b03m2

6 老師講解

已知 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為 x 之三次多項式，且 $f(1)=f(2)=f(3)=2$，
又 $f(4)=14$，求 $f(5)$ 之值。

6 學生練習

若 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，
且 $f(0)=f(1)=f(-2)=0$，$f(2)=24$，
求 $a-b+c-d$ 之值。

【代碼】a13b04m2

【加強題】

1. 假設多項式 $f(x)$ 除以 x^2+1 的餘式為 $x+1$，則 $[f(x)]^2$ 除以 x^2+1 的餘式為______。

3.整係數一次因式檢驗法：

設整係數多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ 有 $px+q$ 之因式，且 p,q 互質，

則 p 為 a_n 的因式且 q 為 a_0 的因式。(即 $p\,|\,a_n$ 且 $q\,|\,a_0$)

7 老師講解

若 a,b 爲整數，下列何者不可能爲 $f(x)=6x^3+ax^2+bx+8$ 之因式？
(A) $x+1$ (B) $3x-1$ (C) $x+3$ (D) $3x-4$ 。

7 學生練習

若 a,b 爲整數，下列何者不可能爲 $f(x)=4x^3+ax^2+bx+5$ 之因式？
(A) $x+1$ (B) $2x-1$ (C) $x+5$ (D) $3x-5$ 。

【代碼】a14a01m3

8 老師講解

因式分解
$f(x)=x^3+2x^2-9x-18$

8 學生練習

試因式分解下列各式：
(1) $f(x)=x^3+3x^2+3x+2$
(2) $f(x)=2x^3+7x^2-17x-10$

【代碼】a14a01m2

【學生練習答案】

1. 5	2. 6	3. 5	4. $x+4$
5. 5	6. -6	7. (D)	
8. (1) $f(x)=(x+2)(x^2+x+1)$ (2) $f(x)=(x-2)(2x+1)(x+5)$			

回家功課

(　　) 1. 設 $f(x)=mx^3+nx^2-2x+4$，若以 $(x-1)$ 除 $f(x)$ 得餘式為 3，以 $(x+1)$ 除 $f(x)$ 得餘式為 1，以 $(x-2)$ 除 $f(x)$ 得餘式為何？
(A) -8　(B) -4　(C) 8　(D) 16　。 代碼：a13092s1

(　　) 2. 求 $7\cdot 7^4-47\cdot 7^3-15\cdot 7^2+6\cdot 7+9=$
(A) -2　(B) -1　(C) 1　(D) 2　。 代碼：f22440m1

(　　) 3. 已知 $\cos 60°=4\cos^3 20°-3\cos 20°$，則多項式 $4x^3-3x$ 除以 $x-\cos 20°$ 的餘式為何？　(A) 0　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(D) 1　。 代碼：a13096k1

(　　) 4. 設 x^2-5x+6 為多項式 x^3-3x^2+cx+d 的因式，則 $(c,d)=$？
(A) $(-3,8)$　(B) $(-4,12)$　(C) $(-5,10)$　(D) $(-6,8)$　。 代碼：a13098s1

(　　) 5. 設 $f(x)$ 為次數不低於 5 的多項式，以 $(x-1)^2,(x-2)^2$ 除之餘式分別為 $3x-1,13x-17$，則 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x-1)$ 的餘式為多少？
(A) $x+1$　(B) $2x+5$　(C) $7x-5$　(D) $3x+3$　。 代碼：a13206m1

(　　) 6. 設 $f(x)$ 的次數至少二次，$f(x)$ 除以 x^2-2x-3 餘式爲 $2x+3$，除以 x^2-3x+2 的餘式爲 $x+2$，求 $f(x)$ 除以 $(x-2)(x-3)$ 所得之餘式爲
(A) $3x+2$　(B) $3x-1$　(C) $5x+1$　(D) $5x-6$　。 代碼：a13b02m1

(　　) 7. x^{10} 除以 x^2+x-2 之餘式為
(A) $-243x+244$　(B) $-156x+157$　(C) $-341x+342$　(D) $-256x+257$　。 代碼：f22458m1

(　　) 8. 設 $f(x)$ 為 x 之多項式，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 之餘式為 $x+1$，則 $f(x)$ 除以 $x-1$ 之餘式為何？　(A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4　。 代碼：a13099s1

(　　) 9. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$，a、b、c 皆為實數，且 $f(1)=f(-1)=0$，$f(0)=-1$，則 $f(-2)=$？　(A) -3　(B) -1　(C) 1　(D) 3　。 代碼：a13098w1

(　　) 10. 設 $f(x)$ 為 x 的三次多項式，若 $f(1)=f(2)=f(3)=6$ 且 $f(0)=0$，則 $f(x)=$　(A) $x^3-6x^2+10x+1$　(B) x^3-6x^2+11x
(C) x^3-5x^2+3x+5　(D) x^3-3x^2+2x　。 代碼：a13209m1

(　　) 11. 設 $p(x)$ 為一元二次多項式。若 $p(1)=1$，$p(2)=\frac{1}{2}$，$p(3)=\frac{1}{3}$，則 $p(4)$ 之值為何？　(A) $\frac{-2}{3}$　(B) $\frac{-1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{2}{3}$　。 代碼：a13098k1

答案：DDBBC　DCBDB　C

主題三　分式與根式運算

1.求值公式：

(1) 乘法公式：

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

③ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

④ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(2) 求值公式：

① $a^2+b^2=(a\pm b)^2\mp 2ab$　　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

② $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$　　$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

③ $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$　　$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

④ $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$　　$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

⑤ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

2.分式化簡：

(1) 分式的定義：

設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為兩多項式，且 $f(x)\neq 0$ ，則形如 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 之式，稱為 x 的分式或有理式。

其中 $g(x)$ 稱為分子， $f(x)$ 稱為分母。

(2) 分式運算：

設 A 、 B 、 C 、 D 為多項式，且 $B\neq 0$ 、 $D\neq 0$ ，則：

① $\dfrac{A}{B}\pm\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD\pm BC}{BD}$　　② $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$　　③ $\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD}{BC}$ $(C\neq 0)$

1 老師講解

化簡 $\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{-2x-18}{x^2-9}$ 。

1 學生練習

化簡 $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ 。

【代碼】a15a02m2

2 老師講解

化簡 $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+3x-4}\times\dfrac{x^2-x-6}{x^2-7x+12}\div\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12}$

2 學生練習

化簡 $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}\times\dfrac{x+2}{x+1}\div\dfrac{x-1}{x+3}$ 。

【代碼】a15a02m3

3 老師講解

化簡 $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2+1}$ 。

3 學生練習

化簡 $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{1}{x^2+x}$ 。

【代碼】a15b01m2

3.部分分式：

將一真分式拆成若干個真分式的和，稱為部分分式，方法：

(1) 分式化部份分式必先化為真分式

(2) 分解分母

(3) 去分母

(4) 代值法(或比較係數)

4 老師講解

設 $\dfrac{5x-7}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}$ ，

求 A 、 B 之值。

4 學生練習

設 $\dfrac{-x-12}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{B}{x-3}$ ，

求 $A+B$ 之值。

【代碼】a15a03m2

5 老師講解

設 $\dfrac{5x-1}{(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$，

求 A、B、C 之值。

5 學生練習

設 $\dfrac{2x^2+1}{x^3-1}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{bx+c}{x^2+x+1}$，

求 $a+b+c$ 之值。

【代碼】a15a03m3

6 老師講解

$\dfrac{2x^3-7x^2+7x-6}{x^2-4x+3}=(ax+b)+\dfrac{c}{x-1}+\dfrac{d}{x-3}$，

求 $a+b+c+d$ 之值。

6 學生練習

$x\neq -1, 2$，

設 $\dfrac{2x^2-x+3}{x^2-x-2}=2+\dfrac{a}{(x+1)}+\dfrac{b}{(x-2)}$，

則 $a+b$ 之值。

【代碼】a15b02m2

4.根式運算：

(1) 根式：

設 A 為多項式或有理式，n 為正整數，則 $\sqrt[n]{A}$ 稱為根式。

(2) 根式的運算：

根式的加減法： 須先將根式化簡後，再將同類根式作加減計算。

例： $x\sqrt[3]{a}+y\sqrt[3]{a}-z\sqrt[3]{a}=(x+y-z)\sqrt[3]{a}$

根式的乘除法： 必須是同次根式才可以作乘除的計算。

例： $x\sqrt{a}\cdot y\sqrt{b}=xy\sqrt{ab}$

7 老師講解

設 $x=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，試求 x^3+y^3 之值。

7 學生練習

設 $x=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，試求 x^3+y^3 之值。

【代碼】a15a04m3

5.開雙根號：

若a，$b\in N$，則$\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$

(其中：$x+y=a$，$xy=b$，$x>y>0$)

8 老師講解

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$　(2) $\sqrt{7-\sqrt{48}}$

(3) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$　(4) $\sqrt{4-\sqrt{15}}$

8 學生練習

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$　(2) $\sqrt{4+\sqrt{12}}$

(3) $\sqrt{28+5\sqrt{12}}$　(4) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

【代碼】a15a05m2

9 老師講解

化簡$\sqrt{7+2\sqrt{12}}$之整數部分爲a，小數部分爲b，則$a+\dfrac{2}{b}=$？

9 學生練習

設$\sqrt{3+\sqrt{8}}$之整數部分爲a，小數部分爲b，求$a+\dfrac{1}{b}$之值。

【代碼】a15b03m2

【學生練習答案】

1. $\dfrac{2x+8}{x-4}$	2. $\dfrac{x+3}{x-2}$	3. $\dfrac{2}{x^2-1}$	4. -1
5. 2	6. 1	7. 52	
8. (1) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$　(2) $\sqrt{3}+1$　(3) $5+\sqrt{3}$　(4) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$			9. $\sqrt{2}+3$

回家功課

( ) 1. 設$\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2-4}$，其中$a,b,c$為常數，則$a+b+c$之值為 (A)2 (B)3 (C)4 (D)5 。　代碼：a15087k1

( ) 2. 設$x-\dfrac{1}{x}=6$，則$x^2+\dfrac{1}{x^2}=$ (A)8 (B)18 (C)28 (D)38 。　代碼：a15208m1

( ) 3. 設$\dfrac{5x^2+2x-4}{(x-1)(x^2+x-1)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+x-1}$，則$A+B+C=$？ (A)3 (B)4 (C)5 (D)6 。　代碼：a15098k1

( ) 4. 解$\dfrac{x+4}{x-1}+\dfrac{x-1}{x-2}=1$，其解為 (A)$\dfrac{-5\pm5\sqrt{3}}{2}$ (B)$\dfrac{5\pm5\sqrt{3}}{2}$ (C)$\dfrac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$ (D)$\dfrac{3\pm3\sqrt{5}}{2}$ 。　代碼：a21241m1

( ) 5. 比較$a=\sqrt{2}+\sqrt{15}$，$b=3+\sqrt{8}$，$c=\sqrt{7}+\sqrt{10}$的大小： (A)$b>a>c$ (B)$b>c>a$ (C)$c>b>a$ (D)$c>a>b$ 。　代碼：f11a14m1

( ) 6. 比較$a=\sqrt{7}-\sqrt{5}$，$b=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，$c=\sqrt{3}-1$的大小： (A)$b>a>c$ (B)$b>c>a$ (C)$c>b>a$ (D)$c>a>b$ 。　代碼：f11a14m1

( ) 7. 試將$\dfrac{3}{4+\sqrt{10}}$有理化 (A)$\dfrac{4-\sqrt{10}}{6}$ (B)$\dfrac{4-\sqrt{10}}{2}$ (C)$\dfrac{4-\sqrt{10}}{4}$ (D)$\dfrac{4-\sqrt{10}}{3}$ 。　代碼：f11a13m3

( ) 8. 試將$\dfrac{16}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$有理化： (A)$2(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})$ (B)$8(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})$ (C)$4(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})$ (D)$\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}$ 。　代碼：f11a13m3

( ) 9. 試將$\dfrac{4}{\sqrt[3]{3}+1}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$有理化： (A)$2\sqrt[3]{3}$ (B)$\sqrt[3]{9}+1$ (C)$\sqrt[3]{3}$ (D)$2\sqrt[3]{9}+2$ 。　代碼：f11a13m3

( ) 10. 若$0<x<1$，若$\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+2}+\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}=3$，則$x$之值爲 (A)$\dfrac{1}{3}$ (B)$\dfrac{2}{3}$ (C)$\dfrac{1}{2}$ (D)$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 。　代碼：f11b12m1

(　　) 11. $\dfrac{1}{\sqrt{37-20\sqrt{3}}}+\dfrac{1}{\sqrt{37+20\sqrt{3}}}=$ 　代碼：a15227m1

(A) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$　(B) $\dfrac{10}{13}$　(C) $\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{2}$　(D) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　。

(　　) 12. 化簡 $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ 之整數部分為 a，小數部分為 b，則 $b=$ 　代碼：a15251m1

(A) $\sqrt{3}-1$　(B) $\sqrt{3}-2$　(C) $2-\sqrt{3}$　(D) $1-\sqrt{3}$　。

(　　) 13. 化 $\dfrac{x^3-4x^2+7x-1}{(x-1)^4}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{(x-1)^3}+\dfrac{D}{(x-1)^4}$，　代碼：a15k12m1

則 $A+B+C+D$ 之值爲　(A) 3　(B) 4　(C) 5　(D) 6　。

答案：ADDCB　CBADB　BCC

主題四　複數之基本性質

1.數系表：

$$
\text{複數}(C)\begin{cases}\text{實數}(R)\begin{cases}\text{有理數}(Q)\begin{cases}\text{整數}(Z)\begin{cases}\text{自然數}(N)(\text{正整數})\\ 0\\ \text{負整數}\end{cases}\\ \text{有限小數}\\ \text{循環小數}\end{cases}\\ \text{無理數(不循環的無限小數，開方開不盡的根數)}\end{cases}\\ \text{虛數}\end{cases}
$$

(1) **自然數(N)：**

就是正整數，即1、2、3、4、…。

(2) **整數(Z)：**

包含正整數、負整數、0，即…、-3、-2、-1、0、1、2、3、4、…。

(3) **有理數(Q)：**

凡是能表示成分數型式$\frac{q}{p}$(其中p、q為整數，且$p\neq 0$)的數，稱為有理數。

如：整數$3=\frac{3}{1}$、有限小數$0.3=\frac{3}{10}$、循環小數$0.\bar{3}=\frac{1}{3}$。

(4) **無理數：**

不循環的無限小數，如：0.126547…、π(圓周率)、…。

開方開不盡的根數，如：$\sqrt{2}=1.4142135\cdots$、…。

(5) **實數(R)：**

有理數與無理數合稱實數。

2.虛數：

(1) 設$i=\sqrt{-1}$為虛數單位，故$\sqrt{-2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{2}i$、$\sqrt{-9}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=3i$。

(2) **i的性質：**

四次一循環：i、$i^2=-1$、$i^3=-i$、$i^4=1$、$i^5=i$、$i^6=-1$、$i^7=-i$、$i^8=1$、…。

$\Rightarrow$ $i^{4k}=1$，$i^{4k+1}=i$，$i^{4k+2}=-1$，$i^{4k+3}=-i$ (k為整數)

連續四個冪次和為0，如：$1+i+i^2+i^3=0$、$i^{47}+i^{48}+i^{49}+i^{50}=0$

1 老師講解

求出下列各式之值：

(1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$　(2) $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{-5}$　(4) $\sqrt{-3}\sqrt{-5}$

(5) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$　(6) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}$

(7) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-5}}$　(8) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-5}}$

註：(1)若 $a<0$，$b<0 \Rightarrow \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

(2)若 $a<0$，$b>0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

1 學生練習

下列何者有誤？

(A) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{-4}=2\sqrt{3}i$

(B) $\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-6}=\sqrt{30}$

(C) $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-i$

(D) $\dfrac{\sqrt{-5}}{\sqrt{125}}=\dfrac{i}{5}$。

【代碼】a81a02m2

2 老師講解

求出下列各式之值：

(1) $5-4i^9+3i^{18}-2i^{31}+i^{46}$

(2) $i^{35}+i^{36}+i^{37}+i^{38}+\cdots\cdots+i^{99}+i^{100}$

2 學生練習

求出下列各式之值：

(1) $1+2i+3i^2+4i^3+5i^4+6i^5+7i^6+8i^7+9i^8$

(2) $i^3+i^4+i^5+i^6+\cdots\cdots+i^{33}$

【代碼】a81a02m3

3. 複數：

(1) **標準式**：

$z=a+bi(a,b\in R)$

則 a 稱為 z 之實部，b 稱為 z 之虛部。　註：複數包含實數與虛數

(2) **複數相等**：

$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$　　②$a+bi=0 \Leftrightarrow a=b=0$

3 老師講解

$3x+5iy=(x+2)+(3y-4x)i$，且 $x, y\in R$，求 $x\cdot y=$？

3 學生練習

設 $4x+3yi=(x+3)+(2y+1)i$，且 $x, y\in R$，求 $x+y=$？

【代碼】a81a03m3

(3) **複數的四則運算**：

①$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$

②$(a+bi)\times(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

③$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

4 老師講解

試化簡下列各式：

(1) $(4-2i)+(-2+4i)$　(2) $(1-3i)-(2+2i)$

(3) $(1-2i)(3-i)$　(4) $\dfrac{1+2i}{2-i}$

4 學生練習

試化簡下列各式：

(1) 設 $(2+3i)(4-5i)=a+bi$，則 $a+b=$？

(2) $\dfrac{4+3i}{2-5i}=a+bi(a,b\in R)$，則 $a+b=$？

【代碼】a81a03m2

5 老師講解

複數 z 之虛部為 $-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{z}$ 之實部為 $\frac{3}{5}$，求 z。

5 學生練習

設複數 z 之實部為1，而 $\frac{1}{z}$ 之虛部為 $\frac{1}{2}$，則 $z=$______。

【代碼】f23405m1

6 老師講解

求出下列各式之值：

(1) $(1+i)^{20}$　　(2) $(\frac{1+i}{1-i})^{50}-(\frac{1-i}{1+i})^{50}$

6 學生練習

試化簡 $(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{92}+(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^{2004}=$?

【代碼】a81b01m2

(4) **共軛複數：**

設 $Z=a+bi$，則 Z 的共軛複數為 $a-bi$，以符號 $\overline{Z}$ 表示，即 $\overline{Z}=a-bi$。

例：$\begin{cases} z=5+12i \\ \overline{z}=5-12i \end{cases}$ $\begin{cases} z=3-4i \\ \overline{z}=3+4i \end{cases}$ $\begin{cases} z=2i-3 \\ \overline{z}=-2i-3 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\sqrt{3} \\ \overline{z}=\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} z=3i \\ \overline{z}=-3i \end{cases}$

性質： ① $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$　② $\overline{z_1 \cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$　③ $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$

7 老師講解

若 $Z=\dfrac{1-2i}{1+i}$，且 Z 之共軛複數 $\overline{Z}=a+bi$，求 $a+b=$？

7 學生練習

設 z 爲複數 $z+2=3+2i\overline{z}$，則 $z=$_____。

【代碼】f23217m1

【加強題】

1. 設 $z=\dfrac{4-i}{a+i}$，且 $\overline{z}=-z$，則實數 a 值爲_______。

【學生練習答案】

1. (B)	2. (1) $5-4i$　(2) 1	3. 2	4. (1) $23+2i$　(2) $\dfrac{19}{29}$
5. $1-i$	6. -2	7. $-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}i$	

回家功課

( ) 1. 設i為虛數單位，求滿足$-2x+y+3yi=x(1+i)+2+(y+6)i$的實數$x$, y 代碼：a81203m1

(A) $x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{16}{5}$ (B) $x=\frac{2}{5}$，$y=-\frac{16}{5}$

(C) $x=-\frac{2}{5}$，$y=\frac{4}{5}$ (D) $x=-\frac{2}{5}$，$y=\frac{14}{5}$ 。

( ) 2. $a,b\in R$，$\frac{2+3i}{a+bi}+\frac{1}{3-4i}=\frac{1}{3+4i}$，則$8a+12b=$ 代碼：f23a05m1

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 。

( ) 3. 設a，b爲實數且$(a+bi)(2+6i)=-80$，其中$i^2=-1$。則$a+b=$？ 代碼：f23102c1

(A)-8 (B)-4 (C)8 (D)16 。

( ) 4. 設a爲實數，且$\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}$亦爲實數，則$a=$ 代碼：f23423m1

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 。

( ) 5. 設$i=\sqrt{-1}$，若$z=\frac{2+3i^{13}}{2i^{15}-i^{20}}$，則$z$之共軛複數爲 代碼：a81215m1

(A)$\frac{8}{5}+\frac{i}{5}$ (B)$-\frac{8}{5}-\frac{i}{5}$ (C)$-\frac{8}{5}+\frac{i}{5}$ (D)$\frac{8}{5}-\frac{i}{5}$ (E)$\frac{1}{5}-\frac{8}{5}i$ 。

答案：AACDB

主題五　多項方程式

1.二次方程式：

(1) 設 a、b、$c\in R$，且 $a\neq 0$，則 $ax^2+bx+c=0$ 稱為一元二次方程式。其解法有：

①**因式分解：**利用十字交乘法作因式分解，直接求解

②**公式解：**無法利用十字交乘法求解，可利用公式解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

例：$x^2-4x-12=0\Rightarrow(x-6)(x+2)=0\Rightarrow x=6$ 或 -2

$x^2-2x-2=0\Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$

(2) 根的性質：

設 a、b、$c\in R$，且 $a\neq 0$，則 $ax^2+bx+c=0$ 稱為一元二次方程式。

令方程式之判別式 $\Delta=b^2-4ac$

①$\Delta>0\Rightarrow$ 兩相異實根　②$\Delta=0\Rightarrow$ 兩相等實根(重根)　③$\Delta<0\Rightarrow$ 沒有實根(兩共軛虛根)

1 老師講解

設 $x^2-8x+11=0$，且較大根爲 a，則：

(A) $5<a<\dfrac{11}{2}$　(B) $\dfrac{11}{2}<a<6$

(C) $6<a<\dfrac{13}{2}$　(D) $\dfrac{13}{2}<a<7$。

1 學生練習

設 $x^2-2x-1=0$，且其正根爲 a，則：

(A) $1<a<1.5$　(B) $1.5<a<2$

(C) $2<a<2.5$　(D) $2.5<a<3$。

【代碼】a21a01m3

2 老師講解

設 $k\in R$，若 $x^2+(k+1)x+(k+4)=0$ 有實根，求 k 的範圍。

2 學生練習

設 $k\in R$，方程式 $x^2+(k+1)x+(2-k)=0$ 有虛根，求 k 的範圍。

【代碼】a21a01m4

(3) **根與係數之關係：**

若α、β為$ax^2+bx+c=0$之二根($a\neq 0$) $\Rightarrow$ 兩根之和$=\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$、兩根之積$=\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

3 老師講解

設$x^2-4x+2=0$之兩根為α、β，求下列各式之值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\alpha^3+\beta^3$ (3) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$

3 學生練習

設α、β為方程式$x^2-3x+2=0$二根，求下列各式之值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\alpha^3+\beta^3$

(3) $(\alpha+2)(\beta+2)$ (4) $\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2}$

【代碼】a21a02m2

4 老師講解

設$x^2-6x+k=0$的一根是另一根的二倍，求k之值。

4 學生練習

設$x^2-7x+k=0$的二根差3，求k之值。

【代碼】a21a02m3

(4) **反求方程式：**

以α，β為兩根之二次方程式為$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

5 老師講解

設α、β爲$x^2+5x+3=0$之二根，
求以α^2與β^2爲二根之一元二次方程式。

5 學生練習

設α、β爲$x^2-5x+2=0$之二根，
求以α^2與β^2爲二根之一元二次方程式。

【代碼】a21b02m2

2.高次方程式：

(1) 一元三次或三次以上的方程式，通稱為一元高次方程式。

(2) **一元高次方程式的解法**：因式分解法、整係數一次因式檢驗法、…等方式求解。

6 老師講解

求 $x^4-8x^2-5x+6=0$ 之解。

6 學生練習

求方程式 $4x^4+17x^3+8x^2-23x-6=0$ 所有根中最小者之值。

【代碼】a21a04m2

7 老師講解

解方程式 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=24$。

7 學生練習

解方程式 $x(x+2)(x+4)(x+6)-20=0$。

【代碼】a21b03m2

(3) **根與係數之關係：**

若α、β、γ為$ax^3+bx^2+cx+d=0$之三根($a\neq0$)

$\Rightarrow$ 三根之和$=\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$、兩兩相乘$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$、三根之積$=\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$。

8 老師講解

設α,β,γ爲方程式$x^3-2x^2+x+3=0$之三根，則求下列各式之值：

(1)$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$　(2)$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

8 學生練習

設α,β,γ爲方程式$x^3+3x^2+2x+5=0$之三根，則求$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$之值。

【代碼】a21a05m2

9 老師講解

設方程式$9x^3-18x^2-13x+k=0$三根成等差級數，求k之值。

9 學生練習

設$x^3+3x^2+kx+1=0$之三根成等比，則求k之值。

【代碼】a21b04m2

3.方程式的虛根：

虛數根成對定理：

實係數方程式 $ax^2+bx+c=0$ 中，有一根為 $p+qi$，則必有另一根 $p-qi$

若非實係數方程式 $ax^2+bx+c=0$，則虛根共軛性質不存在。

10 老師講解

設 a,b 皆爲實數，若 $3+2i$ 爲方程式 $ax^2-12x+b=0$ 之一根，試求 a,b 之值。

10 學生練習

設 a,b 爲實數，若方程式 $2x^2+ax+b=0$ 有一根爲 $2+3i$，試求 a,b 之值。

【代碼】a81a05m2

11 老師講解

設 $a\in R$，$2+i$ 爲 $x^2+ax+1-2i=0$ 之一根，求 a。

11 學生練習

已知複係數方程式 $ax^2-(4ai+1)x+3(i-2)=0$ 有純虛根且 $a\in R$，求此虛根＝_____。

【代碼】f23421m1

12 老師講解

$a\in R$，若 $3x^2+(a+i)x+3i-6=0$ 有實根，求此實根及 a。

12 學生練習

設 $a\in R$，若 $x^2+(i-3)x+2a+3i=0$ 有實根，求此實根為？

【代碼】a81b03m2

13 老師講解

方程式 $x^2+6x+4=0$ 之兩根為 α、β，則 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 之值為？

13 學生練習

設 α、β 為 $x^2+8x+9=0$ 之兩根，則 $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 之值為？

【代碼】a81b04m2

【加強題】

1. 設 $x^2+(m+2)x+(m+5)=0$，若二根為相異正實根，求實數 m 的範圍？。

2. 標準身材的定義是：$\frac{\text{肚臍高度}}{\text{身高}}=\frac{\text{肚臍與頭頂距離}}{\text{肚臍高度}}$，有一身高150公分，肚臍高度90公分的女孩，欲借穿高跟鞋來提高身高與肚臍高度，滿足標準身材的定義。試問該女孩穿多少公分的高跟鞋較恰當。(取最接近的整數)
(A)1 (B)3 (C)5 (D)7 。($\sqrt{5}\approx 2.23$)

【學生練習答案】

1. (C)	2. $-7<k<1$	3. (1)5 (2)9 (3)12 (4)$\frac{9}{4}$	
4. 10	5. $x^2-21x+4=0$	6. -3	7. $-3+\sqrt{11}$，$-3-\sqrt{11}$
8. 5	9. 3	10. $a=-8$，$b=26$	11. $3i$
12. -3	13. -14		

回家功課

( ) 1. 設二次方程式$4x^2+12x+c=0$的二根差為2，則c等於 代碼：a21212m1
(A)-7 (B)-5 (C)3 (D)5 。

( ) 2. 若a與$a+2$爲異號的兩實數，且均爲方程式$x^2+|x|+3k=0$的解， 代碼：f23082b1
求$k=$ (A)$-\frac{1}{3}$ (B)$-\frac{2}{3}$ (C)$-\frac{1}{2}$ (D)-1 。

( ) 3. 已知a和b為二次方程式$x^2-3x-1=0$的兩個解。試問以$a+b$和$a\times b$為兩個解的二次方程式為何？ 代碼：a21103p2
(A)$x^2-2x-3=0$ (B)$x^2-3x-2=0$
(C)$x^2-5x-3=0$ (D)$x^2-5x-2=0$ 。

( ) 4. 已知方程式$x^3-3x+2=0$有一重根，則該重根為何？ 代碼：a21099p1
(A)-2 (B)-1 (C)1 (D)2 。

( ) 5. 下列何者為方程式$(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=60$的正整數解？ 代碼：a21097h1
(A)1 (B)2 (C)3 (D)0 。

( ) 6. 求$(x^2+3x+4)(x^2+3x+5)=6$之所有實根總和為 代碼：a21231m1
(A)-3 (B)-4 (C)-5 (D)-6 。

( ) 7. 設α,β,γ為方程式$x^3-6x^2+12x-6=0$的三根，則$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=$ 代碼：a21229m1
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 。

( ) 8. 已知實數係數方程式$2x^3+x^2+kx+6=0$有兩根互為倒數，則k值為 代碼：a21233m1
(A)13 (B)-13 (C)23 (D)-23 。

( ) 9. 已知$i=\sqrt{-1}$，a爲複數，若二次方程式$x^2-ax-4+7i=0$有一根爲$2-i$，則另一根爲何？ 代碼：a81092k1
(A)$2-3i$ (B)$-3+2i$ (C)$2+i$ (D)$2+3i$ 。。

( ) 10. 設a,b爲實數且$i=\sqrt{-1}$，若$2+\sqrt{3}i$爲$2x^2+ax+b=0$之一根，則$a+b=$ 代碼：a81095k2
(A)1 (B)3 (C)6 (D)14 。

( ) 11. $x^2-(6-i)x+(a-1)i+5=0$有實根，其中$i=\sqrt{-1}$，且$a<0$， 代碼：a81221m1
則a之值為 (A)-4 (B)-3 (C)-2 (D)-1 。

( ) 12. 設方程式$x^2+8x+4=0$之兩根爲α、β，則$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}=$ 代碼：f23435m1
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 。

答案：DBACC ABBBC AD

歷屆試題

( ) 1. 設 x^3+3x^2+ax+b 除以 x^2+x+1 的餘式爲 0，則 $a+b=$？ (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 。 代碼：a12100s1 (100 年統測 B)

( ) 2. 設方程式 $2x(x-2)+a(x-2)=0$ 的兩根相等，則 $a=$？ (A) -4 (B) -2 (C) 1 (D) 3 。 代碼：a21100s1 (100 年統測 B)

( ) 3. 已知 $f(x)$ 爲一實係數多項式，且 $f(\frac{3}{2})=27$，$f(-\frac{5}{3})=8$。若 $f(x)$ 除以 $6x^2+x-15$ 餘式爲 $ax+b$，則 $a+b=$？ (A) 4 (B) 6 (C) 18 (D) 24。 代碼：a13100k1 (100 年統測 C)

( ) 4. 若 α,β 爲方程式 $x-\frac{3}{x}=-1$ 的兩相異實根，則 $(\frac{2}{\alpha}+1)(\frac{2}{\beta}+1)=$？ (A) -1 (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{5}{3}$ 。 代碼：a21100k1 (100 年統測 C)

( ) 5. 方程式 $x(x^2-5x+6)=4x$ 的解，下列敘述何者正確？ (A)只有二實數解 (B)所有解的乘積爲 2 (C)沒有負實數解 (D)所有解的和爲 9 。 代碼：a21101s1 (101 年統測 B)

( ) 6. 假設 $x^4-4x^3+2x^2+ax+b$ 可以被 x^2-x-2 整除，則下列有關 a 、 b 之敘述何者正確？ (A) $a=15$ (B) $b>0$ (C) $a+b=-7$ (D) $a-2b=9$ 。 代碼：a13101s1 (101 年統測 B)

( ) 7. 若 x^2+x+1 爲 x^3+ax^2+bx+2 的因式，則下列何者正確？ (A) $a>b$ (B) $a^2+b^2=10$ (C) $a-b=-2$ (D) $a+b=6$ 。 代碼：a13101k1 (101 年統測 C)

( ) 8. 設 $x-1$ 和 $x+1$ 爲多項式 $x^5+ax^4+bx^3+5x^2+2x-5$ 的因式，則 $3a+b$ 之値爲何？ (A) -3 (B) 1 (C) 3 (D) 6 。 代碼：a13101k2 (101 年統測 C)

( ) 9. 已知 a 和 c 爲實數，若複數 $a+2i$ 爲一元二次方程式 $x^2+2x+c=0$ 的一根，c 之値爲何？ (A) -4 (B) -2 (C) 3 (D) 5 。 代碼：a81101k1 (101 年統測 C)

( ) 10. 設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 爲 x 之多項式。若 $g(x)$ 除以 $2x-3$ 的餘式爲 1，且 $f(x)=g(x)(2x-3)+5$，則 $(f(x))^2$ 除以 $(2x-3)^2$ 的餘式爲何？ (A) 5 (B) $20x-5$ (C) $10x-15$ (D) 25 。 代碼：a13102s1 (102 年統測 B)

( )11. 若x^2+x-2為多項式$x^3+ax^2+3x+b+1$的因式(其中a、b皆為實數)，則$a-b$之值為何？ (A)17 (B)3 (C)-4 (D)-15。 代碼：a13102s2 (102年統測B)

( )12. 已知$x^4-mx^3-x^2-5x+n=(x^2-3x+2)Q(x)$，若$m$、$n$為實數，$Q(x)$為二次多項式。則$2m+n=$？ (A)$-6$ (B)-2 (C)4 (D)8。 代碼：a13102k1 (102年統測C)

( )13. 已知k為實數，且二次方程式$9x^2+(12k+18)x+(4k^2+12k+5)=0$有二實根。若其中一根大於1，另一根小於0，則$k$之範圍為何？
(A)$\frac{-5}{2}<k<-2$ (B)$-2<k<\frac{-3}{2}$ (C)$\frac{-3}{2}<k<-1$ (D)$-1<k<\frac{-1}{2}$。 代碼：a21102k1 (102年統測C)

( )14. 已知a、b、c為實數。若$x\neq\frac{3}{2}$時，等式$\frac{4x^2-6x-3}{(2x-3)^2}=a+\frac{b}{2x-3}+\frac{c}{(2x-3)^2}$恆成立，則$a+b+2c=$？ (A)$-4$ (B)-2 (C)2 (D)4。 代碼：a15102k1 (102年統測C)

( )15. 已知a、b為實數，$i=\sqrt{-1}$。若$(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i})^8=a+bi$，則$a^2+b^2=$？
(A)16 (B)64 (C)256 (D)1024。 代碼：a83102k1 (102年統測C)

( )16. 若對每一實數x皆滿足$x^4-x^3-2x^2+13x+k=(x^2+2x+a)(x^2-3x+b)$，且$a,b,k$為常數。則$k=$？ (A)$-5$ (B)-3 (C)3 (D)5。 代碼：a11103s1 (103年統測B)

( )17. 已知$(x-3)$為x^3+kx-6之因式，則下列何者為x^3+kx-6之因式分解
(A)$(x-3)(x-2)(x-1)$ (B)$(x-3)(x-2)(x+1)$
(C)$(x-3)(x+2)(x-1)$ (D)$(x-3)(x+2)(x+1)$。 代碼：a14103s1 (103年統測B)

( )18. 若$a\neq 2$，方程式$x^2+ax+2=0$之二根差的平方與方程式$x^2+2x+a=0$之二根差的平方相等，則$a=$？ (A)-6 (B)-4 (C)-2 (D)-1。 代碼：a21103s1 (103年統測B)

( )19. 設實數$2+\sqrt{3}$的整數部份為a，小數部份為b，若p為有理數且b為方程式$ax^2+px-6=0$之一根，則$p=$？ (A)3 (B)$3\sqrt{3}$ (C)6 (D)$6\sqrt{3}$。 代碼：a15103s1 (103年統測B)

( )20. 設α，β為方程式$x^2-5x+3=0$的兩根，則$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$之值為何？
(A)$-\frac{7}{3}$ (B)$\frac{17}{3}$ (C)$\frac{19}{3}$ (D)$\frac{20}{3}$。 代碼：a21103k1 (103年統測C)

(　　)21. 求 $(\sqrt[3]{3}-2)(\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}+4)$ 之值為何？　(A) -5　(B) -3　(C) 8　(D) 1。

代碼：a15103k1 (103 年統測 C)

(　　)22. 設 $z=\dfrac{(5-12i)(3+4i)}{(4-3i)(12-5i)}$，$i=\sqrt{-1}$，則 $|z|$ 之值為何？
(A) 1　(B) $\sqrt{2}$　(C) 2　(D) 13。

代碼：a82103k1 (103 年統測 C)

(　　)23. 若 $f(x)$ 為一個二次多項式，且 $f(0)=2$、$f(2)=0$、$f(3)=-4$，則下列何者為 $f(x)$ 的因式？　(A) $x+1$　(B) $x+2$　(C) $x+3$　(D) $x+4$。

代碼：a13104s1 (104 年統測 B)

(　　)24. 若 $x^2-9x+k=0$ 的兩根為連續的整數，則 $kx^2-9x+1=0$ 的兩根和為何？　(A) $\dfrac{3}{10}$　(B) $\dfrac{7}{20}$　(C) $\dfrac{2}{5}$　(D) $\dfrac{9}{20}$。

代碼：a21104s1 (104 年統測 B)

(　　)25. 給定一分式 $\dfrac{x+1}{x^2-1}+\dfrac{x^2+x-6}{x^2+6x+9}$。若已知該分式化成最簡分式為 $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+2x+e}$，其中 $x\neq-3,-1,1$，則 $a+b+c+d+e=$？
(A) -2　(B) 0　(C) 2　(D) 4。

代碼：a15104s1 (104 年統測 B)

(　　)26. 若 $x>0$ 且 $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{3}$，則 $x+\dfrac{1}{x}=$？　(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5。

代碼：a15104s2 (104 年統測 B)

(　　)27. 將 $(x^4-3x^3+2x-5)(x^3-2)(x+3)$ 乘開化簡後，x^3 項的係數為何？
(A) -5　(B) -3　(C) 3　(D) 5。

代碼：a11104k1 (104 年統測 C)

(　　)28. 已知 a,b,c,d 為實數，若 $2x^3+x^2-5x-3=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$，則 $abcd=$？　(A) -20　(B) -10　(C) 10　(D) 20。

代碼：a12104k1 (104 年統測 C)

(　　)29. 已知 $i=\sqrt{-1}$ 且 a,b 為實數，若 $(2+i)(a+bi)=15+5i$，則 $a+b=$？
(A) 4　(B) 6　(C) 8　(D) 10。

代碼：a81104k1 (104 年統測 C)

(　　)30. 已知 $f(x)=x^2+ax+1$，以 $2x+3$ 除之所得餘式為 $\dfrac{1}{4}$，則 $f(x+1)$ 除以 $x-1$ 的餘式為何？　(A) 7　(B) 8　(C) 9　(D) 10。

代碼：a13105s1 (105 年統測 B)

(　　)31. 已知 $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{6}{1-x}=\dfrac{12}{x^2-1}$，則 $\dfrac{x-1}{x+1}$ 之值為何？
(A) $-\dfrac{3}{2}$　(B) 0　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{3}{2}$。

代碼：a21105s1 (105 年統測 B)

( )32. 已知一個長方形的長增加3公分，寬增加4公分之後，可得一個正方形，且正方形的面積爲原長方形面積的兩倍，則原長方形的面積爲多少平方公分？ (A)64 (B)72 (C)128 (D)144。 代碼：a21105s2 (105年統測B)

( )33. 已知a、b爲實數，若$f(x)=x^3+ax^2+bx-6$，$g(x)=x^2-7x+6$，且$f(x)$可被$g(x)$整除，求$2a+3b$之值 (A)23 (B)36 (C)39 (D)45。 代碼：a13105k1 (105年統測C)

( )34. 已知A、B、C爲常數，且對任意x均滿足
$$\frac{3x^2+9x-3}{(x-1)(x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$
，求B之值
(A)-1 (B)0 (C)1 (D)2。 代碼：a15105k1 (105年統測C)

( )35. 試求139^6除以4的餘數爲何？ (A)3 (B)2 (C)1 (D)0。 代碼：a13105k2 (105年統測C)

( )36. 已知多項式$f(x)=2x^2-5x+2$，$g(x)=x^3-x^2+ax+b$。若$f(x)+g(x)$可以被x^2+1整除，則$a+b=$？ (A)-2 (B)0 (C)3 (D)5。 代碼：a12106s1 (106年統測B)

( )37. 已知$x-1$爲多項式$f(x)=x^2+ax+b$的因式。若$f(x)$除以$x+1$的餘式爲6，則$3a+2b=$？ (A)-10 (B)-5 (C)1 (D)5。 代碼：a13106s1 (106年統測B)

( )38. 已知一元二次方程式$x^2+x-5=0$有兩相異實根a、b，若$a<b$，則$b-a=$？ (A)1 (B)$\sqrt{5}$ (C)$2\sqrt{5}$ (D)$\sqrt{21}$。 代碼：a21106s1 (106年統測B)

( ) 39. 求方程式$\frac{-x^2}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-2}$所有解的和爲何？
(A)-3 (B)-2 (C)-1 (D)0。 代碼：a21106k1 (106年統測C)

( ) 40. 若多項式$2x^3-kx^2+3x+5$除以$x+1$的餘式爲1，則k值爲何?
(A)-9 (B)-1 (C)1 (D)9。 代碼：a13107s1 (107年統測B)

( ) 41. 若$f(x)=x^4-x^3+kx^2-2$爲整係數多項式，其中$k>0$且$f(x)$有整係數一次因式$x-h$，則$k+h=$? (A)3 (B)2 (C)1 (D)0。 代碼：a14107k1 (107年統測C)

( ) 42. 已知$z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，且$\bar{z}$爲其共軛複數。若$\frac{1+z}{1+\bar{z}}=a+bi$，其中$a,b$爲實數，則點$(a,b)$在第幾象限? (A)一 (B)二 (C)三 (D)四。 代碼：a81107k1 (107年統測C)

( ) 43. 設 $f(x)$ 為三次多項式，已知 $f(-1)=4$ 且 $f(-2)=f(1)=f(3)=0$。試問 $f(x)$ 除以 $x-2$ 之餘式為何? (A) -6 (B) -2 (C) 3 (D) 5。 代碼：a13108s1 (108 年統測 B)

( ) 44. 若方程式 $3x^2-39x+k=0$ 的兩根為連續整數，則 $k=$? (A) 168 (B) 126 (C) 84 (D) 42。 代碼：a21108s1 (108 年統測 B)

( ) 45. 已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均為多項式，若以 x^2-3x+2 除 $f(x)$ 所得餘式為 $3x-4$，以 $x-1$ 除 $g(x)$ 所得餘式為 5，則以 $x-1$ 除 $f(x)+g(x)$ 所得餘式為何? (A) -4 (B) -3 (C) 3 (D) 4。 代碼：a13108k1 (108 年統測 C)

( ) 46. 已知 $\dfrac{x^2+5x+6}{(x-2)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$，其中 A、B 與 C 為實數，則 $A+2B+3C=$? (A) -5 (B) 0 (C) 8 (D) 10。 代碼：a15108k1 (108 年統測 C)

( ) 47. 已知 $(x+1)^3$ 除 $f(x)$ 的餘式為 x^2-2x+3。若 $(x+1)^2$ 除 $f(x)$ 的餘式為 $ax+b$，則 $a+b=$? (A) -2 (B) -1 (C) 3 (D) 4 。 代碼：a13109s1 (109 年統測 B)

( ) 48. 已知 α、β 及 -3 為方程式 $x^3-x^2-11x+3=0$ 的三個相異解。求 $|\alpha-\beta|=$? (A) $2\sqrt{3}$ (B) 4 (C) 6 (D) $4\sqrt{5}$ 。 代碼：a21109s1 (109 年統測 B)

( ) 49. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2+x+1)$ 所得之餘式為 $3x^2+5x-2$，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 所得之餘式為何? (A) -4 (B) $2x-5$ (C) 6 (D) $8x-5$ 。 代碼：a13109k1 (109 年統測 C)

( ) 50. 設 α、β 為方程式 $x^2+5x+k=0$ 之二根，已知多項式 $f(x)=2x^2+7x+5$ 除以 $x-\alpha$、$x-\beta$ 所得的餘式分別為 -1、2，則 $k=$? (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 。 代碼：a21109k1 (109 年統測 C)

( ) 51. 已知 $f(x)=x^2+bx+c$ 為二次多項式。若 $f(x)$ 被 $(x+1)^2$ 除的餘式被 $x-1$ 整除，且 $f(x)$ 被 $(x-1)^2$ 除的餘式被 $x+1$ 整除，則 $c=$？ (A) -3 (B) -1 (C) 1 (D) 3 。 代碼：110tcb24 (110 年統測 B)

( ) 52. 若 $\dfrac{3x-1}{(x-3)(x-1)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-1}$，其中 A、B 為實數，則下列何者正確？ (A) $A=2$ (B) $B=1$ (C) $A=-2$ (D) $B=-1$ 。 代碼：110tcc01 (110 年統測 C)

(　　) 53. 已知三次多項式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 滿足 $f(1)=f(2)=f(-2)=2$，且 $f(-1)=8$，則下列何者正確？(A) $a=-1$　(B) $b=1$　(C) $c=-4$　(D) $d=4$　。	代碼：110tcc15 (110 年統測 C)
(　　) 54. 已知 $f(x)$ 是一個二次多項式，且 $f(1)=f(-2)=0$，$f(2)=8$，則 $x+3$ 除 $f(x)$ 的餘式為何？(A) -8　(B) -2　(C)4　(D)8　。	代碼：111tcb06 (111 年統測 B)
(　　) 55. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $2x+3$，得商式為 x^3-x，餘式為6。若 $f(x)$ 除以 x^2+3 的商式為 $q(x)$，餘式為 $r(x)$，則 $q(x)-r(x)=$？(A) $2x^2+15x-38$　(B) $2x^2-9x-38$　(C) $2x^2+15x+22$　(D) $2x^2-9x+22$	代碼：111tcb15 (111 年統測 B)
(　　) 56. 若 $\dfrac{x^2+2x+7}{(x-2)(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+3}$，則 $A+B+C=$？(A)1　(B)5　(C)10　(D)15　。	代碼：111tcc05 (111 年統測 C)
(　　) 57. 若四次多項式 $ax^4+bx^3+6x^2+5x+2$ 除以 $(x+1)^2$ 所得的餘式為 $3x+4$，則 $a+b=$？(A) -12　(B) -6　(C) -4　(D) -2　。	代碼：111tcc10 (111 年統測 C)

答案：　CADBC　DDADB　ADABC　ADACC　AAADC　DCCBC　DBADC　DBDCB
ADBBD　AAABC　DDCDA　AB

綜合練習

( ) 1. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=2x^2+3x+3$，$h(x)=-2x^2+cx-b$爲三個多項式，且a,b,c均爲實數，若已知$f(x)-g(x)=h(x)$，則下列何者爲二次多項式？
(A) $f(x)+h(x)$ (B) $g(x)+h(x)$
(C) $f(x)+g(x)+h(x)$ (D) $f(x)+b[g(x)+h(x)]$。
代碼：a11094s1

( ) 2. 將$(x^2+2x-x^{-1}+1)^2$展開時，x項之係數爲何？
(A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2。
代碼：a11091w1

( ) 3. 設 $f(x)=103x^3+ax^2+bx$除以x^2-1的餘式爲$3x+4$。若 $f(x)$除以 $x(x^2-1)$的餘式爲cx^2+dx+e，則$c=$？
(A) 3 (B) 4 (C) 103 (D) 104。
代碼：a13103w1

( ) 4. 設 $x=\sqrt{3}+1$，則$x^3-6x-1=$？ (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。
代碼：a12096s2

( ) 5. 已知 $f(x)$、$q(x)$爲多項式且 $f(x)=(x^3-2x^2-3x)q(x)+x^2-4$，則下列敘述何者爲眞？
(A) $f(x)$除以x^2-2x-3的餘式爲x^2-4
(B) $f(x)$除以$x-3$的餘式爲-4
(C) $f(x)$除以$x+1$的餘式爲-4
(D) $f(x)$除以x的餘式爲-4。
代碼：a13104p1

( ) 6. 設 $x^5-5x^4+ax^2+3$除以x^3-1之餘式爲$R(x)$，若$R(x)$可被$x-1$整除，則a值爲何？ (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -2。
代碼：a13203m1

( ) 7. 設a、b、c、d爲實數，若x^2-1爲 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$之因式，且 $f(x)$除以$x-2$餘6，則$2a+b=$？ (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4。
代碼：a13099k1

( ) 8. $f(x)$，$g(x)$爲二多項式，以x^2+1除 $f(x)$與$g(x)$，所得餘式分別爲$x-1$與$2x+1$，則以x^2+1除 $f(x)\cdot g(x)$所得之餘式爲？
(A) $-x-3$ (B) $x+3$ (C) $2x-3$ (D) $-2x+3$。
代碼：a13213m1

( ) 9. 正整數7^{2009}乘開後的數字，其末二位數字爲何？
(A) 01 (B) 07 (C) 43 (D) 49。
代碼：a13098k2

(　　) 10. 設 $abc \neq 0$ 且 $a+b+c=0$，則 $a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=$？ 代碼：a15218m1

(A) -3　(B) 3　(C) 0　(D) 1。

(　　) 11. 若 α、β 均為實數，且 $\alpha^3=2+\sqrt{5}$，$\beta^3=2-\sqrt{5}$，則 $\alpha+\beta=$？ 代碼：a15098k2

(A) -1　(B) 1　(C) 2　(D) 4。

(　　) 12. 設 $\frac{3x^2+x+2}{x^3-x^2-x+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$，則 $2a+3b+c$ 等於 代碼：a15087g1

(A) 4　(B) 9　(C) 11　(D) 15。

(　　) 13. 化簡 $(2+\sqrt{1-x})^4+(2-\sqrt{1-x})^4$ 得 x 的係數等於 代碼：a15235m1

(A) -52　(B) -26　(C) 26　(D) 52。

(　　) 14. 若 a 為 $x+1=\sqrt{x+3}$ 之解，則下列那個選項正確？ 代碼：a21091w2

(A) $-3<a<-1$　(B) $-1<a<1$　(C) $0<a<2$　(D) $2<a<4$。

(　　) 15. $\sqrt{\frac{1}{5^2}+\frac{1}{4^2}+1}$ 等於下列哪一個選項？ 代碼：f11101c1

(A) 1.01　(B) 1.05　(C) 1.1　(D) 1.15。

(　　) 16. 關於下列不等式，請選出正確的選項。 代碼：f11103c1

(A) $\sqrt{13}>3.5$　(B) $\sqrt{13}<3.6$

(C) $\sqrt{13}-\sqrt{3}>\sqrt{10}$　(D) $\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$

(　　) 17. 設 $i=\sqrt{-1}$，則 $(-i)^8+(-i)^7-(-i)^6+(-i)^5+(-i)^4-(-i)^3-(-i)^2+(-i)+1=$？ 代碼：a81097k2

(A) $2-5i$　(B) $2+5i$　(C) $-5+2i$　(D) $5-2i$。

(　　) 18. 設 $i=\sqrt{-1}$，若級數 $\sum_{n=1}^{50}(i^3)^n=a+bi$，則 $a+2b=$？ 代碼：a81095k1

(A) -1　(B) -3　(C) 1　(D) 3。

(　　) 19. 設 $i=\sqrt{-1}$ 且 a 與 b 為兩實數，若 $(a+bi)(1+3i)=8+4i$，則 $(a+bi)^2=$？ 代碼：a81094k1

(A) $8i$　(B) $-8i$　(C) $8+8i$　(D) $8-8i$。

(　　) 20. 設 $f(x)=x^{100}+x^{50}+1$，試求 $f(-\frac{1+i}{\sqrt{2}})=$ 代碼：a81214m1

(A) $-i$　(B) $2i$　(C) i　(D) $-2i$。

(　　) 21. 設 $z=\dfrac{3+2i}{a-i}$，且 $\overline{z}=z$，求實數 a 值＝ (A)$\dfrac{1}{2}$ (B)$-\dfrac{3}{2}$ (C)1 (D)$\dfrac{2}{3}$。 代碼：f23218m1

(　　) 22. 次方程式 $x^2-2kx+2-k=0$ 有兩正實根，則
(A)$k\le -2$ 或 $k\ge 1$ (B)$1\le k<2$ (C)$k\le -2$ (D)$k>2$。 代碼：a21221m1

(　　) 23. 若一元二次實係數方程式 $x^2+2kx-k+6=0$ 的兩根均爲負數，
則 k 可能爲下列哪一個值？ (A)$\dfrac{1}{2}$ (B)$\dfrac{3}{2}$ (C)$\dfrac{11}{2}$ (D)$\dfrac{13}{2}$。 代碼：a21102w1

(　　) 24. 若 a 爲正數，則方程式 $x^2-(2^a+2^{-a})x+1=0$ 之根的性質爲何？
(A)只有二個正實根、沒有負實根 (B)有一個正實根、有一個負實根
(C)沒有正實根、只有一個負實根 (D)只有一個正實根、沒有負實根。 代碼：a21094w1

(　　) 25. 試問方程式 $(x^2+x+1)^3+1=0$ 有幾個相異實數解？
(A)0 個 (B)1個 (C)2 個 (D)3 個。 代碼：f23095a1

(　　) 26. 已知方程式 $2x^2-30x+k=0$ 的兩根爲連續自然數，則 $k=$？
(A)106 (B)108 (C)110 (D)112。 代碼：a21098s1

(　　) 27. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根和爲 3，則方程式 $ax^2+cx+2b=0$ 的兩根乘積爲何？ (A)-6 (B)-3 (C)3 (D)6。 代碼：a21093w2

(　　) 28. 已知一元二次方程的兩根積爲 -12，兩根之平方和爲 25，且兩根和爲正數，則其方程式爲何？
(A)$x^2-x+12=0$ (B)$x^2-x-12=0$
(C)$x^2+x-12=0$ (D)$x^2+x+12=0$。 代碼：a21091s1

(　　) 29. 若函數 $f(x)=x^2+3x-1$ 的圖形和 x 軸交於 $(x_1,0)$、$(x_2,0)$ 兩點，
則 $|x_1-x_2|$ 之值爲何？ (A)3 (B)$\sqrt{11}$ (C)$\sqrt{13}$ (D)$\sqrt{14}$。 代碼：a21101w1

(　　) 30. 設 a、b 是一元二次方程式 $x^2-x-1=0$ 的兩根，若 $a>b$，求數對
$\left(\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{5}},\dfrac{a^4-b^4}{\sqrt{5}}\right)$ 之值？ (A)(3,1) (B)(3,2) (C)(1,2) (D)(1,3)。 代碼：a21101w2

(　　) 31. 有一黃金矩形，將其一端切去一個正方形，剩餘的小矩形與原來的黃金矩形相似，求此黃金矩形的長與寬的比值。
(A)$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ (B)$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (C)$\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ (D)$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$。 代碼：f23442m1

(　　) 32. 關於方程式$2x^3-x^2-5x-2=0$的根，下列敘述何者正確？ 代碼：a21101p1
(A)三根中有兩根相等　(B)三根的和為-1
(C)三根的乘積為1　(D)三根中最小的根為-2。

(　　) 33. 設a、b為常數，若方程式$x^3+6x^2+ax+b=0$的三根相等，則下列何者正確?　(A)$2a=-3b$　(B)$3a=-2b$　(C)$2a=3b$　(D)$3a=2b$。 代碼：a21091s2

(　　) 34. 已知方程式$x^3+kx^2+25x-26=0$有一根為2，設其另二根為α、β，則$\alpha^3+\beta^3$等於　(A)-8　(B)-10　(C)-16　(D)-18。 代碼：a21236m1

(　　) 35. 下列哪一個方程式有正的實數解？ 代碼：a21104w1
(A)$x^2+7x+9=0$　(B)$\dfrac{1}{2^x}=x$　(C)$\log(x+1)=-1$　(D)$\sin(3x)=\sqrt{2}$。

(　　) 36 令$i=\sqrt{-1}$，若$1+i$為方程式$2x^2+kx+6+2i=0$的一根，則$k=$？ 代碼：a81099k1
(A)-6　(B)-4　(C)$-5+i$　(D)$-10+2i$。

(　　) 37. 已知$i=\sqrt{-1}$，且a、b均為實數。若$1-\sqrt{3}i$為方程式$x^3+3x^2+ax+b=0$的一根，則$a+b=$？　(A)-4　(B)-2　(C)8　(D)14。 代碼：a81098k1

(　　) 38. 設$f(x)$為實係數三次多項式，若$f(1)=f(1+i)=0$且$f(0)>0$，則下列何者正確？ 代碼：a13099k2
(A)$f(-2)<0$　(B)$f(2)>0$　(C)$f(4)<0$　(D)$f(6)=0$。

答案：ADBCD　ACABA　BCACB　ADBBC　BBCAA　DABCD　BCCDB　ADC

單元 5　直線與圓

主題一　斜率

1.斜角：

直線 L 與 x 軸之正向夾角(逆時針方向)，稱為直線的斜角。設斜角為 θ ，則 $0° \le \theta < 180°$

2.斜率之求法：

(1) L 過二點 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，則斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。($x_2=x_1$ 即斜率不存在)

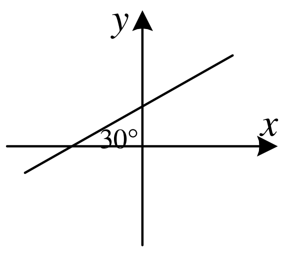
例：直線過二點 $(1,2)$，$(5,5) \Rightarrow m=\dfrac{3}{4}$

(2) $ax+by+c=0$，則斜率 $m=-\dfrac{a}{b}$。($b=0$ 即斜率不存在)

例：直線方程式爲 $5x-2y-1=0 \Rightarrow m=\dfrac{5}{2}$

(3) 直線 L，斜角 θ，則斜率 $m=\tan\theta$。(當 $\theta=90°$ 時，為鉛垂線，斜率不存在)

例：L 之斜角為 $30°$，



$\Rightarrow m=\tan 30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

1 老師講解

求出下列各直線之斜率與斜角：

(1) 一直線過二點 $(-1,2)$，$(3,6)$

(2) 直線 $x-\sqrt{3}y-9=0$

1 學生練習

求出下列各直線之斜角：

(1) 一直線過二點 $(2,-3)$，$(-4,3)$

(2) 直線 $L: \sqrt{3}x-y+5=0$

【代碼】g12a05m2

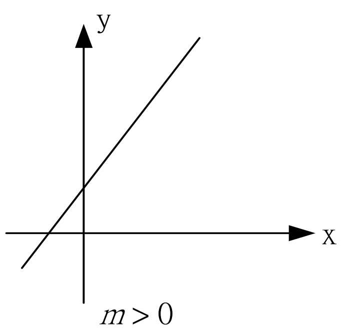
2 老師講解

設 $L:3x+4y+1=0$ 之斜角為 θ，
則 $5\sin\theta+4\sec\theta$ 之值等於？

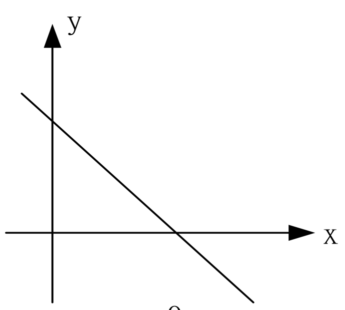
2 學生練習

若 $L:5x+12y+4=0$ 之斜角為 θ，
求 $\cot\theta+\csc\theta$ 之值 【代碼】g12a05m3

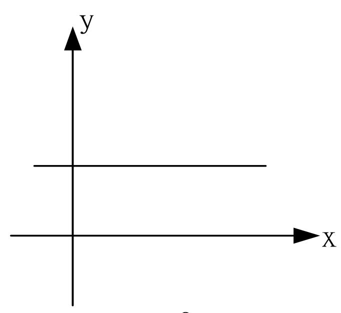
3.性質：



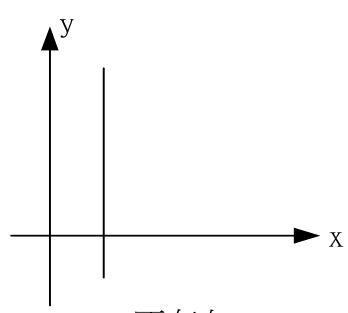
$m>0$



$m<0$



$m=0$

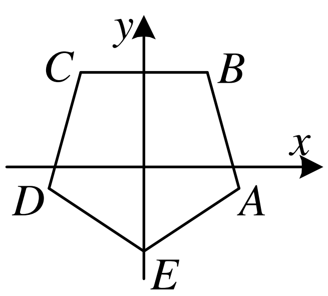


m 不存在

3 老師講解

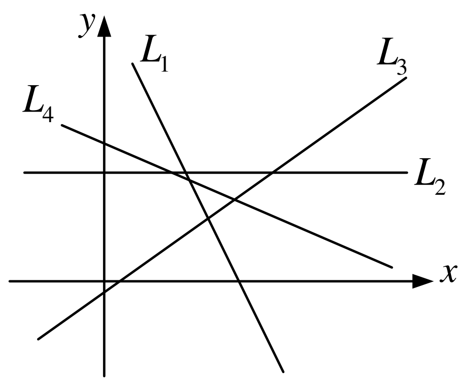
設 $ABCDE$ 是坐標平面上一個正五邊形，它的中心與原點重合，且頂點 E 在 y 軸的負向上(如右圖示)。試問下列各直線中，斜率最小者為何？

(A)直線 AB (B)直線 BC
(C)直線 CD (D)直線 DE
(E)直線 EA 。



3 學生練習

平面上有四條直線 L_1、L_2、L_3、L_4，其斜率分別是 m_1、m_2、m_3、m_4，見右圖，則其斜率由大到小依序為何？



【代碼】g12a03m3

4 老師講解

已知 $A(4,2)$，$B(0,-6)$，$C(7,-1)$，若直線 L 過定點 $P(9,-7)$，且直線 L 與 ΔABC 相交，求直線 L 的斜率範圍。

4 學生練習

設 $A(1,1)$、$B(3,5)$、$C(5,3)$、$D(0,-7)$、$E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 爲坐標平面上的六個點，若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 各恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值爲___。

【代碼】f21101c1

4.應用：

在坐標平面上，設直線 L_1 與 L_2 的斜率分別為 m_1 與 m_2，則：

(1) $L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$

(2) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

【註】當一直線斜率不存在(平行 y 軸)，另一直線斜率為 0 (平行 x 軸)，則此兩直線亦互相垂直。

5 老師講解

設 $A(x,5)$、$B(3,4)$、$C(6,-2)$，已知 A,B,C 三點共線，則求 x 之值。

5 學生練習

設 $P(4,2)$，$Q(6,a)$，$R(10,-1)$，已知 P,Q,R 三點共線，則求 a 之值。

【代碼】g12a04m2

6 老師講解

設兩直線 $L_1:(m+2)x+(m+3)y=0$，$L_2:6x+(2m-1)y=15$，若 $L_1\perp L_2$，則求 m 之值。

6 學生練習

設 $L_1:2x+(a+1)y+5=0$，$L_2:(a-2)x-3y+2=0$，若 $L_1\perp L_2$，求 a 之值。

【代碼】g12b02m2

【學生練習答案】

1. (1) 135° (2) 60°	2. $\frac{1}{5}$	3. $m_3>m_2>m_4>m_1$	4. -3
5. 1	6. -7		

回家功課

( ) 1. 三角形三頂點為 $A(3,2)$，$B(6,5)$，$C(3,8)$，則 $\overline{BC}$ 邊上中線之斜率 (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) 3 。 代碼：g12202m1

( ) 2. 在 ΔABC 中 $A(3,2)$，$B(5,5)$，$C(-1,y)$，已知 $\angle ABC=90°$，則求 $y=$ (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 。。 代碼：g12a04m3

( ) 3. 設 $L_1:2x+y=1$、$L_2:x-ay=2$、$L_3:2x-y=3$、$L_4:bx+4y=4$ 為四直線，其中 a 與 b 均為實數。若 L_1 與 L_2 平行，且 L_3 與 L_4 平行，則 $ab=?$ (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1 。 代碼：g12094s1

( ) 4. 已知一直線與 $5x-6y+3=0$ 平行之斜率為 a，另一直線與 $x-3y+8=0$ 垂直之斜率為 b，則 ab 之值為 (A) $\frac{3}{2}$ (B) $-\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $-\frac{5}{2}$ 。 代碼：g12212m1

( ) 5. 設 $L_1:(a+2)x+(a+3)y=10$，$L_2:6x+(2a-1)y=5$，若 $L_1 \perp L_2$，求 a 值 (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2 。 代碼：g12213m1

( ) 6. 設直線 L 經過 $P(1,2)$，$Q(3,1)$ 二點，直線 L' 經過 $R(3,a)$，$S(2,0)$ 二點，若 L 與 L' 互相垂直，則 a 之值為 (A) 3 (B) 2 (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$ 。 代碼：g12087s2

( ) 7. 若點 $P(a,2)$ 與點 $Q(3,b)$ 的連線與直線 L：$x+y=3$ 垂直，則 $a+b=$？ (A) -5 (B) -3 (C) 3 (D) 5 。 代碼：g12090s1

答案：DBADB BD

主題二　直線方程式

基礎數學充電站　直線方程式基本觀念：代碼 b10k01m1

以下題目的國中基礎運算，溫習一下吧～

1.直線方程式的求法：

(1) 點斜式：

L 過 $P(x_1, y_1)$ 且斜率 m $\Leftrightarrow$ $L: y - y_1 = m(x - x_1)$

1 老師講解

設 L 過 $A(2,1)$，且斜率為 3，求 L 的方程式。

1 學生練習

設直線過點 $A(4,-2)$，斜率為 $\frac{1}{3}$，則此直線方程式為何？

【代碼】g13a01m2

2 老師講解

設 $A(-2,3)$、$B(1,-2)$，求 $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式。

2 學生練習

設 $A(2,1)$、$B(1,-3)$，求 $\overleftrightarrow{AB}$ 方程式。

【代碼】g13a01m3

3 老師講解

設 $P(3,6)$、$Q(9,2)$，求 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線。

3 學生練習

$A(1,2)$，$B(-1,0)$，$C(2,1)$，
求過 A 且垂直 $\overleftrightarrow{BC}$ 的直線方程式。

【代碼】g13b01m2

4 老師講解

在 ΔABC 中，$A(2,5)$、$B(-2,1)$、$C(4,5)$，
若直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 平分 ΔABC 的面積，
則 $\overleftrightarrow{AD}$ 的直線方程式為何？

4 學生練習

三角形三頂點，$A(3,3)$，$B(-1,-5)$，$C(6,0)$
求 $\overline{AB}$ 之中線所在直線方程式為何？

【代碼】g13b03m2

(2) **斜截式**：L 斜率 m，且 y 軸截距 k $\Leftrightarrow$ $L: y = mx + k$

5 老師講解

已知直線斜率為 3，且 y 軸截距為 2，
則直線方程式為何？

5 學生練習

已知一直線之 $m = \dfrac{5}{2}$，且 y 軸截距為 1，
求此直線方程式為何？

【代碼】g13a02m2

(3) **截距式**： L 之 x 截距 a ， y 截距 $b\ (ab\neq 0)$ $\Leftrightarrow$ $L:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

6 老師講解

直線 L 之 x 截距為 3 ，y 截距為 2 ，求 L 之直線方程式。

6 學生練習

設直線的 x 軸截距為 -6 ， y 軸截距為 3 ，則直線方程式為何？

【代碼】g13a02m3

7 老師講解

直線 L 過點 $(1,2)$，且其 x 軸與 y 軸截距和為 6 ，求 L 之直線方程式。

7 學生練習

若過點 $(6,-1)$ 且截距之乘積為 1 的直線方程式為何？

【代碼】g13217m1

(5) 平行垂直已知直線方程式的求法：

平行： $L // ax+by+c=0 \Leftrightarrow L: ax+by+k=0$

垂直： $L \perp ax+by+c=0 \Leftrightarrow L: bx-ay+k=0$

8 老師講解

求過點 $(-4,3)$，且與 $x+2y=5$ 平行的直線方程式。

8 學生練習

求過 $A(1,-5)$、$B(5,1)$ 之中點，且與 $2x-5y-11=0$ 垂直的直線為何？

【代碼】g13a03m4

9 老師講解

試求點 $A(3,-1)$ 關於直線 $L: 2x-3y+17=0$ 的對稱點 A' 的坐標。

9 學生練習

試求點 $A(7,2)$ 關於直線 $L: 4x-3y+3=0$ 的對稱點 A' 的坐標。

【代碼】g13254m1

2.二元一次方程式的圖形：

(1) **一般式**：

設 a,b,c 為實數且 $a^2+b^2\neq 0$，則二元一次方程式 $ax+by+c=0$ 圖形為一直線，而 $ax+by+c=0$ 稱為直線的一般式。

當 $a\neq 0$，$b\neq 0$時，$ax+by+c=0$

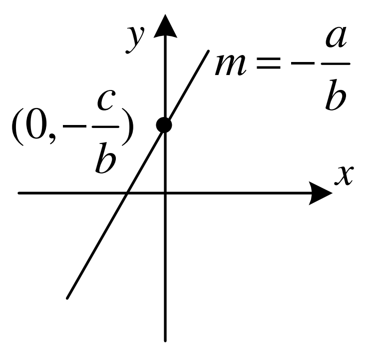
可化為 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$，圖形斜率為 $-\frac{a}{b}$ 且 y 截距為 $-\frac{c}{b}$ 的直線。(如圖一)

當 $a\neq 0$，$b=0$時，$ax+by+c=0$

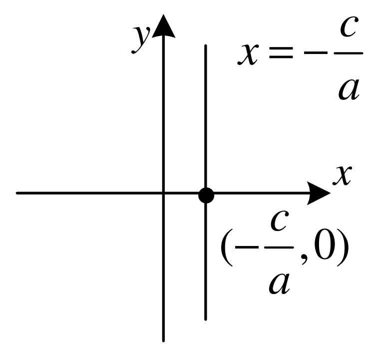
可化為 $x=-\frac{c}{a}$，圖形通過點 $(-\frac{c}{a},0)$ 且與 x 軸垂直的直線，其斜率不存在。(如圖二)

當 $a=0$，$b\neq 0$時，$ax+by+c=0$

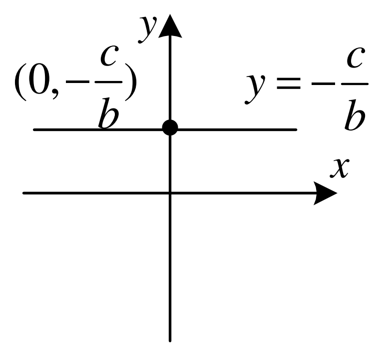
可化為 $y=-\frac{c}{b}$，圖形通過點 $(0,-\frac{c}{b})$ 且與 x 軸平行的直線，其斜率為0。(如圖三)



(圖一)



(圖二)



(圖三)

基礎數學充電站 　**二元一次方程組：代碼 b03k01m1**

以下題目的國中基礎運算，溫習一下吧～

(2) **二元一次方程組的幾何意義**：

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 圖形表二直線

① $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ ⇒二線交一點，僅有一組解 ⇒相容方程組

② $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ ⇒二線平行，無解 ⇒矛盾方程組

③ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ ⇒二線重合，有無限多組解 ⇒相依方程組

【基本練習】

試判斷下列各方程組與二直線之關係：

(1) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x-6y=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x+4y=5 \\ 3x-4y=6 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x+4y=5 \\ x+2y=3 \end{cases}$

10 老師講解

$\begin{cases} L_1: ax+5y+5=0 \\ L_2: x+(a+4)y-1=0 \end{cases}$,

(1) L_1 與 L_2 重合　(2) L_1 與 L_2 平行，求 a 值。

10 學生練習

$\begin{cases} L_1: 2x+(2-k)y+6=0 \\ L_2: (1+k)x-2y-3=0 \end{cases}$,

(1) L_1 與 L_2 重合　(2) L_1 與 L_2 平行，求 k 值。

【代碼】g13a04m3

3.直線系：

通過 $L_1: a_1x+b_1y+c_1=0$，$L_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ 交點的直線方程式可設為：

$(a_1x+b_1y+c_1)+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$

註：若 k 值為無解，則所求直線即為 L_2

11 老師講解

不論 k 爲任何實數，直線
$L:(5+2k)x-(2-k)y+(1-5k)=0$
恆過某一定點，則此定點之坐標。

11 學生練習

$a\in R$，$(1+3a)x+(2-a)y-(1+10a)=0$
恆過一定點，定點坐標爲________。

【代碼】r11207m1

【學生練習答案】

1. $L: x-3y-10=0$	2. $4x-y-7=0$	3. $3x+y-5=0$	4. $x-5y-6=0$
5. $5x-2y+2=0$	6. $x-2y+6=0$	7. $x+9y=-3$，$x+4y=2$	
8. $L: 5x+2y-11=0$	9. $A'(-1,8)$	10. (1) -2　(2) 3	11. $(3,-1)$

回家功課

( ) 1. 過 $x+y=5$ 與 $2x-y=1$ 的交點，且斜率為 -3 的直線方程式為 (A) $x+3y=11$ (B) $x-3y=-7$ (C) $3x-y=3$ (D) $3x+y=9$ 。 代碼：g13220m1

( ) 2. 三角形三頂點，$A(1,3)$，$B(-5,1)$，$C(2,-1)$ 求 $\overline{AB}$ 之中線所在直線方程式爲 (A) $3x+4y-3=0$ (B) $x-y+3=0$ (C) $3x+4y-2=0$ (D) $x+2y-5=0$ 。 代碼：g13252m1

( ) 3. 三角形三頂點，$A(1,3)$，$B(-5,1)$，$C(2,-1)$ 求 $\overline{AB}$ 之高所在直線方程式爲 (A) $x-3y-5=0$ (B) $x-y-3=0$ (C) $x+y+1=0$ (D) $3x+y-5=0$ 。 代碼：g13251m1

( ) 4. 設 $P(2,4)$ 與 $Q(4,2)$ 為坐標平面上之兩點，試求線段 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線方程式？
(A) $x+y-3=0$ (B) $x+y=0$ (C) $x-y-3=0$ (D) $x-y=0$ 。 代碼：g13095s2

( ) 5. 已知 ΔABC 三頂點為 $A(-1,3)$，$B(2,1)$，$C(-3,-1)$，若直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 平分 ΔABC 的面積，則直線 $\overleftrightarrow{AD}$ 之方程式為何？
(A) $3x+y=0$ (B) $3x-y+6=0$ (C) $6x-y+9=0$ (D) $6x+y+3=0$ 。 代碼：g13091k1

( ) 6. $A(2,-1)$、$B(4,-3)$、$C(-1,6)$，求過 A 平行 $\overleftrightarrow{BC}$ 之直線方程式
(A) $9x+5y-13=0$ (B) $5x-9y-19=0$ (C) $5x+9y-1=0$
(D) $9x+5y-13=0$ 。 代碼：g13b01m1

( ) 7. 設直線 $3x+ay=b$ 過點 $(2,3)$ 且與直線 $x-2y-3=0$ 平行，則 $a-b$ 之值為 (A) -2 (B) 2 (C) 4 (D) 6 。 代碼：g13227m1

( ) 8. 已知直線 L 過點 $(1,5)$，且垂直於直線 $2x-3y+6=0$，則 L 與 x 軸的交點座標為何?
(A) $(-\frac{13}{2},0)$ (B) $(-\frac{7}{3},0)$ (C) $(\frac{13}{3},0)$ (D) $(\frac{17}{2},0)$。 代碼：g13091k2

( ) 9. 直線 L 之 y 軸截距為 -3 且 x 座標每減少 2 單位，y 座標便增加 3 單位，則求 L 的方程式。
(A) $3x+2y+6=0$ (B) $3x-2y-6=0$
(C) $3x+2y-6=0$ (D) $3x-2y+6=0$ 。 代碼：g13b04m1

( ) 10. 設直線 L 之斜率為 $-\frac{5}{3}$，且 L 之 x 截距為 2，則 L 之 y 截距為何？
(A) -5 (B) $-\frac{10}{3}$ (C) $\frac{10}{3}$ (D) 5 。 代碼：g13099p1

(　　) 11. 在座標平面上，兩直線 $x+y-5=0$，$x-3y+3=0$ 與 y 軸所圍城之三角形面積為何？
(A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8　。
代碼：g13097s2

(　　) 12. 設直線 $x+3y-11=0$，則下列敘述何者錯誤？
(A)斜率爲 $-\frac{1}{3}$　(B) y 軸之截距爲 $\frac{3}{11}$
(C)直線過點 $(2,3)$　(D) x 軸上之截距爲 11
代碼：g13229m1

(　　) 13. 有關直線方程式 $L:3x-2y-6=0$ 的敘述，下列何者不正確?
(A) L 與 y 軸之交點坐標爲 $(0,-3)$　(B) L 經過第二象限
(C) L 之斜率爲 $\frac{3}{2}$　(D) L 與 x 軸、y 軸所圍成之面積爲 3。
代碼：g13230m1

(　　) 14. 若 $L_1:4x+y=5$，$L_2:kx+y=0$，$L_3:2x-3y=-1$ 不能圍成一個三角形，則 k (k 有三個答案)
(A) $4,\frac{2}{3},-1$　(B) $4,-\frac{2}{3},1$　(C) $4,-\frac{2}{3},-1$　(D) $2,\frac{4}{3},-1$　。
代碼：g13253m1

(　　) 15. 設 $a,b\in R$，坐標平面上二點 $A(-2,6)$，$B(a,4)$ 對稱於直線 $L:ax-y+b=0$，則求 $a-b=$？
(A) -3　(B) 3　(C) 4　(D) 6　。
代碼：r11208m1

答案：DCDDD　ADCAC　BBBCA

主題三　點到直線的距離

1. 點線距離：

設 $A(x_0, y_0)$，$L: ax+by+c=0$，則點 A 至直線 L 之距離 $\Rightarrow d(A,L)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

1 老師講解

求點 $(5,-2)$ 到 $3x+4y+13=0$ 的距離。

1 學生練習

求點 $(-1,1)$ 到 $12x-5y-9=0$ 的距離。

【代碼】g14a01m2

2 老師講解

設 ΔABC 中，$A(3,0)$、$B(-1,-3)$、$C(1,1)$，求 $\overline{AB}$ 邊上的高爲何？

2 學生練習

設 ΔABC 中，$A(1,2)$、$B(4,6)$、$C(3,8)$，求 $\overline{AB}$ 邊上的高爲何？

【代碼】g14b01m2

3 老師講解

設 $A(-3,5)$、$B(1,-4)$，$L: x+2y-2=0$，若線段 $\overline{AB}$ 與直線 L 交於 C，求 $\overline{AC}:\overline{CB}$ 之值。

3 學生練習

已知 $A(4,5)$、$B(-5,2)$，若 $L: 2x-y+3=0$ 交 $\overline{AB}$ 於 P，求 $\overline{AP}:\overline{PB}$ 之值。

【代碼】g14b02m2

2.兩平行線距離：

已知兩平行線$\begin{cases} L_1: ax+by+c_1=0 \\ L_2: ax+by+c_2=0 \end{cases}$，則二平行線之距離$\Rightarrow d(L_1,L_2)=\dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

4 老師講解

求二平行線$\begin{cases} 8x+6y=7 \\ 4x+3y=10 \end{cases}$距離爲何？

4 學生練習

求二平行線$\begin{cases} 6x-8y=45 \\ 3x-4y=5 \end{cases}$的距離。

【代碼】g14a01m3

5 老師講解

求平行於直線$4x-3y+2=0$且與其距離爲3的直線方程式。

5 學生練習

求平行$4x+3y+6=0$且與其距離爲4之直線方程式。

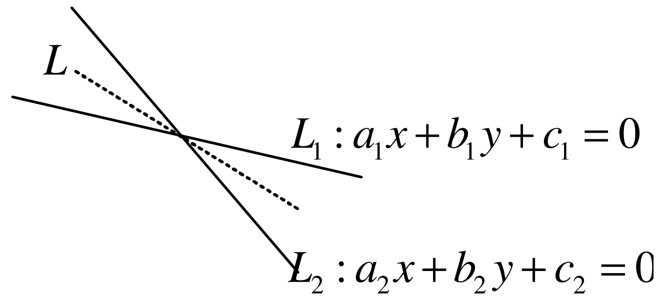
【代碼】g14b03m2

3.交角平分線：

原理：交角平分線上一點到角的兩邊等距

$\begin{cases} L_1 : a_1x+b_1y+c_1=0 \\ L_2 : a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$，則兩直線的交角平分線

$$\Rightarrow \frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$



6 老師講解

設 $L_1 : x+2y+2=0$、$L_2 : 2x+y-4=0$，求 L_1 與 L_2 所夾銳角的交角平分線方程式

6 學生練習

設 $L_1 : 3x+2y-6=0$、$L_2 : 2x+3y-6=0$，求 L_1 與 L_2 所夾銳角的交角平分線方程式

【代碼】g14a03m2

【學生練習答案】

1. 2	2. 2	3. $2:3$	4. $\frac{7}{2}$
5. $\begin{cases} 4x+3y+26=0 \\ 4x+3y-14=0 \end{cases}$	6. $5x+5y-12=0$		

回家功課

( ) 1. 設兩直線 $x-y-2=0$，$2x+y-4=0$ 之交點爲 P，則 P 到直線 $3x+4y+9=0$ 之距離爲 (A)6 (B)5 (C)4 (D)3 。

代碼：g14204m1

( ) 2. 在坐標平面上，若 $L:\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ 為一直線，試求點 $(16,6)$ 至 L 的距離？
(A)1 (B)$\frac{22}{5}$ (C)$\frac{22}{7}$ (D) 12 。

代碼：g14095s1

( ) 3. 已知直線 $L_1:3x-4y-3=0$，$L_2:2x-3y-13=0$，$L_3:x+y+1=0$，求 L_2 和 L_3 之交點到直線 L_1 之距離為何？
(A)1 (B)2 (C)3 (D)4 。

代碼：g14099s1

( ) 4 設拋物線 $y=x^2$ 與直線 $y=2x+3$ 相交於 P、Q 兩點，則 $\overline{PQ}$ 之中點至直線 $3x+4y-3=0$ 之距離為
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 。

代碼：g14088k1

( ) 5. 已知 ΔABC 中，頂點 A 的座標為 $(-2,1)$，頂點 B 和 C 位於直線 $2x+3y=12$ 上，試求 $\overline{BC}$ 邊上的高？
(A)12 (B)13 (C)$\sqrt{13}$ (D)24 。

代碼：g14090k1

( ) 6. 已知兩線 $8x-6y+10=0$ 與 $4x-3y+k=0$ 之距離爲3，則 $k=$
(A)10 (B)20 (C)-30 (D)40 。

代碼：g14206m1

( ) 7. 在座標平面上，若兩平行線 $2x+4y=k$ 與 $-x-2y=4$ 的距離為 $\sqrt{20}$，且 $k>0$，則 $k=$？
(A)8 (B)10 (C)12 (D)28 。

代碼：g14098s1

答案：DDCAC BC

主題四　圓方程式

1.定義：

在坐標平面上，與一定點等距離之所有點所成之圖形，稱為圓。其中此定點稱為圓心，圓心與圓上任一點的距離稱為半徑。

2.標準式：

以$(h\,,\,k)$為圓心，r為半徑之圓方程式為$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

3.一般式：

(1) 將圓的標準式經展開化簡後，可得$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，此方程式稱為圓的一般式。

(2) 將$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$配方可得$(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=(\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F})^2$

圓心為$(-\frac{D}{2}\,,\,-\frac{E}{2})$，半徑$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

1 老師講解

求出下列圓方程式之圓心與半徑：

(1) $x^2+(y-2)^2=9$

(2) $(x+1)^2+(y-3)^2=16$

1 學生練習

求出下列圓方程式之圓心與半徑：

(1) $(x-1)^2+(y+3)^2=9$

(2) $(x+4)^2+y^2=12$

【代碼】g21a01m2

2 老師講解

求下列條件之圓方程式：

(1) 圓心$(-2,3)$，半徑5

(2) 圓心$(2,0)$，半徑$\sqrt{7}$

2 學生練習

求下列條件之圓方程式：

(1) 圓心$(1,-3)$，半徑爲6

(2) 圓心$O(3,-4)$，半徑$r=3\sqrt{2}$

【代碼】g21a01m3

3 老師講解

求下列圓方程式之圓心與半徑：

(1) $x^2+y^2-6x+4y+4=0$

(2) $4x^2+4y^2-4x+24y+33=0$

3 學生練習

求下列圓方程式之圓心與半徑：

(1) $x^2+y^2+6x-2y-6=0$

(2) $x^2+y^2-6y-7=0$

(3) $2x^2+2y^2-4x+8y+2=0$

【代碼】g21a01m4

3. 一般式：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

$D^2+E^2-4F>0$ 時，圖形為一圓，其圓心為 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$，半徑 $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

$D^2+E^2-4F=0$ 時，圖形為一點，此點坐標為 $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$

$D^2+E^2-4F<0$ 時，方程式無圖形

【基本練習】

試判斷下列各方程式的圖形：

(1) $x^2+y^2+2x-2y-2=0$

(2) $x^2+y^2+6x-8y+25=0$

(3) $x^2+y^2-2x+4y+10=0$

4 老師講解

若方程式 $x^2+y^2-4x+6y+k=0$ 表一圓，求 k 之範圍。

4 學生練習

若方程式 $x^2+y^2-2x+4y+k=0$ 表一點，求 k 之值。

【代碼】g21a02m3

4.直徑式：

設 $A(x_1\ ,\ y_1)$，$B(x_2\ ,\ y_2)$ 為平面上相異兩點，則以 $\overline{AB}$ 為直徑之圓方程式為

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

5 老師講解

求以 $(-3,1)$、$(5,7)$ 爲直徑的圓方程式。

5 學生練習

已知一圓之直徑兩端點爲 $(1,2)$、$(-2,3)$，求此圓方程式爲何？

【代碼】g21a03m2

5.參數式：

已知圓 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \Rightarrow (\dfrac{x-h}{r})^2+(\dfrac{y-k}{r})^2=1$ (利用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$)

$$\Rightarrow \begin{cases} x=h+r\cos\theta \\ y=k+r\sin\theta \end{cases}，(0\le\theta<2\pi)$$

6 老師講解

試求圓方程式 $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ 之參數式。

6 學生練習

試求圓方程式 $(x-2)^2+(y+3)^2=25$ 之參數式。

【代碼】g21a05m2

7 老師講解

求以 $(-1,1)$ 爲圓心，過點 $(3,4)$ 之圓方程式。

7 學生練習

已知一圓過點 $(2,3)$ ，圓心爲 $x+y-2=0$ 與 $2x-y-10=0$ 的交點，求此圓方程式。

【代碼】g21a04m2

8 老師講解

求圓心爲 $(1,-2)$ 且與直線 $3x+4y-5=0$ 相切之圓方程式爲何？

8 學生練習

求圓心爲 $(3,3)$ 且與直線 $3x+y-2=0$ 相切之圓方程式爲何？

【代碼】g21b01m2

9 老師講解

已知一圓過三點 $(2,1)$ 、 $(-2,1)$ 、 $(1,4)$ ，求圓方程式。

9 學生練習

已知一圓過三點 $(1,4)$ 、 $(2,3)$ 、 $(1,3)$ ，求圓方程式。

【代碼】g21a04m3

10 老師講解

求過 $(2,2)$、$(5,-1)$，且圓心在 x 軸上之圓方程式。

10 學生練習

求過 $(3,5)$、$(4,-2)$，且圓心在 y 軸上之圓方程式。

【代碼】g21b02m2

【加強題】

1. 試求過 $A(2,1)$ 且與 x 軸、y 軸均相切的圓方程式為

2. 設 $P(1,2)$、$Q(3,-4)$，$\overline{PQ}$ 為圓之一弦，且距離圓心為 $\sqrt{10}$，求此圓方程式為

【學生練習答案】

1. (1) $O(1,-3)$，$r=3$　(2) $O(-4,0)$，$r=2\sqrt{3}$	2. (1) $(x-1)^2+(y+3)^2=36$ (2) $(x-3)^2+(y+4)^2=18$	
3. (1) $O(-3,1)$，$r=4$　(2) $O(0,3)$，$r=4$ (3) $O(1,-2)$，$r=2$	4. $k=5$	
5. $x^2+y^2+x-5y+4=0$	6. $\begin{cases} x=5\cos\theta+2 \\ y=5\sin\theta-3 \end{cases}$，$(0\le\theta<2\pi)$	
7. $(x-4)^2+(y+2)^2=29$	8. $(x-3)^2+(y-3)^2=10$	
9. $x^2+y^2-3x-7y+14=0$	10. $x^2+y^2-2y-24=0$	

回家功課

( ) 1. 已知一正方形的外接圓為 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$，則此正方形的面積為多少？ (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16 。 代碼：g21093s1

( ) 2. 已知圓 $C_1: x^2+y^2-2x+2y=2$ 及圓 $C_2: x^2+y^2-4y=5$，此兩圓圓心之間的距離為何？ (A) $\sqrt{10}$ (B) 4 (C) $\sqrt{22}$ (D) 5 。 代碼：g21099w2

( ) 3. 試問在坐標平面上，斜率為 $\frac{1}{2}$ 且通過 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 之圓心的直線方程式為何？ (A) $x-2y+5=0$ (B) $2x-y+5=0$
(C) $x+2y+5=0$ (D) $2x+y+5=0$ 。 代碼：g21096k1

( ) 4. 若方程式為 $x^2+y^2+6x-4y+c=0$ 之圖形為一點 (a,b)，則 $a+b+c$ 之值為 (A) 16 (B) 15 (C) 14 (D) 13 (E) 12 。 代碼：g21089g1

( ) 5. 在坐標平面上，圓心爲點 $(2,-3)$ 且通過點 $(-1,5)$ 的圓方程式為何？ 代碼：g21097s1
(A) $x^2+y^2-4x+6y-60=0$ (B) $x^2+y^2+4x-6y+8=0$
(C) $x^2+y^2-4x+6y-50=0$ (D) $x^2+y^2+4x-6y-8=0$ 。

( ) 6. 試求圓心為 $(1,-2)$ 且與直線 $4x-3y=0$ 相切的圓方程式 代碼：g21210m1
(A) $x^2+y^2+4x-y=5$ (B) $x^2+y^2-2x-4y=5$
(C) $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ (D)以上皆非 。

( ) 7. 在座標平面上，$A(2,4)$、$B(2,-4)$、$C(8,-2)$ 為圓上相異三點的座標，若 $O(h,k)$ 為其圓心，則 $h+k=$？ 代碼：g21097k1
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

( ) 8. 試求平面上通過 $A(0,0)$，$B(6,6)$ 兩點，且圓心在 Y 軸上的圓方程式為何? (A) $x^2+y^2-12y=0$ (B) $x^2+y^2-6x-6y=0$ 代碼：g21091s2
(C) $x^2+y^2-4x-8y=0$ (D) $x^2+y^2-8x-4y=0$ 。

( ) 9. 在坐標平面上，若不計單位，一圓之面積為圓周長 2 倍，則此圓半徑為何？ 代碼：g21094s1
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 。

( ) 10. 在坐標平面上，設圓心在第二象限上的圓與兩坐標軸相切，若圓心在直線 $3x+5y=14$ 上，則此圓的半徑為何？ 代碼：g21094k1
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 。

答案：CAAEA CDABD

主題五　點與圓、線與圓之關係

1.點與圓的關係：

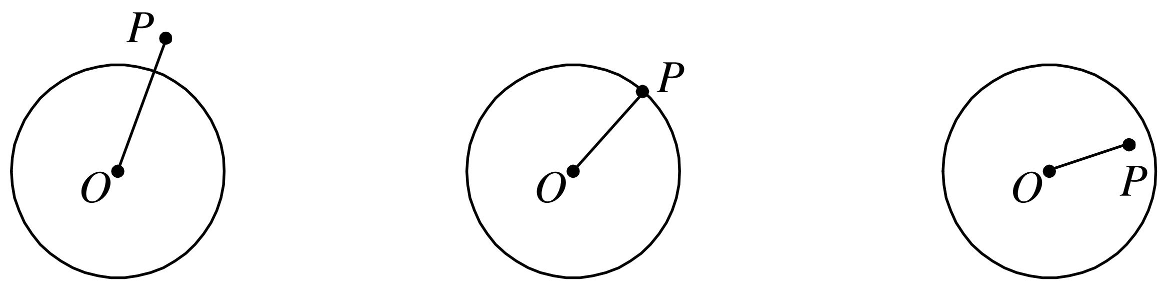
設點 $P(x_0, y_0)$，圓 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ($C:x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$)

圓心 $O(h,k)$ 與點 $P(x_0, y_0)$ 的距離為 $\overline{OP}=\sqrt{(x_0-h)^2+(y_0-k)^2}$，

(1) P 點在圓外 $\Leftrightarrow$ $\overline{OP}>r$ $\Leftrightarrow$ $(x_0-h)^2+(y_0-k)^2>r^2$ $\Leftrightarrow$ ${x_0}^2+{y_0}^2+Dx_0+Ey_0+F>0$

(2) P 點在圓上 $\Leftrightarrow$ $\overline{OP}=r$ $\Leftrightarrow$ $(x_0-h)^2+(y_0-k)^2=r^2$ $\Leftrightarrow$ ${x_0}^2+{y_0}^2+Dx_0+Ey_0+F=0$

(3) P 點在圓內 $\Leftrightarrow$ $\overline{OP}<r$ $\Leftrightarrow$ $(x_0-h)^2+(y_0-k)^2<r^2$ $\Leftrightarrow$ ${x_0}^2+{y_0}^2+Dx_0+Ey_0+F<0$



P 點在圓外　　P 點在圓上　　P 點在圓內

【基本練習】

已知圓 $C:x^2+y^2+4x-2y+1=0$，則判斷下列各點在圓內、圓上或圓外？

(A) $(0,0)$　(B) $(-2,-1)$　(C) $(-3,1)$　(D) $(2,1)$

1 老師講解

設點 $(k+1,k-2)$ 在圓 $C:x^2+y^2=9$ 之內部，求 k 之範圍。

1 學生練習

若 $P(a,2a)$ 為圓 $C:x^2+y^2-2x=0$ 外部一點，求 a 之範圍。

【代碼】g22a01m3

2.線與圓的關係：

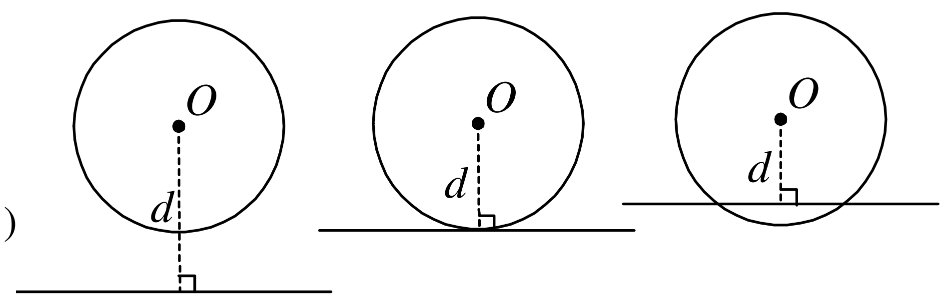
設直線 $L:ax+by+c=0$，圓 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

圓心 $O(h,k)$ 與直線 $L:ax+by+c=0$ 之距離為 $d=\dfrac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(1) $d>r$ $\Leftrightarrow$ L 與圓 C 不相交(相離)

(2) $d=r$ $\Leftrightarrow$ L 與圓 C 相切於一點(相切)

(3) $d<r$ $\Leftrightarrow$ L 與圓 C 相交於相異兩點(相割)



$d>r$　　$d=r$　　$d<r$

【基本練習】
判斷圓 C：$(x-2)^2+(y+3)^2=9$ 與 $L:3x-4y-3=0$ 之關係？

2 老師講解

若 $x+y+k=0$ 與 $x^2+y^2=2$ 的圖形有相交，求 k 的範圍。

2 學生練習

若 $k<0$，且直線 $3x-4y+k=0$ 與圓 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ 的圖形相切，求 k 之值。

【代碼】g22a02m3

3 老師講解

若 $x^2+y^2+kx+6y+9=0$ 與 x 軸相切，求 k 之值。

3 學生練習

若 $2x^2+2y^2+5x+4y+k=0$ 與 y 軸相切，求 k 之值。

【代碼】g22b01m2

4 老師講解

求點 $A(1,5)$ 到圓 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ 的最近距離與最遠距離為何？

4 學生練習

求一點 $A(-1,6)$ 到圓方程式 $x^2+y^2-4x-6y+11=0$ 之最近距離為何？

【代碼】g22b02m2

5 老師講解

假設 P 為圓 $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ 上之一動點，求 P 到直線 $4x-3y+4=0$ 的最遠距離為何？

5 學生練習

假設 Q 為圓 $x^2+y^2-6y=0$ 上之一動點，求 Q 到直線 $3x+4y+8=0$ 的最遠距離為何？

【代碼】g22b03m2

6 老師講解

直線 $4x+3y-3=0$ 與圓 $x^2+y^2-4x=0$ 相交於 P、Q 二點，求 $\overline{PQ}$ 之長。

6 學生練習

圓 $C:x^2+y^2-2x-2y-2=0$ 與直線 $L:x-y+2=0$ 交兩點，求此兩點之距離。

【代碼】g22b04m2

3.求切線：

(1) **過圓上一點求切線方程式：**

過圓 $C:x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 上一點 $P(x_0,y_0)$

的切線方程式為 $x_0\cdot x+y_0\cdot y+D\times\dfrac{x_0+x}{2}+E\times\dfrac{y_0+y}{2}+F=0$

過圓 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 上一點 $P(x_0,y_0)$

的切線方程式為 $(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$

7 老師講解

求過圓 $C: x^2+y^2+2x-4y-5=0$ 上一點 $(2,1)$ 之切線方程式。

7 學生練習

求過圓 $C: x^2+y^2+x+y-12=0$ 上一點 $(2,-3)$ 之切線方程式。

【代碼】g23a01m2

(2) **已知斜率、點在圓外求切線：**

利用直線方程式的觀念假設切線方程式

利用圓心至切線之距等於半徑，求出直線方程式

8 老師講解

已知直線 L 的斜率為 3，且與 $x^2+y^2=10$ 相切，求直線 L 之方程式。

8 學生練習

求垂直 $L: 3x-y+7=0$ 且與圓 C：$x^2+y^2=10$ 相切的直線方程式。

【代碼】g23a02m2

9 老師講解

求過 $P(2,1)$ 且與 $x^2+y^2=1$ 相切的直線方程式。

9 學生練習

求過點 $(3,1)$ 且與 $x^2+y^2=1$ 相切之直線方程式。

【代碼】g23b01m2

10 老師講解

自圓 $C:x^2+y^2=1$ 外一點 $P(1,3)$ 作圓切線，求其切線方程式。

10 學生練習

自圓 $x^2+y^2=9$ 外一點 $(3,4)$ 作圓切線，求其方程式。

【代碼】g23b02m2

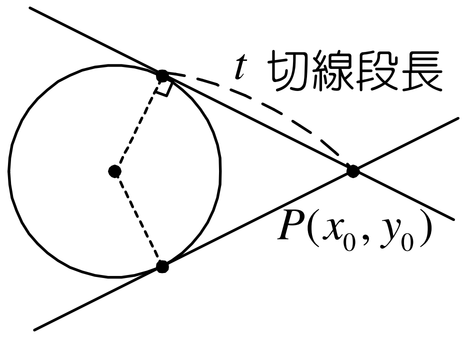
4.切線段長：

(1) 過圓 $C:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 外一點 $P(x_0,y_0)$ 的切線段長

$$t=\sqrt{(x_0-h)^2+(y_0-k)^2-r^2}$$

(2) 過圓 $C:x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 外一點 $P(x_0,y_0)$ 的切線段長

$$t=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2+Dx_0+Ey_0+F}$$



11 老師講解

$P(2,3)$ 為 $C:x^2+y^2+2x+2y-7=0$ 外一點，求自 P 向圓 C 所作的切線段長。

11 學生練習

求 $(3,1)$ 至 $C:x^2+y^2-3x+5y-3=0$ 所作切線段的長。

【代碼】g23a03m2

【加強題】

1. 設 P 為圓 $x^2+y^2+6x-4y+9=0$ 上一動點，點 P 至點 $A(1,5)$ 之距離最遠為_____，求 P 點坐標為_______。

2. 在坐標平面上 $(7,5)$ 處有一光源，將圓 $x^2+(y-1)^2=1$ 投射到 x 軸的影長為____。

3. 設直線過 $A(3,-4)$，且與圓 $C:x^2+y^2=16$ 相切於 P、Q 兩點，求：
(1)四邊形 $APOQ$ 的面積為_______。 (2) $\overline{PQ}$ 的長度為______。

【學生練習答案】

1. $a<0$，$a>\dfrac{2}{5}$	2. -12	3. $k=2$	4. $2\sqrt{2}$
5. 7	6. $2\sqrt{2}$	7. $x-y-5=0$	8. $x+3y\pm10=0$
9. $\begin{cases} y-1=0 \\ 3x-4y-5=0 \end{cases}$	10. $\begin{cases} 7x-24y+75=0 \\ x=3 \end{cases}$	11. $\sqrt{3}$	

回家功課

( ) 1. 在坐標平面上，設 k 為整數，若點 $(k-4,k-2)$ 在圓 $(x+1)^2+(y-2)^2=13$ 的內部(不在圓上)，則 k 共有幾個？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。
代碼：g22095s1

( ) 2. 已知直線 $L: 3x+4y+5=0$ 與圓 $C: x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 兩者的交點個數為 a，且圓 C 的圓心到直線 L 的距離為 b，則下列何者為正確？
(A) $a-b=-3$ (B) $a-b=-1$ (C) $a+b=4$ (D) $a+b=5$ 。
代碼：g22099k1

( ) 3. 在座標平面上，若圓 $x^2+4x+y^2-6y+k=0$ 與 x 軸相切，則 $k=$？
(A) -6 (B) 2 (C) 4 (D) 8 。
代碼：g22098s1

( ) 4. 假設 P 爲圓 $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ 上之一動點，求 P 到直線 $4x-3y+4=0$ 的最遠距離爲 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。
代碼：g22b03m1

( ) 5. 已知直線 $3x+4y+1=0$ 與圓 $x^2+y^2+2x-6y-5=0$ 交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB}=$？
(A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{11}$ (D) $4\sqrt{11}$ 。
代碼：g22092k1

( ) 6. 在座標平面上，設 m、b 為實數，若直線 $y=mx+b$ 與圓 $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ 相切於點 $(-1,1)$，則 $2m+b=$？
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 。
代碼：g23097s1

( ) 7. 若直線 L 與圓 $x^2+y^2=9$ 相切與 $x+y-5=0$ 垂直，試求 L 之方程式
(A) $x-y\pm3=0$ (B) $x-y\pm3\sqrt{3}=0$
(C) $x-y\pm2\sqrt{3}=0$ (D) $x-y\pm3\sqrt{2}=0$ 。
代碼：g23204m1

( ) 8. 過點 $(-4,4)$ 作 $(x-3)^2+(y-3)^2=25$ 之切線
(A) $4x-3y+28=0$，$3x+4y-4=0$
(B) $3x-4y+28=0$，$4x+3y+4=0$
(C) $x-4y+20=0$，$4x+y+12=0$
(D) $3x-4y+6=0$，$4x-3y+1=0$ 。
代碼：g23208m1

( ) 9. 過圓上一點 $(5,-3)$ 作圓 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ 之切線爲
(A) $3x-4y=27$ (B) $4x+3y=11$ (C) $3x+4y=13$ (D) $4x-3y=29$ 。
代碼：g23k07m1

答案：DCCDC BDBA

歷屆試題

( ) 1. 設點 $(a,2)$ 落在 $(1,3)$ 與 $(2,5)$ 兩點的連線上，則 $a=$？
(A) -1 (B) -0.5 (C) 0.5 (D) 1。
代碼：g12100s1 (100 年統測 B)

( ) 2. 設直線 L 通過 $(3,4)$ 與 $(9,-4)$ 兩點，則原點 $(0,0)$ 與直線 L 的距離與下列何者最接近？ (A) 4 (B) 5 (C) 16 (D) 24。
代碼：g14100s1 (100 年統測 B)

( ) 3. 已知一圓方程式為 $x^2+y^2+2x+2y+1=0$，則過點 $(0,1)$ 且與此圓相切的直線方程式可為下列何者？
(A) $x=0$ (B) $y=0$ (C) $y=1$ (D) $2x-y+1=0$。
代碼：g23100s1 (100 年統測 B)

( ) 4. 若直線 $24x-7y=53$ 與二直線 $x=0$ 、 $x=7$ 分別交於 A 、 B 二點，則線段 $\overline{AB}$ 的長度為何？ (A) $\dfrac{24}{7}$ (B) $\dfrac{53}{7}$ (C) 25 (D) 53。
代碼：g12100k1 (100 年統測 C)

( ) 5. 設直線 L_1 的斜率為 -2 且通過點 $(0,-4)$，又直線 L_2 的 x 、 y 軸截距分別為 1 、 2，則下列何者正確？
(A) L_1 與 L_2 相交於點 $(2,-8)$ (B) L_1 與 L_2 相交於點 $(4,-6)$
(C) L_1 與 L_2 平行且兩線相距 $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (D) L_1 與 L_2 平行且兩線相距 $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$。
代碼：g14100k1 (100 年統測 C)

( ) 6. 已知一圓方程式為 $x^2+y^2+6x-8y=0$。下列敘述何者正確？
(A)點 $(1,0)$ 落在圓外 (B)此圓通過點 $(-3,4)$ (C)此圓的半徑為 25
(D)此圓的圓心為 $(0,0)$。
代碼：g22100k1 (100 年統測 C)

( ) 7. 直線 L_1，L_2 方程式分別為 $L_1:4x+(m-1)y=15$，$L_2:(2m+3)x+6y=7$，且 L_1 垂直 L_2，則 m 之值為何？ (A) $-\dfrac{13}{7}$ (B) $-\dfrac{7}{6}$ (C) $-\dfrac{3}{7}$ (D) $-\dfrac{3}{8}$
代碼：g12101s1 (101 年統測 B)

( ) 8 直線 $L_1:2x-y-1=0$，$L_2:x+3y-4=0$，$L_3:x+ay+3=0$，若 L_1 、 L_2 、 L_3 三直線相交於一點，則 a 之值為何？ (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4
代碼：g13101s1 (101 年統測 B)

( ) 9. 已知圓的面積為 9π，圓的方程式為 $2x^2+2y^2-4x+4y+k=0$，則 k 之值為何？ (A) -7 (B) -14 (C) -21 (D) -28。
代碼：g21101s1 (101 年統測 B)

(　　)10. 若直線 $L: x-y=1$ 與圓 $C: x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 交於 A 、 B 兩點，則線段 $\overline{AB}$ 之長為何？ (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 。

代碼：g22101s1
(101 年統測 B)

(　　)11. 平面上四點 $A(1,1)$ 、 $B(a,2)$ 、 $C(b,-1)$ 、 $D(0,-2)$，其中 b 為正數，若 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 互相平行，且 $\overline{BD}$ 與 $\overline{AC}$ 互相垂直，求 $a+2b$ 之值為何？
(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 。

代碼：g12101k1
(101 年統測 C)

(　　)12. 設 $P(-2,4)$ 與 $Q(2,-2)$ ，若直線 $L: ax+3y+b=0$ 為 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線，求 $a+b$ 之值為何？ (A) $-\frac{15}{2}$ (B) -5 (C) -1 (D) $\frac{3}{2}$ 。

代碼：g13101k1
(101 年統測 C)

(　　)13. 設兩直線 $L_1: 3x+y-4=0$ 與 $L_2: x+3y-4=0$，則 L_1 與 L_2 交角為銳角的角平分線方程式為何？
(A) $x+y-2=0$ (B) $x-y=0$ (C) $2x+y-3=0$ (D) $2x-y=0$ 。

代碼：g15101k1
(101 年統測 C)

(　　)14. 設直線 $L: kx+3y+10=0$ 與圓 $C: x^2+y^2=4$ 沒有交點，則常數 k 的範圍為何？ (A) $-4<k<4$ (B) $-2<k<2$
(C) $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ (D) $k<-\sqrt{2}$ 或 $k>\sqrt{2}$ 。

代碼：g22101k1
(101 年統測 C)

(　　)15. 已知 $y=2^x$ 的圖形通過圓 $C: x^2+y^2-2ay=0$ 之圓心。
若圓與直線 $L: y=\frac{3x+k}{4}$ 相切，求 $\log_2 a+\log_5 (k-4)^2$ 之值為何？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

代碼：g23101k1
(101 年統測 C)

(　　)16. 已知直角坐標平面兩點 $A(-4,-1)$ 、 $B(-5,4)$ ，且 C 為線段 $\overline{AB}$ 上的點若 O 為原點，則下列何者可能為 $\overleftrightarrow{OC}$ 的直線方程式？
(A) $y=-2x$ (B) $y=-x$ (C) $y=0.2x$ (D) $y=x$ 。

代碼：g12102s1
(102 年統測 B)

(　　)17. 已知直角坐標平面上有三點 $A(3,1)$ 、 $B(5,-2)$ 、 $C(-7,3)$ ，求點 A 到直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的距離 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。

代碼：g14102s1
(102 年統測 B)

(　　)18. 若 a 、 b 為實數。若直線 $2x+ay+b=0$ 通過 $10x-2y+5=0$ 與 $6x-y+7=0$ 之交點，且斜率為 2 ，則 $a+b=$？
(A) -12 (B) -10 (C) 10 (D) 12 。

代碼：g13102k1
(102 年統測 C)

( ) 19. 已知 L_1 、 L_2 為與直線 $3x+4y=0$ 平行的二直線。若 L_1 過點 $(-29,23)$ ， L_2 過點 $(31,23)$ ，則此二平行線間的距離為何？
(A) 23 (B) 36 (C) 48 (D) 60 。

代碼：g14102k1
(102 年統測 C)

( ) 20. 平面上三點 $A(5,0)$ ， $B(1,-12)$ 及 $C(-4,-7)$ ，若 $D(x,y)$ 為線段 $\overline{AB}$ 上一點且線段 $\overline{CD}$ 垂直於 $\overline{AB}$ ，則 $x+y=$ ？
(A) -4 (B) -5 (C) -6 (D) -7 。

代碼：g12103s1
(103 年統測 B)

( ) 21. 已知平面上有一圓 $C:(x-a)^2+y^2=1$ 與直線 $L:y=x$ 相交於兩點，則 a 可能為下列何者？ (A) $a=-2$ (B) $a=1$ (C) $a=2$ (D) $a=3$ 。

代碼：g22103s1
(103 年統測 B)

( ) 22. 設 $A(0,0)$ ， $B(2,2)$ 為平面上兩點，點 $P(m,n)$ 在線段 $\overline{AB}$ 上， $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$ ，則 $m+n$ 之值為何？
(A) 2 (B) 2.5 (C) 3 (D) 3.5 。

代碼：g11103k1
(103 年統測 C)

( ) 23. 若通過 $A(1,1)$ 和 $B(3,k)$ 兩點的直線其斜率為 3，則 $k=$ ？
(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9 。

代碼：g12104s1
(104 年統測 B)

( ) 24. 若圓 $C:x^2-2kx+y^2-2y=4$ 的半徑為 3，且圓心 (a,b) 在第一象限，則 $a+b=$ ？ (A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 8 。

代碼：g21104s1
(104 年統測 B)

( ) 25. 已知 $P(a,1)$ 、 $Q(-1,b)$ 為平面上兩點。若 P 為直線 $L:3x-4y=2$ 上一點且直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與直線 L 垂直，則 $a+b=$ ？ (A) 7 (B) 9 (C) 11 (D) 13 。

代碼：g13104k1
(104 年統測 C)

( ) 26. 已知 ΔABC 的三頂點為 $A(-1,2)$ 、 $B(-3,-3)$ 、 $C(3,-1)$ ，則 $\overline{AB}$ 邊上的中線長為何？ (A) $\frac{\sqrt{26}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{71}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{101}}{2}$ (D) $\sqrt{26}$ 。

代碼：g11105s1
(105 年統測 B)

( ) 27. 已知直線 L 過點 $(1,3)$ ，且與 x 軸、 y 軸在第二象限圍出一個等腰直角三角形，則下列何者為直線 L 的方程式？
(A) $x-y=-2$ (B) $x+y=-2$ (C) $2x-2y=1$ (D) $x+y=2$ 。

代碼：g13105s1
(105 年統測 B)

( ) 28. 若直線$3x-2y+6=0$的斜率為a，y截距為b，x截距為c，且此直線與兩坐標軸所圍成的封閉區域面積為d，求$ab-cd$之值
(A)$\frac{3}{2}$ (B)$\frac{9}{2}$ (C)$\frac{15}{2}$ (D)$\frac{21}{2}$。

代碼：g13105k1
(105 年統測 C)

( ) 29. 已知圓的方程式為$x^2+y^2-2x-2y+1=0$；直線方程式為$x+y-1=0$，若圓和直線的交點分別為A與B，圓心為O，則下列何者正確？ (A)$\overline{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B)圓心O到直線$\overline{AB}$的距離為$\frac{1}{2}$
(C)圓心O與A，B形成的三角形ΔABO面積為$\frac{1}{2}$
(D)交點A、B的坐標分別為$(-1,0)$，$(0,1)$。

代碼：g22105k1
(105 年統測 C)

( ) 30. 在坐標平面上，若直線L通過兩點$A(2,a)$，$B(a,5)$，且直線L的斜率為2，則$a=$？ (A)-2 (B)1 (C)2 (D)3。

代碼：g12106s1
(106 年統測 B)

( ) 31. 設打水漂遊戲中石頭落入水中的漣漪是以圓的形式展現。若某人向河面擲出石頭的方向是沿著直線$y=x-1$行進,下列哪一個圓方程式可為此漣漪的形式?
(A)$x^2-2x+y^2+4y+1=0$ (B)$x^2-4x+y^2-2y+4=0$
(C)$x^2-2x+y^2-4y+4=0$ (D)$x^2-4x+y^2-6y+9=0$。

代碼：g21106k1
(106 年統測 C)

( ) 32. 在坐標平面上，若直線L的方程式為$ax-y=3$，其中$a\neq 0$且經過點$(1,2)$，則直線L的斜率為何? (A)5 (B)3 (C)-3 (D)-5。

代碼：g13107s1
(107 年統測 B)

( ) 33. 若$x^2+y^2+kx+2y+k+1=0$表示一圓，則k的範圍為何?
(A)$2<k<4$ (B)$0<k<3$ (C)$k<2$或$k>3$ (D)$k<0$或$k>4$。

代碼：g21107s1
(107 年統測 B)

( ) 34. 已知直線L_1通過$(2,3)$、$(1,5)$兩點，且直線L_2的x截距是1、y截距是4。若L_1與L_2的斜率分別為m_1與m_2，則下列何者正確?
(A)$0<m_1<m_2$ (B)$m_1<0<m_2$ (C)$m_2<0<m_1$ (D)$m_2<m_1<0$。

代碼：g13107k1
(107 年統測 C)

( ) 35. 若兩直線$3x+4y=6$與$9x+12y=k$的距離為2，則k的值可能為下列何者? (A)-48 (B)-12 (C)10 (D)24。

代碼：g14107k1
(107 年統測 C)

( ) 36. 設點 O_1 為圓 $C: x^2+y^2-6x+4y+9=0$ 之圓心。今以另一點 O_2 為圓心、$\overline{O_1O_2}$ 為半徑作一圓，且此圓與圓 C 交於 A 、 B 兩點。若 $\overline{AO_2}=3$，則 $\overline{AB}=$? (A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ (C) $2\sqrt{2}$ (D) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ 。 代碼：g22107k1 (107 年統測 C)

( ) 37. 設 $P(x,y)$ 為圓 $x^2+y^2-6x+8y=0$ 上的動點，若 $4x+3y+5$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M+m=$? (A) -5 (B) 0 (C) 5 (D) 10 。 代碼：g22107k2 (107 年統測 C)

( ) 38. 已知直線 L 之斜率為 2 ，x 截距為 3。試問 L 與兩坐標軸所包圍三角形之面積為何? (A) $\frac{9}{4}$ (B) $\frac{9}{2}$ (C) 6 (D) 9 。 代碼：g13108s1 (108 年統測 B)

( ) 39. 已知一圓方程式 $x^2+y^2-2x-6y+9=0$ 。若直線 $y=b$ 與該圓有交點，則下列敘述何者正確?
(A) $b\ge 5$ (B) $b\le -4$ (C) $-1\le b\le 1$ (D) $2\le b\le 4$ 。 代碼：g22108s1 (108 年統測 B)

( ) 40. 已知坐標平面上三直線 $L_1: 3x+3y=2$、$L_2: 2x-3y=3$、$L_3: x-ay=-2$，且這三直線將平面分成六個區域，則 a 不可以是下列哪一個值?
(A) $\frac{3}{2}$ (B) 1 (C) -1 (D) -9 代碼：g13108k1 (108 年統測 C)

( ) 41. 已知坐標平面上三直線 L 、 L_1 與 L_2 ，若直線 L 為水平線，L_1 與 L_2 的斜率分別為 $\frac{2}{3}$ 與 $-\frac{3}{2}$ ，且直線 L 被 L_1 與 L_2 所截出的線段長為 26 ，則此三直線所圍成的三角形面積為多少平方單位?
(A) 39 (B) 52 (C) 78 (D) 156 。 代碼：g13108k2 (108 年統測 C)

( ) 42. 若 A 、 B 兩點分別是拋物線 $y=x^2$ 與直線 $x=-3$ 、 $x=1$ 的交點，則直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與下列哪一條直線平行？
(A) $y=-2x$ (B) $y=\frac{-1}{2}x$ (C) $y=\frac{1}{2}x$ (D) $y=2x$ 。 代碼：g12109s1 (109 年統測 B)

( ) 43. 已知圓 $C: (x-3)^2+(y-2)^2=1$ 。若點 P 是圓 C 上一點，則 P 到直線 $L: 3x+4y+8=0$ 的最短距離為何?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 。 代碼：g22109s1 (109 年統測 B)

( ) 44. 若 k 為實數，且點 $P(1,k)$ 為曲線 $kx^2+y^2+2x-4y+k-1=0$ 上之一點，求曲線之圖形為何? (A)圓 (B)拋物線 (C)橢圓 (D)雙曲線 。 代碼：g22109k1 (109 年統測 C)

(　　) 45. 若圓 $C : x^2+y^2-8x+6y=0$，則圓 C 之直徑為何？
(A)6　(B)8　(C)10　(D)12　。
代碼：110tcb07
(110 年統測 B)

(　　) 46. 若直線 $L_1 : y=mx+b$ 與直線 $L : 2x+3y=1$ 平行，且直線 L_1 與 x 軸的交點之 x 坐標為 2，則下列何者正確？
(A) $m+b=\frac{2}{3}$　(B) $m+b=6$　(C) $m\times b=\frac{2}{3}$　(D) $m\times b=9$　。
代碼：110tcb12
(110 年統測 B)

(　　) 47. 若圓 $C_1 : x^2+y^2-2x+2y=0$、圓 $C_2 : x^2+y^2-4x+4y=0$，則直線 $L : x-y-4=0$ 與兩圓 C_1、C_2 共有幾個交點？
(A)1　(B)2　(C)3　(D)4　。
代碼：110tcb13
(110 年統測 B)

(　　) 48. 若圓 C 與 y 軸相切，且圓心為拋物線 $y=x^2+4x+5$ 之頂點，則下列何者為圓 C 的方程式？
(A) $x^2+y^2+4x-2y+4=0$　(B) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$
(C) $x^2+y^2-4x+2y+4=0$　(D) $x^2+y^2+4x-2y+1=0$　。
代碼：110tcc08
(110 年統測 C)

(　　) 49. 已知 a、b 為實數。若直線 $L_1 : y=ax+b$ 與 $L_2 : y=bx+a$ 相互垂直，且 $a^2+b^2=50$，則 L_1 與 L_2 的交點與原點的距離為多少？
(A) $4\sqrt{3}$　(B)7　(C) $5\sqrt{2}$　(D) $2\sqrt{13}$　。
代碼：110tcc13
(110 年統測 C)

(　　) 50. 若過 $A(3,-a)$、$B(1,10)$ 兩點之直線與直線 $L : y=2ax+7$ 平行，則 $a=$？　(A)4　(B)2　(C) -2　(D) -4　。
代碼：111tcb04
(111 年統測 B)

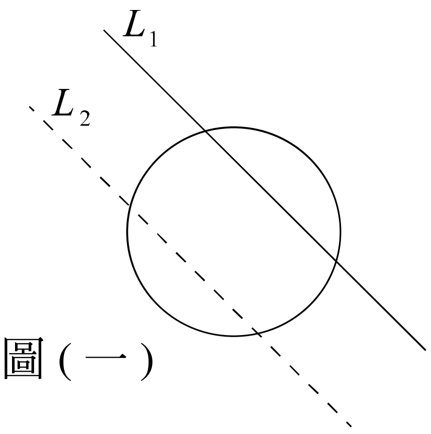
(　　) 51. 若直線 $L_1 : ax+2y+12=0$ 與直線 $L_2 : 2x-8y-6=0$ 垂直，則點 $(1,-9)$ 到直線 L_1 的距離為何？
(A) $\frac{\sqrt{23}}{23}$　(B) $\frac{\sqrt{21}}{21}$　(C) $\frac{\sqrt{19}}{19}$　(D) $\frac{\sqrt{17}}{17}$　。
代碼：111tcb05
(111 年統測 B)

(　　) 52. 若圓 $x^2+y^2-6x+2ay-7=0$ 的圓心在 x 軸上，則此圓的面積為何？
(A) 4π　(B) 16π　(C) 49π　(D) 64π　。
代碼：111tcb07
(111 年統測 B)

(　　) 53. 已知直角三角形的三個頂點為 $A(1,2)$、$B(4,7)$、$C(a,5)$，且 $\overline{BC}$ 為斜邊，則 $a=$？　(A) -4　(B) -3　(C)3　(D)4　。
代碼：111tcb08
(111 年統測 B)

(　　) 54. 若 $A(1,4)$、$B(6,2)$ 所連接的線段 $\overline{AB}$ 與直線 $L : x-y+1=0$ 相交於 P 點，則 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=$？　(A) $\frac{2}{5}$　(B) $\frac{3}{7}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{3}{5}$　。
代碼：111tcc07
(111 年統測 C)

(　　)55. 已知圓 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 與相異直線 $L_1: x+y+1=0$ 及 $L_2: ax+by+10=0$ 分別於兩點，且 $L_1 // L_2$，如圖(一)所示。若此圓圓心到兩直線 L_1、L_2 的距離相等，則 $a+b=$？
(A)2　(B)4　(C)6　(D)10　。



圖(一)

代碼：111tcc09
(111 年統測 C)

答案：　CBACD　ACABA　DBAAB　CBABD　BCCAA　CADCD　BADDB　DDDDB
DADAC　ACDBC　DBAAB

綜合練習

(　　) 1. 已知 $A(2,1)$ 、 $B(6,3)$ 、 $C(k,5)$ 三點在坐標平面上無法構成一個三角形，則 $k=$ ？ (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 。　代碼：g12091s1

(　　) 2. 在坐標平面上，若兩直線 $L_1: my=2x+1$ 與 $L_2: 2y=3x+1$ 互相垂直，則 $m=$ ？ (A) $-\frac{3}{4}$ (B) -3 (C) $-\frac{4}{3}$ (D) -1 。　代碼：g12098s1

(　　) 3. 在坐標平面上，設 a 、 b 爲實數，若 A 、 B 兩點的坐標分別爲 $(a,1)$ 、 $(b,3)$ ，且線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分線爲 $2x+y=4$ ，則 $2a+b=$ ？
(A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -2 。　代碼：g13097k1

(　　) 4. 設過點 $(1,2)$ 且平行 $2x+3y=1$ 的直線爲 $ax+by=1$ ，則 $a-b=$ ？
(A) $-\frac{1}{8}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$ 。　代碼：g13092s1

(　　) 5. 設三直線 $L_1: x+3y-2=0$ ， $L_2: 3x+y+2=0$ ， $L_3: x-y-2=0$ ，且 L_1 與 L_2 相交於 A 點，則過 A 點且與 L_3 平行的直線，<u>不通過</u>哪一個象限？ (A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限。　代碼：g13099k1

(　　) 6. 已知平行四邊形的二邊在直線 $2x+3y-7=0$ 與 $x-3y+4=0$ 上面，一頂點爲 $(1,1)$ ，則另二邊所在直線方程式爲
(A) $2x+3y+5=0$ 與 $x-3y+2=0$ (B) $2x+3y-5=0$ 與 $x-3y-2=0$
(C) $2x+3y+5=0$ 與 $x-3y-2=0$ (D) $2x+3y-5=0$ 與 $x-3y+2=0$　代碼：g13215m1

(　　) 7. 在坐標平面上，過點 $(2,-1)$ 且與直線 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ 垂直的直線方程式爲何？
(A) $4x-3y=9$ (B) $4x-3y=10$ (C) $3x-4y=9$ (D) $3x-4y=10$ 。　代碼：g13095k1

(　　) 8. 設直線 L 的斜率爲 2 且在 x 軸之截距爲 3，請問下列哪一點在直線 L 上？ (A) $(5,5)$ (B) $(6,6)$ (C) $(7,7)$ (D) $(8,8)$ 。　代碼：g13095k2

( ) 9. 下列敘述何者錯誤？ (A)直線 $L: x+2y=4$ 的斜率為 $-\frac{1}{2}$ 代碼：g13098k1
(B)方程式 $x=4$ 的圖形是一條通過點 $(4,5)$，且平行 y 軸的直線
(C)通過點 $A(1,2)$、$B(-2,3)$ 的直線方程式為 $3x-y-1=0$
(D)當點 $A(-1,1)$、$B(2,x)$、$C(3,11)$ 為共線的三點時，則 $x=\frac{17}{2}$。

( ) 10. 若兩點 $A(0,0)$、$B(a,b)$ 對稱於直線 $x-2y=5$，則 $a-b=$？ 代碼：g13092k1
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8。

( ) 11. $L: ax+by-2=0$ 過 $(-2,2)$ 且與二軸在第 I 象限所圍成三角形面積為 1， 代碼：g13218m1
求 $a+b=$？ (A) -1 (B) 2 (C) 3 (D) 4。

( ) 12. ΔABC 中，點 $A\ (-2,3)$，點 B 和點 C 位於直線 $4x-3y+2=0$ 上，且 $\overline{BC}$ 代碼：g14091s1
的長度為 4，試問 ΔABC 的面積為何？ (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10。

( ) 13. 設 $L: 6x+8y-3=0$ 為一直線，則下列方程式中何者與 L 平行， 代碼：g14092k1
且與 L 之距離為 $\frac{5}{2}$？ (A) $3x+4y-28=0$ (B) $3x+4y+11=0$
(C) $6x+8y-19=0$ (D) $6x+8y+19=0$。

( ) 14. 若圓 $C: x^2+6ax+y^2=64$ 的面積為 100π，則 a 可以是下列中的哪一 代碼：g21090s1
個？ (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 4。

( ) 15. 一邊長為 a 之正方形與一圓有相同周長，設圓面積為 A，則下列何者 代碼：g21101w1
正確？ (A) $A=\frac{4a^2}{\pi^2}$ (B) $A=\frac{a^2}{\pi}$ (C) $A=a^2$ (D) $A=\frac{4a^2}{\pi}$。

( ) 16. 若圓 C 的方程式為 $x^2+y^2-6x-4y+4=0$，則下列各方程式的圖形， 代碼：g22098k1
何者與圓 C 相切？ (A) $3x+4y-1=0$ (B) $3x+4y-2=0$
(C) $3x+4y-7=0$ (D) $3x+4y-14=0$。

( ) 17. 設 $a>0$，若圓 $x^2+y^2+2ax-1=0$ 與直線 $x+y=3$ 相切，則 $a=$? 代碼：g22092s1
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7。

(　　) 18. 設 a 為實數，且直線 $3x+4y+1=0$ 與圓 $(x-a)^2+y^2=4$ 沒有交點，則 a 可能為下列哪一個數？ (A) -3　(B) -2　(C) 3　(D) 4 。　代碼：g22104w1

(　　) 19. 設圓 $x^2+y^2-2x+2y+k=0$ (其中 k 為常數)與直線 $x-2=0$ 相切，則 k 為何？ (A) -1　(B) 0　(C) 1　(D) 2 。　代碼：g22101w1

(　　) 20. 圓 $C: x^2+y^2-4x-2y-20=0$ 與直線 $L: 3x+4y+5=0$ 相交於 A 、 B 兩點，設圓 C 的圓心為 P ，則 ΔPAB 面積為 (A) 8　(B) 12　(C) 16　(D) 20 。　代碼：g22204m1

(　　) 21. 有一圓 $C: x^2+y^2+2x-4y-4=0$ ，其一弦 $\overline{AB}$ 之中點坐標為 $(1,1)$ ，則弦 $\overline{AB}$ 的長為 (A) 1　(B) 2　(C) 3　(D) 4 。　代碼：g22205m1

(　　) 22. 設點 P 在圓 $O: x^2+y^2=1$ 上移動， P 點與直線 $L: 3x+4y+4=0$ 最長距離為 M ，最短距離為 m ，則 $M-m=$ ？ (A) 0　(B) 1.6　(C) 1.8　(D) 2 。　代碼：g22102w1

(　　) 23. 設 m 、 b 為實數，直線 $y=mx+b$ 過 $(-1,1)$ 且與圓 $x^2+y^2-6x+2y-10=0$ 相切，則 $m+b=$ ？ (A) 4　(B) 5　(C) 6　(D) 7 。　代碼：g23096s1

(　　) 24. 設直線 L 與圓: $x^2+y^2+6x+4y=12$ 相切於點 $(-6,2)$ ，則點 $(1,1)$ 到直線 L 的距離為何？ (A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5 。　代碼：g23099s1

(　　) 25. 已知過點 $P(-2,1)$ 可作兩條直線與圓 $x^2+y^2=1$ 相切。若此兩直線的斜率分別為 m_1 及 m_2 ，求 $m_1+m_2=$ ？ (A) $-\frac{4}{3}$　(B) $-\frac{3}{4}$　(C) $\frac{3}{4}$　(D) $\frac{4}{3}$ 。　代碼：g23099p1

(　　) 26. 過點 $A(3,4)$ 作圓 $x^2+y^2=9$ 之二切線，切點為 P ， Q ，圓心為 O ，求 $\overline{PQ}=$ (A) $\frac{12}{5}$　(B) $\frac{24}{5}$　(C) $\frac{15}{4}$　(D) $\frac{15}{2}$ 。　代碼：g23211m1

(　　) 27. 圓心在原點的兩個同心圓，面積分別為 75π 和 27π 。設 P 點在第一象限。若 P 點到大圓、小圓、 X 軸的距離均相等，則 P 點的坐標為。 (A) $(3\sqrt{3},\sqrt{5})$　(B) $(5\sqrt{3},\sqrt{5})$　(C) $(3\sqrt{5},\sqrt{3})$　(D) $(5\sqrt{3},\sqrt{3})$ 。　代碼：r13085c1

( ) 28. 坐標平面上的圓 $C:(x-7)^2+(y-8)^2=9$ 上有幾個點與原點的距離正好是整數值 (A)10 (B)11 (C)12 (D)13。 代碼：r13093c1

( ) 29. 坐標平面上，一圓與直線 $x-y=1$ 以及直線 $x-y=5$ 所截的弦長皆為 14。則此圓的面積 (A) 47π (B) 51π (C) 53π (D) 57π。 代碼：r13102c1

( ) 30. 坐標平面上兩圖形 Γ_1,Γ_2 的方程式分別為：$\Gamma_1:(x+1)^2+y^2=1$、$\Gamma_2:(x+y)^2=1$。請問 Γ_1,Γ_2 共有幾個交點？
(A)1 個 (B)2 個 (C)3 個 (D)4 個。 代碼：r13105c1

答案：BBAAD DDBCC CBBAD BDDCB DCBDA BCCBB

單元 6　數列級數

主題一　等差數列與等差級數

1. 數列與級數的意義：

(1) 數列：

依照順序列出來一系列的數，就構成一個數列。通常以 $<a_n>$ 表示 n 項數列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$。其中第一項 a_1 稱為首項，第 n 項 a_n 稱為末項

①有限數列：數列之項數為有限個時，即 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$

②無窮數列：數列之項數為無限多個時，即 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots$

(2) 級數：

將一數列各項以『+』號予以連接起來所成的式子，就為級數。

①有限級數：$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

②無窮級數：$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

(3) 設 S_n 表示一級數前 n 項之和，即 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$，則 $\begin{cases} a_1 = S_1 \\ a_n = S_n - S_{n-1} \ (n \geq 2) \end{cases}$

1 老師講解

若一數列 $<a_n>$，其中 $a_n = n^2 - 3n$，試寫出它的前四項。

1 學生練習

有一數列 $<a_n>$，$a_n = n^2 + 2n$，試解出其前三項，及第十項。

【代碼】a52a01m2

2 老師講解

已知一數列前 n 項和 $S_n = n^2 - 2n$，試求：

(1) S_5　(2) a_5　(3) $a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{10}$

2 學生練習

已知一數列前 n 項和 $S_n = 2n^2 + n$，試求：

(1) S_8　(2) a_8　(3) $a_{10} + a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20}$

【代碼】a52a01m3

(4) Σ 的運算法則：

① $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

② $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

③ $\sum_{k=1}^{n} (c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$

④ $\sum_{k=1}^{n} c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n\text{ 項}} = n \cdot c$

3 老師講解

試求下列各式之值：(1) $\sum_{k=2}^{5} (2k-1)$ (2) $\sum_{k=1}^{10} 3$

3 學生練習

試求下列各式之值：(1) $\sum_{k=3}^{5} (k^2+1)$ (2) $\sum_{k=3}^{9} 5$

【代碼】a52a02m2

4 老師講解

設 $\sum_{k=1}^{12} a_k = 20$，$\sum_{k=1}^{14} b_k = 18$，$a_{13} = 3$，$b_{14} = 4$

試求 $\sum_{k=1}^{13} (3a_k - 2b_k + 5)$ 之值。

4 學生練習

設 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 25$，$\sum_{k=1}^{11} b_k = 15$，$a_{11} = 3$，

試求 $\sum_{k=1}^{11} (a_k - 2b_k + 1)$ 之值。

【代碼】a52b01m2

5 老師講解

若 $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=n^2-75$，試求 $\sum_{i=10}^{30}a_i$ 之值。

5 學生練習

若 $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i=n^2-19$，試求 $\sum_{i=5}^{20}a_i$ 之值。

【代碼】a52b02m2

(5) Σ 的常用公式：

① $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

② $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③ $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$

④ $\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2})$

6 老師講解

試求級數 $\sum_{k=8}^{15}k^2$ 之和。

6 學生練習

試求級數 $\sum_{k=10}^{20}k^2$ 之和。

【代碼】a52a03m2

7 老師講解

試求下列各級數之和。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{9\cdot 10}$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{19\cdot 21}$

7 學生練習

試求下列各級數之和。

(1) $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{99\times 100}$

(2) $\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\cdots+\dfrac{1}{18\cdot 20}$

【代碼】a52a03m3

2. 等差數列與等差級數：

(1) 數列$\langle a_n \rangle$中，若$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=d$，則稱此數列為等差數列，

d稱為公差。此時$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$稱為等差級數

(2) 常用公式：

① $a_n=a_1+(n-1)d$

② $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$

③ a、b、c成$A.P.$，則$2b=a+c$

8 老師講解

一等差數列的首項爲3，公差爲5，求第十項爲何？

8 學生練習

一等差數列的首項爲5，第15項爲47，求此數列之公差。

【代碼】a51a01m2

9 老師講解

等差數列第3項爲10，第15項爲46，求第23項。

9 學生練習

已知一等差數列之第5項爲13，第11項爲37，求第16項。

【代碼】a51a01m3

10 老師講解

在-1與29之間插入9個數字，使其成等差數列，求此9個數之和。

10 學生練習

在-5與27之間插11個數字，使其成等差數列，求此11個數之和。

【代碼】a51a02m2

11 老師講解

試求140到250之間的整數中，所有3的倍數總和。

11 學生練習

試求20到200之間的整數中，所有7的倍數總和。

【代碼】a51b01m2

12 老師講解

設等差級數之首項為5，公差為2，和為117，求此級數的項數。

12 學生練習

等差數列之首項為10，公差為5，和為220，求此級數的項數。

【代碼】a51a02m3

13 老師講解

有一等差級數，第5項為88，第8項為79，試求此級數總和最大值為多少？

13 學生練習

數列 $< a_k >$ 為一等差數列，已知 $a_7 = 75$，$a_{11} = 59$，若 S_n 表此數列的前 n 項總和，試求 S_n 的最大值。

【代碼】a51b02m2

【學生練習答案】

1. $a_1 = 3$，$a_2 = 8$，$a_3 = 15$，$a_{10} = 120$		2. (1) 136　(2) 31　(3) 649	
3. (1) 53　(2) 35	4. 9	5. 384	6. 2585
7. (1) $\frac{99}{100}$　(2) $\frac{9}{40}$	8. 3	9. 57	10. 121
11. 2821	12. 8	13. 1275	

回家功課

( ) 1. 設一數列為 1，$\frac{\sqrt{2}}{4}$，$\frac{\sqrt{3}}{9}$，…，$\frac{\sqrt{n}}{n^2}$，…，即 $a_n=\frac{\sqrt{n}}{n^2}$，則 $a_4+a_9=$ 代碼：a52201m1

(A) $\frac{19}{216}$ (B) $\frac{25}{216}$ (C) $\frac{35}{216}$ (D) $\frac{13}{216}$ 。

( ) 2. 求 $10^2+11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2$ 的總和值為 代碼：a52210m1

(A) 3600 (B) 2585 (C) 3850 (D) 2520 。

( ) 3. 求 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}$ 的值等於 代碼：a54202m1

(A) $\frac{7}{11}$ (B) $\frac{19}{22}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{10}{11}$ 。

( ) 4. 設 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$，則 $\sum_{x=1}^{35}\frac{1}{f(x)}=$ 代碼：a54205m1

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 。

( ) 5. 設 $a_1,a_2,...,a_n$ 為一 n 項等差數列，若第 9 項為 58 且第 15 項為 100，則 674 為等差數列的第幾項？ (A) 94 (B) 95 (C) 96 (D) 97 。 代碼：a51097s1

( ) 6. 等差級數共有 25 項，公差為 $-\frac{3}{4}$，又知第 17 項為 21，則此等差級數的和為何？ (A) 550 (B) 600 (C) 625 (D) 650 。 代碼：a51096s1

( ) 7. 試求 140 到 250 之間的整數中，所有 3 的倍數總和為 代碼：a51b01m1

(A) 7215 (B) 7313 (C) 7445 (D) 7555 。

( ) 8. 若數列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 的第 n 項 $a_n=\frac{2n}{3}$，則 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$ 之值為何？ (A) 106 (B) $\frac{320}{3}$ (C) $\frac{520}{3}$ (D) 140 。 代碼：a51098s1

( ) 9. 一等差級數，前 n 項和 $S_n=5n^2-3n$，則 $a_{30}=$ 代碼：a51204m1

(A) 218 (B) 242 (C) 272 (D) 292 。

( ) 10. 求 $\sum_{k=1}^{30}(3k-2)=$？ (A) 1320 (B) 1325 (C) 1330 (D) 1335 。 代碼：a52099s1

( ) 11. 若有三個連續正整數，其平方和為 302，則三數之積為 代碼：a51088z2

(A) 900 (B) 990 (C) 800 (D) 890 。

答案：CBDBD BADDD B

主題二　等比數列與等比級數

1. 等比數列與等比級數：

(1) 數列 $<a_n>$ 中，若 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=r$ ，則稱此數列為等比數列，

r 稱為公比。此時 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 稱為等比級數

(2) 常用公式：

① $a_n=a_1r^{n-1}$（r 為公比)　② $S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$　③若 a 、 b 、 c 成 $G.P.$，則 $b^2=ac$

1 老師講解

設一等比數列，首項爲 10，公比爲 2，試求：　(1)第十項　(2)前十項總和

1 學生練習

若等比數列之首項爲 64，公比爲 $-\frac{1}{2}$，試求第五項。

【代碼】a51a03m2

2 老師講解

設一等比數列第 3 項爲 $\frac{1}{27}$，第 6 項爲 1，試求第 10 項。

2 學生練習

設一等比數列第 5 項爲 7，第 8 項爲 -56，試求第 12 項。

【代碼】a51a03m3

3 老師講解

在3與48之間插入3個正數，使其成等比數列，求此三數爲何？

3 學生練習

在128與4之間插入4個數，使其成等比數列，求插入的第3個數。

【代碼】a51a04m2

4 老師講解

已知一等比級數之首項爲3、公比爲-2、總和爲-255，求此級數之項數。

4 學生練習

已知一等比級數之首項6、公比爲2、總和爲378，求此級數之項數。

【代碼】a51a04m3

5 老師講解

設一數列$16,4,a,b$，其中前三項成等差，後三項成等比，求$a+b$之值。

5 學生練習

設一數列$9,-3,a,b$，其中前三項成等比，後三項成等差，求$a+b$之值。

【代碼】a51a04m4

6 老師講解

設四正數 a,b,c,d 成等比數列，且 $a+b=12$，$c+d=108$，試求首項與公比。

6 學生練習

設四正數 a,b,c,d 成等比數列，且 $a+b=9$，$c+d=36$，求此數列公比。

【代碼】a51b03m2

7 老師講解

設一等差數列，首10項的和為50，首20項的和為200，則求首30項之總和。

7 學生練習

一等比級數，若 $S_{10}=12$，$S_{20}=72$，求 $S_{90}=$______。

【代碼】f41235m1

【加強題】

1. 首項爲 7，末項爲 448 的等比級數，其總和爲 889，求項數爲_______。

2. 設一等比數列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1+a_2+a_3=26$ 且 $a_1+a_3+a_5=182$，求其公比 $r=$______。

3. 已知 $\log 1.1=0.0414$，$\log 3=0.4771$，若本金爲 10000 元，年利率 10%，一年一期複利計算，則至少須幾年，本利和始大於 30000 元？ 【代碼】a51b04m1

【學生練習答案】

1. 4	2. -896	3. 16	4. 6
5. 6	6. 2	7. $3(5^9-1)$	

回家功課

( ) 1. 已知一等比數列$\langle b_n \rangle$，其中$b_3 = 2$，$b_7 = 10$。試問$b_{11} =$？
(A) 20 (B) 50 (C) 100 (D) 200 。
代碼：a51103p1

( ) 2. 設一等比級數的首項為$\frac{1}{4}$，公比為-1，則此等比級數前81項的總和為何？
(A) $(\frac{1}{4})^{81}$ (B) $(\frac{1}{4})^{80}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$ 。
代碼：a51104p2

( ) 3. 若一等比級數的首項為3，公比為4，和為4095，則此級數共有多少項？
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 。
代碼：a51093s2

( ) 4. 設a, b, c, d四正數成等比數列，若$ab = \frac{cd}{81}$，則此數列的公比為何？
(A) 2 (B) 3 (C) 9 (D) 81 。
代碼：a51094s1

( ) 5. 一等比級數共7項，已知前二項和為2，第二項與第三項的和為-4，則此級數的總和為
(A) 86 (B) 68 (C) -86 (D) -68 。
代碼：a51225m1

答案：BCBBC

歷屆試題

(　　) 1. 設一等差數列為$5,12,19,\cdots$，則第101項為何？ (A) 695　(B) 698　(C) 700　(D) 705。	代碼：a51100s1 (100 年統測 B)
(　　) 2. 設某人跑10公里路程，第一公里以5分鐘完成，第二公里以5分15秒完成，第三公里以5分30秒完成，依此類推，即全程的每一公里以此等差數列的時間完成，則總共需花多少時間？ (A) 58分45秒　(B) 59分15秒　(C) 60分45秒　(D) 61分15秒。	代碼：a51100s2 (100 年統測 B)
(　　) 3. 已知數列$a_k=3k-4$，$k=1,2,3,\ldots,100$，則下列敘述何者正確？ (A)此數列為等差數列，公差為-4　(B) 95為此數列的第34項　(C) $\sum_{k=1}^{100}(3k-4)=3\sum_{k=1}^{100}k-4$　(D) $a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}=85$。	代碼：a52101s1 (101 年統測 B)
(　　) 4. 若兩數列$2,2a,18$及$a+4,2,a+7$都是等比數列，則下列何者正確？ (A) $-6<a<-4$　(B) $-4<a<-2$　(C) $2<a<4$　(D) $4<a<6$。	代碼：a51101k1 (101 年統測 C)
(　　) 5. 已知$\sum_{k=1}^{100}a_k=205$、$\sum_{k=1}^{100}b_k=26$，求$\sum_{k=1}^{100}(\frac{a_k}{5}-\frac{b_k}{2}+1)$之值？ (A) 29　(B) 68　(C) 80　(D) 128。	代碼：a52102s1 (102 年統測 B)
(　　) 6. 求102到2013之間個位數字為7的正整數共有幾個？ (A) 190　(B) 191　(C) 192　(D) 193。	代碼：a51102k1 (102 年統測 C)
(　　) 7. 設一等比級數的第三項為4，公比為$-\frac{1}{3}$，前n項和為$\frac{6560}{243}$，則n之值為何？ (A) 7　(B) 8　(C) 9　(D) 10。	代碼：a51103k1 (103 年統測 C)
(　　) 8. 設a、b、c三個數均為正實數，且已知$a+c=36$，若a、b、12三數成等差數列，且2、b、c三數成等比數列，則下列敘述何者<u>有誤</u>？ (A) $b+c=32$　(B) $a+b=12$　(C) $b^2=2c$　(D) $2b=a+12$。	代碼：a51103k2 (103 年統測 C)
(　　) 9. 已知一等差數列之第3項為8，第7項為20，則該等差數列之第32項為何？ (A) 93　(B) 95　(C) 96　(D) 98。	代碼：a51104s1 (104 年統測 B)
(　　) 10. 已知四個正數a,b,c,d為一等比數列，若$a+b=20$，$a+b+c+d=65$，則$a=$？ (A) 5　(B) 6　(C) 7　(D) 8。	代碼：a51104k1 (104 年統測 C)
(　　) 11. 某細菌每30分鐘分裂一次，即由1個變成2個，則1個細菌經過6小時後，分裂成多少個？ (A) 1024　(B) 2048　(C) 4096　(D) 8192。	代碼：a51105s1 (105 年統測 B)

( ) 12. 已知$S_n=1\frac{1}{1}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+\cdots+(n+\frac{1}{2^{n-1}})$，則$S_{10}$之值爲何？
(A)$56\frac{511}{512}$ (B)$56\frac{1023}{1024}$ (C)$57\frac{511}{512}$ (D)$57\frac{1023}{1024}$。

代碼：a51105s2
(105 年統測 B)

( ) 13. 設a、b、c、d、e、f六數成等比數列，已知$a+c+e=168$，$b+d+f=84$，則d之值爲何？ (A)6 (B)9 (C)16 (D)32。

代碼：a51105k1
(105 年統測 C)

( ) 14. 若a爲正整數，且1、a、$2a$爲等比數列，則$a^2+1=$？
(A)1 (B)2 (C)5 (D)10。

代碼：a51106s1
(106 年統測 B)

( ) 15. 設a、b、c三數成等比數列，且滿足$a+b+c=9$及$a^2+b^2+c^2=189$，則等比中項$b=$？ (A)-6 (B)-2 (C)$\frac{1}{2}$ (D)6。

代碼：a51106k1
(106 年統測 C)

( ) 16. 若一等差數列的第10項爲首項的4倍，且首項不爲0，則該數列的第6項爲第2項的幾倍? (A)2 (B)3 (C)4 (D)5。

代碼：a51107s1
(107 年統測 B)

( ) 17. $\sum_{n=1}^{10}(2^n+3n+2)=$? (A)1268 (B)1298 (C)2017 (D)2231。

代碼：a52107k1
(107 年統測 C)

( ) 18. 已知$\{a_n\}$爲等差數列且滿足$a_1>0$、$a_5=3a_{12}$。則當n爲多少時，a_n開始爲負數? (A)14 (B)15 (C)16 (D)17。

代碼：a51108k1
(108 年統測 C)

( ) 19. 某部以“尋寶”爲主題的電影中，男主角進到第二道關卡時看到了一扇巨大的鐵門，門邊有100個按鈕，每個按鈕都有一個數字，分別是從1到100。牆上有一個過關提示，上面印著：“有一個等差數列，其第11項和第16項分別爲31和56，按下該數列第20項數字的按鈕，鐵門就會打開”，則按下哪一個數字的按鈕就會開門？
(A)65 (B)76 (C)83 (D)99 。

代碼：a51109s1
(109 年統測 B)

( ) 20. 某棒球投手自4月1日開始每天練投，他每日投球爲等差數列。若4月5日投球數爲41個，4月13日爲73個，則他4月份有幾天投球數超過100個？ (A)10 (B)11 (C)12 (D)13 。

代碼：a51109k1
(109 年統測 C)

( ) 21. 保險公司推出躉繳型保單（即於一開始存入一固定本金），且宣告年利率爲3%的複利，每年計算一次。若某人於20歲時，花10萬元購買此保單，則當保單價值達20萬元時，某人約幾歲？($\log_{10}1.03=0.0128$, $\log_{10}1.3=0.1139$, $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$)
(A)24 (B)34 (C)44 (D)54 。

代碼：a51109k2
(109 年統測 C)

(　　) 22. 若無窮級數為 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}$ ，則前 5 項之和為何？
(A)35　(B)40　(C)45　(D)50　。

代碼：110tcb20
(110 年統測 B)

(　　) 23. 若 $a=\sum_{m=1}^{7}\frac{m-2}{2m-1}$ 、$b=\sum_{k=0}^{6}\frac{k-1}{2k+1}$ 、$c=\sum_{i=3}^{8}\frac{i-4}{2i-5}$ ，
則下列敘述何者正確？
(A) $b>a>c$　(B) $c>a>b$　(C) $c>a=b$　(D) $a=b>c$　。

代碼：110tcc06
(110 年統測 C)

(　　) 24. 已知等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項為 -1，公差為 3 ，試求等差級數
$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{21}=$？　(A)154　(B)319　(C)580　(D)609　。

代碼：111tcb02
(111 年統測 B)

(　　) 25. 已知等比數列 $\langle a_k\rangle$ 的首項 $a_1=2$，公比 $r=3$。若前 n 項和大於 2022 ，則滿足條件的最小正整數 $n=$？
(A)5　(B)7　(C)9　(D)11　。

代碼：111tcc02
(111 年統測 C)

答案：DDDBD　BBABD　CACCA　ADCBB　CADBB

綜合練習

( ) 1. 設 p_n 表第 n 個質數，即 $p_1=2,p_2=3,p_3=5,\ldots$。若$\langle a_n\rangle$爲一數列且 $a_n=\dfrac{p_{2n-1}}{P_{2n}}$，則 $a_5=$？ (A)$\dfrac{23}{29}$ (B)$\dfrac{19}{23}$ (C)$\dfrac{17}{19}$ (D)$\dfrac{13}{17}$。 代碼：a52095s1

( ) 2. 已知五個數80，u，v，w，405成等差數列，則$|w-u|=$？ (A)$\dfrac{325}{4}$ (B)90 (C)150 (D)$\dfrac{325}{2}$。 代碼：a51090s1

( ) 3. 若一等差數列的首項爲-20，第7項爲-11，則此數列從第幾項開始爲正數? (A)12 (B)13 (C)14 (D)15。 代碼：a51092s1

( ) 4. 一個等差級數前十項之和爲10，而第十項爲5，則公差是 (A)1 (B)$\dfrac{8}{9}$ (C)$\dfrac{9}{8}$ (D)$-\dfrac{8}{9}$。 代碼：a51087g1

( ) 5. 某集會場爲前窄後寬形狀。已知第一排有20位、第二排有24位、…(即每一後排皆較前排多4位)，且恰能提供504人座位。請問此集會場共有幾排座位？ (A)10 (B)11 (C)12 (D)13。 代碼：a51104p1

( ) 6. 求級數$7+8-9+10+11-12+\cdots$到第99項的和，其中級數每一項的絕對值成等差數列且3的倍數項爲負數 (A)1778 (B)1782 (C)1888 (D)1906。 代碼：a51102w1

( ) 7. 設 p、q 爲二相異正整數，且 a_n 爲一等差數列第 n 項。若 $a_p=q$，$a_q=p$，則 $a_{p+q}=$？ (A)0 (B)p (C)q (D)$p+q$。 代碼：a51098k1

( ) 8. 若 a,b,c 三數成等差數列，三數的等差中項爲8，且三數的平方和爲242，若公差爲正數，則公差爲 (A)5 (B)4 (C)3 (D)2。 代碼：a51228m1

( ) 9. 試求級數$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+19^2-20^2+21^2$之總和？ (A)201 (B)211 (C)221 (D)231。 代碼：a51095s1

( ) 10. 設$1+2+2^2+\cdots\cdots+2^n=4095$，則$n=$ (A)10 (B)11 (C)12 (D)13。 代碼：a51219m1

( ) 11. 設四正數 a,b,c,d 成等比數列，且 $a<b<c<d$，$a+d=28$，$b+c=12$，試求其公比之值爲何？ (A)$\dfrac{1}{4}$ (B)$\dfrac{1}{3}$ (C)3 (D) 4。 代碼：a51091s1

( ) 12. 已知一等比數列皆爲正數，且第三項爲18，第五項爲$40\frac{1}{2}$，則其第四項值爲 (A) 21 (B) 24 (C) 27 (D) 30。 代碼：a51223m1

( ) 13. 設七個實數$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$成等比數列，公比爲$r$。若$a_1+a_2=2$且$a_6+a_7=486$，則$r=$？ (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 9。 代碼：a51104w1

( ) 14. 設x_1、x_2、x_3、x_4爲等差數列，其公差爲d，$d>0$。若x_2爲x_1與x_4的等比中項，且$x_3=27$，則$x_2=$? (A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 24。 代碼：a51105w2

( ) 15. 設有四個正整數的數列，前三項成等比數列，後三項成等差數列，又首末兩項之和爲21，中間兩項之和爲18，則此四數之最大值爲何？(A) 12 (B) 16 (C) 18 (D) 19。 代碼：f41230m1

答案：ADDBC BAADB CCABC

單元 7　排列與組合

主題一　計數原理

如果做某事有 k 個步驟，而第1個步驟有 m_1 個方法可做，第2個步驟有 m_2 個方法可做…，第 k 個步驟有 m_k 個方法可做。

1. 加法原理：

若能選擇第1個或第2個或第3個或…或第 k 個步驟，

則完成這件事的方法共有 $m_1+m_2+\cdots\cdots+m_k$ 種。

2. 乘法原理：

若必須作第1個且第2個且第3個且…且第 k 個步驟，

則完成這件事的方法共有 $m_1\times m_2\times\cdots\cdots\times m_k$ 種。

1 老師講解

超市上有3種芒果，5種芭樂，

(1) 小明只買一種水果，求買法有幾種？

(2) 小明各買一種水果，求買法有幾種？

1 學生練習

超市有賣4種威士忌，5種葡萄酒，

(1) 今只買一瓶酒，有幾種不同買法？

(2) 今每種酒各買一瓶，求有幾種買法？

【代碼】p11a01m2

2 老師講解

A 地至 B 地有三條路，B 地至 C 地有二條路可選，問今小明由 A 地出發經 B 地至 C 地，走法有幾種？

2 學生練習

設台北到台中有5條路線，台中到高雄有2條路線，台北到高雄有3條路線，試問從台北出發到高雄有幾種不同走法？

【代碼】p11a01m3

3 老師講解

將15元購買1元、2元、5元的郵票，且15元全部用完，則一共有幾種購買方法？

3 學生練習

將15元購買1元、2元、5元的郵票，若每種郵票至少買一張且15元全部用完，則一共有幾種購買方法？

【代碼】p11a02m2

4 老師講解

(1) 360的正因數有多少個？

(2) 2520的正因數有 a 個，可以被12整除的有 b 個，不可以被12整除的有 c 個，求 $a+b-c=$？

4 學生練習

2520的正因數中，不可以被30整除有幾個？

【代碼】p11b01m2

【學生練習答案】

1. (1) 9　(2) 20	2. 13	3. 6	4. 36

回家功課

(　　) 1. 餐飲部供應的菜色為肉 4 種、魚 3 種、蔬菜 5 種、甜點 2 種。有位客人要點肉、魚、蔬菜各 1 種，不點甜點。則這位客人有幾種點法？ 代碼：p11090w1
(A)0　(B)12　(C)20　(D)60　。

(　　) 2. 書架上有5冊不同的護理課本，3冊不同的數學課本，若某生欲由護理、數學課本中各選一冊，則共有多少種選法? 代碼：p11092w1
(A)8　(B)15　(C)125　(D)243　。

(　　) 3. 將50元兌換成10元硬幣或1元硬幣之組合，共有幾種兌換法？ 代碼：p11097w1
(A)6　(B)11　(C)20　(D)22　。

(　　) 4. 已知一正整數 $a=2^3\cdot 3^4\cdot 5^6$，求 a 的正因數個數為何？ 代碼：p11102p1
(A)100　(B)120　(C)140　(D)240　。

(　　) 5. 自然數37800的所有正因數中，無法被30除盡的有多少個？ 代碼：p11090s1
(A)18　(B)36　(C)60　(D)96　。

答案：DBACC

主題二　排列

1.直線排列：

(1) 定義：

①由 n 件相異物中，任選 r 件($n \geq r$)排成一列的排列總數記為 P^n_r

② $P^n_r = \dfrac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$ (但 $n \geq r$)

(2) 規定：

① $0!=1$　② $P^n_n = n!$　③ $P^n_0 = 1$

1 老師講解

求出下列各式之值：

(1) $5!$　(2) P^5_3　(3) P^8_2　(4) P^4_4　(5) P^4_0

1 學生練習

求出下列各式之值：

(1) $5!+6!$　(2) $0!+5!+P^6_2+P^5_3$

【代碼】p12a01m2

2 老師講解

(1) $P^{10}_r = 60P^9_{r-2}$，求 r 之值。

(2) $P^{n+2}_4 = 56P^n_2$，求 n 之值。

2 學生練習

(1) $2P^7_r = 3P^8_{r-1}$，求 r 之值。

(2) $3P^n_3 = 14P^{n+1}_2$，求 n 之值。

【代碼】p12a01m3

3 老師講解

求下列情況之方法：
(1) 甲乙丙丁四人坐一排四張椅子，
試問有幾種不同方法？
(2) 有一排6個座位的椅子，
甲乙丙三人坐，有幾種不同坐法？

3 學生練習

有六間廁所，甲乙丙三人上，
方法有幾種？

【代碼】p12a02m2

4 老師講解

求下列情況之方法：
(1) 若甲班全班有50人，今導師選派三人分別參加書法、作文、美術比賽，選法若干？
(2) 縱貫線火車有15個車站，每站之間要準備一種車票，往返以不同計，
則要準備多少種的單程車票？

4 學生練習

求下列情況之方法：
(1) 由全班前10名的同學中，今選三人當班長，副班長及學藝股長，選法若干？
(2) 某客運有20站，今甲生要收集各站到各站間的車票(往返以不同計)，
則他最少要收集幾張？

【代碼】p12a02m3

5 老師講解

甲、乙等7人排成一列，求下列之排法。
(1) 甲、乙、丙三人必相鄰
(2) 甲、乙、丙三人不相鄰

5 學生練習

甲、乙等六人排成一列，求下列之排法：
(1) 甲、乙兩人必須相鄰的方法有
(2) 甲、乙、丙相鄰，排法有幾種？
(3) 甲、乙、丙不相鄰，排法有幾種？

【代碼】p12a03m2

6 老師講解

設甲、乙、丙…等6人，求下列各排列數有幾種？
(1)全部排法
(2)甲排在首位
(3) 甲不排在首位
(4) 甲必排首位且乙必排尾位
(5) 甲不排首位且乙必排尾位

6 學生練習

設甲、乙、丙...等5人，求下列各排列數有幾種？
(1) 甲必排在首位
(2) 乙不排尾位
(3) 甲排首位且乙排尾位
(4) 甲不排首位且乙排尾位

【代碼】p12a04m2

7 老師講解

設甲、乙、丙…等6人，求下列各排列數有幾種？
(1) 甲必排首位或乙必排尾位
(2) 甲不排首位且乙不排尾位

7 學生練習

設甲、乙、丙...等5人，則甲不排首位且乙不排尾位的方法有幾種？

【代碼】p12b02m2

8 老師講解

以1、2、3、4、5、6六個數字任取4個不同數字組成四位數，共有幾個四位數？

8 學生練習

以1、2、3、4、5五個數字任取三個數字組成三位數，則有幾個奇數？

【代碼】p12a05m2

9 老師講解

以0、1、2、3、4、5六個數字不重複作成四位數？

(1) 共有幾個四位數？

(2) 求奇數有幾個？

(3) 求偶數有幾個？

(4) 求5的倍數有幾個？

9 學生練習

從0、1、2、3、4、5、6中任選4個數字不重複，作成四位數，則

(1) 偶數有幾個？

(2) 5的倍數有幾個？

【代碼】p12a05m3

2.不盡相異全取排列：

設 n 個物件可分成 k 類(每類之物均相同)，若第1類有 m_1 個，第2類有 m_2 個，……

第 k 類有 m_k 個，此時 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$，

則將此 n 物全部排成一列之排法有 $\dfrac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot\cdots\cdots m_k!}$ 種

10 老師講解

將下列數字"7758585"全取排列，則可排成幾個不同的數字？

10 學生練習

將 $aaabbbc$ 排列，則求全取排列數？

【代碼】p13a01m2

11 老師講解

將 $banana$ 重新排列，求：
(1) 三個 a 必相鄰的排法
(2) 任二個 a 皆不相鄰的方法

11 學生練習

將 $aabbbcd$ 重新排列，則求：
(1) 三個 b 完全相鄰的排法
(2) 三個 b 完全不相鄰的排法

【代碼】p13a02m2

12 老師講解

將 *TITANIC* 排成一列，
求 A 排首且 T 排末的方法？

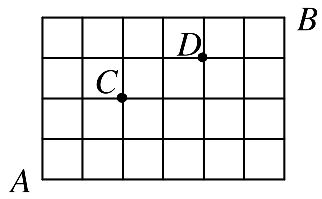
12 學生練習

將 *papaya* 排一列，則 a 必排首位，方法？

【代碼】p13a02m3

13 老師講解

如圖，設由 A 到 B 的街道，有直街 7 條，
橫街 5 條，則：
(1) 由 A 到 B 有幾種捷徑走法？
(2) 由 A 到 B ，必過 C 有幾種捷徑走法？
(3) 由 A 到 B ，不過 C 、 D 有幾種捷徑走法？



13 學生練習

棋盤式街道，橫街 5 條直街 6 條，
由一端走到最遠的另一端取捷徑，
則有幾種不同的走法？

【代碼】p13b01m2

3.重複排列：

(1) 定義：

由 n 種相異物中任取 r 個(可以重複選取)，排成一列之重複排列法有 n^r 種。

(2) 公式：

① n^r 中「接受的」個數當底數，「給予的」個數當指數

② n^r 中以物大為底(即物大者為底數，物小者為指數)

14 老師講解

求下列情況之方法有幾種？
(1) 三人搭二部車
(2) 三封信任意投入五個郵筒
(3) 五個不同的玩具，分給三人

14 學生練習

求下列情況之方法有幾種？
(1) 五人搭三輛公車
(2) 四個不同的玩具，分給三人
(3) 6 位旅客投宿二家旅社

【代碼】p14a01m2

15 老師講解

求下列情況之方法
(1) 5 種不同的酒倒入 4 個不同的杯子，每杯限倒一種酒，則倒法有幾種？
(2) 10 個選舉人，3 位候選人，採記名投票(沒有廢票)，則開票結果有幾種？

15 學生練習

2 種酒倒入 5 個不同的杯子，每杯限倒一種酒，則倒法有幾種？

【代碼】p14a02m2

16 老師講解

將六個不同口味的糖果分給甲、乙、丙三位小朋友，則：
(1) 甲沒有分到的方法有幾種？
(2) 甲恰得一個的方法有幾種？
(3) 甲至少一個的方法有幾種？

16 學生練習

將4支不同的粉筆分給甲、乙、丙三位學生，則甲至少拿一支的方法有幾種？

【代碼】p14a02m3

17 老師講解

有6旅客要搭3架小飛機觀光，但每架小飛機最多可載5個旅客，則有幾種觀光的方法？

17 學生練習

有5人要去秀姑巒溪泛舟，船家只有4台橡皮艇，且每台橡皮艇可搭載4人，則有幾種搭載方法？

【代碼】p14b01m2

【加強題】

1. 以0、1、2、3、4、5六個數字不重複作成三位數中大於240的有_______個。

2. 將0,0,0,5,5,6,6排成七位數，則：
   (1)可得_______個不同的七位數。
   (2)可得_______個偶數。

3. 試解下列各式：
   (1)將$(x+y+z)^6$展開，則x^3y^2z的係數為_______。
   (2)求$(2x-y+z)^7$展開中xy^3z^3項係數為________。

4. 從$aaabbc$六個字母中，任取三個字母，排成一列，方法有_______種。

【學生練習答案】

1. (1)840 (2)211	2. (1)5 (2)8	3. 120	4. (1)720 (2)380
5. (1)240 (2)144 (3)144		6. (1)24 (2)96 (3)6 (4)18	
7. 78	8. 36	9. (1)420 (2)220	10. 140
11. (1)60 (2)120	12. 30	13. 126	14. (1) 243 (2) 81 (3)64
15. $2^5=32$	16. 65	17. 1020	

回家功課

( ) 1. 某社團有社員13人，若從其中選出社長與副社長各一人，則共有多少種選法？
(A) 78 (B) 105 (C) 156 (D) 210 。
代碼：p12093w1

( ) 2. A、B、C、$\cdots G$ 七個字母排成一列，求 A、B 相鄰，但 C、D 不相鄰，共有幾種不同排法。 (A) 480 (B) 960 (C) 100 (D) 120 。
代碼：p12b01m1

( ) 3. 若6對夫婦排成一列，且每對夫婦必須相鄰，則共有幾種不同排法？
(A) $2\times6!$ (B) $(3!)^2\times2^6$ (C) $2\times(3!)^2\times2^6$ (D) $2^6\times6!$ 。
代碼：p12095s1

( ) 4. 4男3女排成一列，若男生之間不排女生，則共有多少種排法?
(A) $3!\times3!$ (B) $3!\times4!$ (C) $4!\times4!$ (D) $7!$ 。
代碼：p12092w1

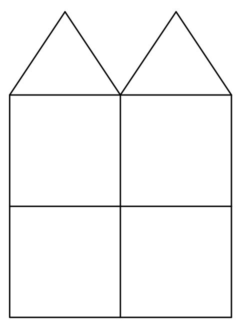
( ) 5. 自排成一列之8個坐位，甲、乙、丙、丁四人任選相連之四個座位而坐，坐法有多少種？
(A) 24 (B) 20 (C) 120 (D) 60 種 。
代碼：p12210m1

( ) 6. 甲、乙、丙、丁四個人組隊參加400公尺接力賽跑，每人跑100公尺。其中甲不願意跑最後一棒，試問總共可排出幾種接力順序？
(A) 3 (B) 9 (C) 18 (D) 24 。
代碼：p12091w1

( ) 7. 甲、乙等5人排成一列，甲不排首，且乙必排中的方法有
(A) 18種 (B) 36種 (C) 48種 (D) 72種 。
代碼：p12215m1

( ) 8. 三位數中，十位數是7，個位數字為偶數，共有幾個？
(A) 36 (B) 40 (C) 45 (D) 50 。
代碼：p12097s1

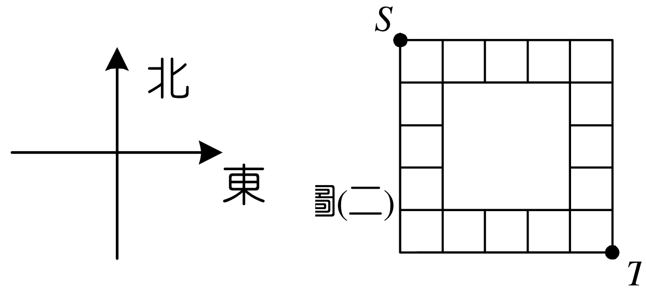
( ) 9. 可用7種不同顏色塗在右圖的6個格子內，若規定顏色不重複使用且同一格子僅塗滿同一色，則共可塗出幾種不同的著色樣式？
(A) C^7_6 (B) C^{12}_6 (C) P^7_6 (D) 6^7 。
代碼：p12096s1



( ) 10. 將『我為人人人人為我』八字重排，則四個『人』皆不相鄰的排法有幾種？
(A) 15 (B) 30 (C) 45 (D) 42 種 。
代碼：p13202m1

( ) 11. 將 *Pallmall* 一字中之字母重排，其中 a 不排首位，其排法共有幾種？
(A) 630 (B) 420 (C) 210 (D) 105 。
代碼：p13205m1

( ) 12. 有一個地區街道線段如圖(二)，現在甲君擬從點 S 走到點 T；如果規定甲君必須沿著街道向東或向南走，則會有多少種不同路線的走法？ 代碼：p13098s1
(A) 44
(B) 52
(C) 74
(D) 95 。



圖(二)

( ) 13. 某速食店之飲料區提供 4 種飲料。現有甲、乙、丙 3 人拿杯子到飲料區裝盛飲料，每人可任意選擇一種飲料，3 人的飲料可相同或不同，則 3 人裝盛的結果有多少種可能？ 代碼：p14099w1
(A) 64 (B) 27 (C) 12 (D) 7 。

( ) 14. 假設在招呼站有三輛計程車，每輛最多可搭乘 4 位客人，現招呼站來了 5 位要搭計程車的旅客，試問有幾種不同的載客方式？ 代碼：p14097s1
(A) 122 (B) 125 (C) 240 (D) 243 。

答案：CBDCC CACCB ABAC

主題三　組合

(1) 定義：由n個相異物中，任取r個組合(不排列，$n \ge r$)的總數記為C_r^n

(2) $C_r^n = \dfrac{P_r^n}{r!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$

(3) 性質：(1) $C_r^n = C_{n-r}^n$　(2) $C_n^n = 1$　(3) $C_0^n = 1$

(4) 巴斯卡定理：$C_r^n = C_r^{n-1} + C_{r-1}^{n-1}$

1　老師講解

求下列各式之值：

(1) C_3^8　(2) C_2^9　(3) C_7^9　(4) C_6^6　(5) C_0^5

1　學生練習

求$P_2^5 + C_2^5 + 5!$之值。

【代碼】p21a01m2

2　老師講解

試解下列各式之值：

(1) 已知$C_6^n = C_4^n$，求C_n^{12}之值。

(2) 已知$C_n^9 = C_{2n-3}^9$，求n之值。

2　學生練習

設$C_{m+1}^{10} = C_{2m}^{10}$，求$C_m^{11}$之值。

【代碼】p21a01m3

3 老師講解

求下列情況之方法：
(1) 老師將從10名學生中任選 3 名學生澆花、掃地、擦黑板，則有幾種方法？
(2) 老師將從10名學生中任選 3 名學生出公差，則有幾種方法？

3 學生練習

數學老師將從10名學生中任選2名學生參加比賽，則有幾種不同方法？

【代碼】p21a02m2

4 老師講解

求下列情況之方法：
(1) 數學週考，試題10題，任選5題作答，但前3題必答，則有幾種選法？
(2) 數學週考，試題10題，任選5題作答，但前3題必不答，則有幾種選法？

4 學生練習

某次考試，規定由十題中選五題，但前二題必須作答，此選題方法共有幾種？

【代碼】p21a02m3

5 老師講解

甲、乙等8人，求：
(1) 任選5人組成小組的方法有幾種？
(2) 任選5人必含甲的方法有幾種？
(3) 任選5人必含甲且排成一列的方法有幾種？
(4) 任選5人必含甲、乙且排成一列的方法有幾種？

5 學生練習

甲、乙、丙…等七人，任選五人作直線排列，求其中必含甲、乙的排列個數。

【代碼】p21a03m2

6 老師講解

設有5男4女，今任選4人，求：
(1) 有幾種不同選法？
(2) 恰有1女生的選法？
(3) 至少一女生的選法？
(4) 至少三女生的選法？

6 學生練習

設10人中，有女生7名，任選4人，
(1) 則至少有1名男生的方法有幾種？
(2) 則至少有2名男生的方法有幾種？

【代碼】p21b01m2

7 老師講解

平面上有相異10點，試求：
(1) 其中無三點共線，則可連成
①幾條直線？ ②幾個三角形？
(2) 其中有4點共線，其餘任三點皆不共線，則可連成
①幾條直線？ ②幾個三角形？

7 學生練習

平面上有相異11點，其中有4點共線，其餘任三點皆不共線，則可連成
(1) 幾條直線？
(2) 幾個三角形？

【代碼】p21b02m2

8 老師講解

設有一凸8邊形，求有幾條對角線？

8 學生練習

設有一凸11邊形，求有幾條對角線？

【代碼】p21b03m2

9 老師講解

求下列情況之方法有幾種？
(1) 有10個不同的書，
①分給甲4本、乙3本、丙3本
②依4、3、3分成三堆
(2) 有6個不同的書，
①平均分發到甲、乙、丙三人
②平均分成三堆
(3) 有6個不同的書，
①分給甲1本、乙2本、丙3本
②依1、2、3分成三堆

9 學生練習

求下列情況之方法有幾種？
(1) 有8個不同的書，
①分給甲3本、乙3本、丙2本
②依3、3、2分成三堆
(2) 有6個不同的書，
①平均分發到甲、乙二人
②平均分成二堆
【代碼】p21b04m2

【學生練習答案】

1. 150	2. 165,11	3. 45	4. 56
5. 1200	6. (1)175 (2)70	7. (1)50 (2)161	8. 44
9. (1)560,280 (2)20,10			

回家功課

( ) 1. 設 P_m^n 及 C_m^n 分別表示從 n 個相異物取 m 個的排列數與組合數，若 $P_5^{n+2}=120C_4^{n+2}$ ，則 $n=$？
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 。
代碼：p21094s1

( ) 2. 設有 6 個足球隊參加比賽，若任意兩隊都互相比賽一場次，則共有多少場次的比賽？
(A) 24 (B) 20 (C) 15 (D) 10 。
代碼：p21095s1

( ) 3. 一副撲克牌中有黑桃、紅心、方塊、梅花 4 種花色，每種各 13 張，共有 52 張，現自其中任取 5 張，試問 5 張均為同一花色的情形有多少種？
(A) 4190 (B) 5148 (C) 4210 (D) 2320 。
代碼：p21210m1

( ) 4. 有一籃球隊共有 12 位選手，其前鋒、中鋒、後衛的人數分別為 4 人、3 人、5 人，現在要選 5 位選手上場比賽，一般籃球比賽中，每隊的前鋒、中鋒、後衛人數分別為 2 人、1 人、2 人，問共有幾種<u>不同</u>選法？
(A) 120 (B) 154 (C) 180 (D) 225 。
代碼：p21099k1

( ) 5. 設一平面上有 10 條直線，其中 4 條互相平行，但無三線共點及其他平行情形，則此 10 直線可構成的三角形共有
(A) 80 (B) 50 (C) 40 (D) 30 個 。
代碼：p21208m1

( ) 6. 將 6 本不同的書分別放在 3 個不同的架子上，若每個架子放 2 本，則共有幾種放法？
(A) 20 (B) 60 (C) 90 (D) 120 。
代碼：p21097w1

( ) 7. 某樂透彩號碼是由 1 到 20 號所組成，每期任意選出 6 個相異號碼為中獎號碼。若某人從該 20 個樂透彩號碼中，任意選取 6 個相異號碼，則其中剛好有 5 個號碼為中獎號碼的組合共有幾種?
(A) 5 (B) 14 (C) 84 (D) 90 。
代碼：p21094w2

( ) 8. 假設在 10 件產品中，有 3 件是不良品，由產品中隨機抽取 5 件，其中至少有 2 件不良品的取法，共有
(A) 126 (B) 127 (C) 128 (D) 129 種 。
代碼：p21215m1

( ) 9. 由 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 任選相異兩個數，試求其和為偶數的選法？
(A) 25 (B) 16 (C) 72 (D) 35 。
代碼：p21216m1

( ) 10. 六對夫婦中，任選出 4 人，其中恰有一對夫婦同時當選的情形有幾種方法？
(A) 120 (B) 60 (C) 270 (D) 240 種 。
代碼：p21218m1

答案：DCBCA CCABD

歷屆試題

( ) 1. 甲、乙兩人到速食店購買漢堡。若有四種漢堡可供選擇，且兩人各購買一種，則兩人購買不同漢堡的可能情形有多少種？ (A)4 (B)8 (C)12 (D)16。 代碼：p11100s1 (100 年統測 B)

( ) 2. 小明、小華與其他兩位同學負責打掃教室。若兩人一組，則小明與小華不同組的分組結果有多少種？ (A)1 (B)2 (C)3 (D)4。 代碼：p21100s1 (100 年統測 B)

( ) 3. 設三位數的百位數字為 a、十位數字為 b、個位數字為 c。若 a、c 為偶數，b 為奇數，且 $a>b>c$，則滿足這些條件的三位數共有多少個？ (A)5 (B)10 (C)15 (D)20。 代碼：p12100k2 (100 年統測 C)

( ) 4. 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚七人排成一列。若甲、乙、丙、丁四人必排在此列的最前面四位，且甲、乙不相鄰，則此七人共有多少種排法？ (A)36 (B)72 (C)144 (D)840。 代碼：p12100k1 (100 年統測 C)

( ) 5. 將 $mhchcm$ 這些英文字母任意排列，問共有幾種不同的排列方法？ (A)90 (B)60 (C)45 (D)30。 代碼：p13101s1 (101 年統測 B)

( ) 6. 將 0、0、2、2、9、9、9、9 八個數字全取，排成一列，可得幾個不同的八位數？ (A)155 (B)210 (C)315 (D)420。 代碼：p13101k1 (101 年統測 C)

( ) 7. 由甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛八個人中選取 5 人組成一個委員會，且甲、乙、丙、丁四人中至少有 2 人為委員，則組成此委員會的方法數共有幾種？ (A)48 (B)50 (C)52 (D)54。 代碼：p21101k1 (101 年統測 C)

( ) 8. 求正二十九邊形的對角線共有幾條？ (A)337 (B)357 (C)377 (D)397。 代碼：p21102s1 (102 年統測 B)

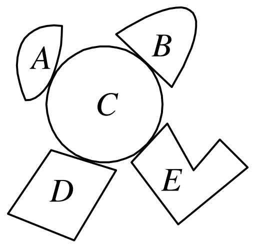
( ) 9. 求正整數 $a=2^5\cdot 3^7\cdot 5^{11}$ 的所有正因數中，8 的倍數有幾個？ (A)576 (B)288 (C)144 (D)96。 代碼：p11103s1 (103 年統測 B)

( ) 10. 將 0、1、2、3、5 五個數字全取，排成一列，可得 4 的倍數的五位數共有多少個？(註：凡是末兩位數是 4 的倍數者即為 4 的倍數) (A)18 (B)20 (C)24 (D)36。 代碼：p12103k1 (103 年統測 C)

(　　) 11. 甲、乙、丙三人至速食店用餐，若該速食店僅提供三種套餐，且甲、乙、丙每人皆點一套餐，則此三人會有多少種點餐方式？ (A) 6 (B) 9 (C) 18 (D) 27。	代碼：p14104s1 (104 年統測 B)
(　　) 12. 某大賣場一天共有早班、中班、晚班三個值班時段，而每一值班時段皆需二人值班。若某天要安排六名員工值班且每人恰值班一次，則共有多少種排班方式？ (A) 45 (B) 60 (C) 75 (D) 90。	代碼：p12104s1 (104 年統測 B)
(　　) 13. 有一樂團計畫至甲、乙兩國巡迴表演。甲國有三個城市要去表演，乙國有四個城市要去表演。若先完成甲國的演出後，再到乙國完成演出，則巡迴路線的規劃有多少種可能？ (A) 7 (B) 12 (C) 36 (D) 144。	代碼：p12105s1 (105 年統測 B)
(　　) 14. 從 $\{1,3,5,7,9\}$ 中選出三個相異數字以形成一個三位數，則所有可能形成的三位數的個數爲何？ (A) 20 (B) 60 (C) 90 (D) 120。	代碼：p12105s2 (105 年統測 B)
(　　) 15. 某自助餐提供 80 元的便當，便當中除了白米飯之外，還包含一種主菜以及三種不同的配菜。若今日提供的主菜有雞腿、排骨、魚排 3 種，另有 8 種不同的配菜，則共可搭配出多少種不同組合的 80 元便當？ (A) 59 (B) 112 (C) 168 (D) 210。	代碼：p21106s1 (106 年統測 B)
(　　) 16. 某飲料店有 5 爲假日工讀生，工作時間有週六的早班與晚班、週日的早班與晚班等 4 個不同時段。一個時段排兩位工讀生上班，如果規定同一人不可以連續排班，至少要隔一個時段上班，則共有幾種排班方式？ (A) 81 (B) 270 (C) 900 (D) 1000。	代碼：p21106s2 (106 年統測 B)
(　　) 17. 將繞口令「四十個十四　十四個四十」中的文字全取排成一列，且其中四個「十」須相鄰排在一起，其排法有幾種？ (A) 70 (B) 105 (C) 135 (D) 120。	代碼：p13106k1 (106 年統測 C)
(　　) 18. 某人想在自家後院的長條空地種植一列菜苗，共有高麗菜 5 株，萵苣 4 株，菠菜 4 株。若他決定在每兩株高麗菜之間任意種植萵苣或菠菜共兩株，則種植的排列方法有幾種? (A) $\dfrac{8!}{4!4!}$ (B) 2^8 (C) $\dfrac{13!}{4!4!5!}$ (D) 5!4!4!。	代碼：p13107s1 (107 年統測 B)
(　　) 19. 某青年創業開餐廳，擬設計一份有 5 種菜色的菜單。若在原始構思的 7 種菜色中有 2 種爲必選，則有幾種不同的菜單? (A) 6 (B) 10 (C) 21 (D) 35。	代碼：p21107s1 (107 年統測 B)

( ) 20. 若從11件相異物中分別取出5、6、7件的組合數分別為A、B、C，而從12件相異物中取出6件的組合數為D，則下列何者正確? 代碼：p21107k1 (107年統測C)
(A) $B>A$ (B) $C>A$ (C) $D=A+B$ (D) $D=B+C$。

( ) 21. 如右圖所示，使用8種不同顏色塗在圖中標號A、B、C、D、E的5個格子內，顏色不可重複使用，若規定同一格子僅塗同一顏色，則共可塗出幾種不同的著色樣式? 代碼：p12108s1 (108年統測B)



(A) P_5^8 (B) C_5^8 (C) 5^6 (D) 6^5。

( ) 22. 已知向量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$及$\vec{d}$分別自$(1,0)$、$(0,1)$或$(1,1)$三向量中選取出來，例如，$\vec{a}=(1,0)$、$\vec{b}=(0,1)$、$\vec{c}=(0,1)$、$\vec{d}=(1,1)$，或$\vec{a}=(1,1)$、$\vec{b}=(0,1)$、$\vec{c}=(1,0)$、$\vec{d}=(1,0)$等等皆屬可能的選取情形。 代碼：a71108s1 (108年統測B)
若計算$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$所有可能的情形後，則可得到幾種不同的結果?
(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 3^4。

( ) 23. 某次啦啦隊競賽規定，每隊組隊人數8人且男、女生均至少2人。某班共有4名男生與6名女生想參加啦啦隊競賽，若由此10人中依規定選出8人組隊，則共有多少種組隊方式? 代碼：p21108k1 (108年統測C)
(A) 45 (B) 60 (C) 75 (D) 90。

( ) 24. 下列何選項的值為組合數C_3^8? 代碼：p23108k1 (108年統測C)
(A)「由8人中選3人分別擔任班長、副班長與康樂股長」所有的可能情形
(B) $(x-1)^8$展開式中，x^3項的係數
(C)「$AAABBBBB$共8個字母任意排列」所有的可能情形
(D)「8枝相同的筆全部分給3人且每人至少得到1枝筆」所有的可能情形。

( ) 25. 某一個電腦的過關遊戲中，從據點A到據點C必須經過據點B。若從據點A到據點B可以選擇的路徑有2條，從據點B到據點C可以選擇的路徑有3條，則從據點A到據點C有幾種走法？ 代碼：p11109s1 (109 年統測 B)
(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 9 。

( ) 26. A學校桌球校隊有甲、乙、丙、丁、戊五位選手，有一天A學校桌球校隊與他校進行友誼賽。由於時間關係，只進行單打、雙打比賽各一場，且兩場比賽同時進行。若任意推出選手參賽(不考慮默契等因素)，則A學校可推出的參賽選手名單有多少種？ 代碼：p21109s1 (109 年統測 B)
(A) 12 (B) 30 (C) 125 (D) 243 。

(　　) 27. 在一次立法委員選舉中，每位選民須投區域立委與不分區政黨兩種選票，且每種選票均只能圈選一位(個)，否則視爲廢票。已知某甲的戶籍地有 6 位區域立委候選人，而全國共有 14 個政黨可選擇。若某甲決定去投票，且兩種選票均不投廢票，試問某甲有多少種的投票組合？
(A)6　(B)14　(C)20　(D)84　。
代碼：p21109k1
(109 年統測 C)

(　　) 28. 某款電玩在開始闖關前需進行設定：第一個步驟是選擇難度，由入門、普通或高手等 3 種難度擇一；第二個步驟由 4 種盔甲擇一；第三個步驟由 5 種武器擇一。若必須依序完成這三個步驟，設定才算完成，則有幾種闖關前設定？
(A)12　(B)23　(C)36　(D)60　。
代碼：110tcb08
(110 年統測 B)

(　　) 29. 若從 1、2、3、4、5、6、7 七個數字中取兩個相異數字排成二位數，則所有這些不同的二位數之總和爲何？
(A)42　(B)924　(C)1848　(D)3696　。
代碼：110tcb21
(110 年統測 B)

(　　) 30. 跆拳道隊有 8 個隊員，教練安排所有隊員每 2 人一組分別在 A、B、C、D 四個不同場地練習，則共有幾種安排的方式？
(A)105　(B)2520　(C)5040　(D)40320　。
代碼：110tcc12
(110 年統測 C)

(　　) 31. 一個空的書櫃有上、中、下共三層，若將國文、英文、數學三本課本放入書櫃的任一層，且當課本放在同一層左右順序不同時視爲不同排列，則共有幾種不同的排法？　(A)60　(B)36　(C)27　(D)18　。
代碼：110tcc21
(110 年統測 C)

(　　) 32. 「心公司」想要找設計公司製作招牌，而招牌設計中要先選擇底色，中間則是心公司的單色商標，商標下放上一排單色文字寫上心公司，如圖 (三)。已知底色、商標顏色以及文字顏色的選擇有黑、藍、白、黃、紅等五種顏色，且底色不能跟商標顏色相同，也不能跟文字顏色相同，除此之外，並無其他限制。
試問這個招牌的顏色設計有幾種選擇？
(A)60　(B)80　(C)100　(D)120
代碼：111tcb22
(111 年統測 B)

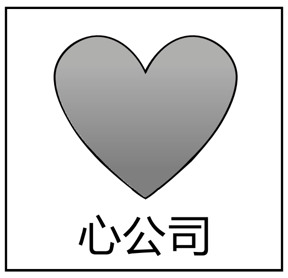


圖 (三)

(　　) 33. 某密碼系統是透過 (p , q) 兩數字進行加解密，若系統要求 $p\times q$ 除以 8 餘 1，其中 p 、 q 均爲比 1 大且比 8 小的正整數，試問 (p , q) 共有幾種組合？
(A)1　(B)2　(C)3　(D)4　。
代碼：111tcb23
(111 年統測 B)

(　　) 34. 某歌手打算在她的演唱會上表演一段由 6 首不同的歌曲串成的組曲，其中 3 首慢歌、3 首快歌。她的音樂總監建議在歌曲的安排上最多只能 2 首慢歌連在一起唱，因爲這樣才會使得整個組曲的節奏比較流暢。若她認同並接受音樂總監的建議，試問這段組曲可以有多少種不同的安排方式？　(A)576　(B)648　(C)696　(D)720　。
代碼：111tcc15
(111 年統測 C)

答案：CBDBA　CCCBA　DDDBC　BBABC　ABACB　BDDCB　ABCA

綜合練習

(　　) 1. 設甲、乙兩班比賽棒球，規則是以先取得四勝者爲勝方，且每場比賽皆有勝負。若現已賽畢三場，甲班以二勝一負取得優勢，則往後有幾種可能賽事序列來決定勝方？ (A)8 (B)9 (C)10 (D)11。 代碼：p11102w1

(　　) 2. 現有4個男生與3個女生要排成一列，若女生之間不排男生，則共有多少種排法 ？ (A)72 (B)120 (C)720 (D)5040。 代碼：p12092s1

(　　) 3. 甲、乙、丙、丁、戊、己六人排成一列。若甲、乙、丙三人相鄰，且丙介於甲、乙之間，則此六人共有多少種排法？ (A)42 (B)44 (C)46 (D)48。 代碼：p12104w1

(　　) 4. 將5男生與5女生分組成5對男女混聲二重唱。則有多少種可能之分組？ (A)15 (B)25 (C)120 (D)360。 代碼：p12103p1

(　　) 5. 5男5女排一列，則男女相間隔的排法有幾種？ (A)2880 (B)28800 (C)14400 (D)1440。 代碼：p12229m1

(　　) 6. 設 A、B、C、D、E 等5位小朋友排成一行郊遊，其中 A 因年紀較小不敢排在首、尾兩個位置，另 C，D 是好朋友，一定要相鄰，則其排法共有多少種？ (A)72種 (B)24種 (C)192種 (D)720種。 代碼：p12231m1

(　　) 7. 某三位數其百位數數字爲偶數，個位數數字爲奇數，這樣的三位數共有多少個？ (A)90 (B)125 (C)200 (D)250。 代碼：p12090s1

(　　) 8. 由0，1，2，3，4，5，6中任取相異三數作成三位數，則不小於340 的有多少個？ (A)105 (B)120 (C)165 (D)210。 代碼：p12088f1

(　　) 9. 用0,1,2,3,4,5六個數字，可作成多少個大於3200的每一位數字不同的四位數 (A)166 (B)156 (C)168 (D)144。 代碼：p12254m1

(　　) 10. 用1，2，3，4四個數字作成四位數，數字不重覆，求這所有四位數之和 (A)66000 (B)11110 (C)29616 (D)66660。 代碼：p12088y1

( ) 11. 已知 A 診所內有10個座位，編號為1到10，某日有12位病患同時看診，其中有5位老人，3位兒童以及4位成人。若 A 診所安排老人坐編號前5個位置，兒童坐編號6、7、8位置，編號9和10位置各安排坐一位成人，則共有幾種安排方式？ (A) $5!\times 3!\times 2!\times C_2^4$ (B) $5!\times 3!\times 2!\times P_2^4$ (C) $10!$ (D) $10!\times C_2^4$。 代碼：p12105w1

( ) 12. $(2x-y+3z)^6$ 中 x^2y^3z 的係數為 (A) -60 (B) -720 (C) 60 (D) 720 代碼：p13087f1

( ) 13. 將六位數223345的各數字任意排列，若其中的數字2須相鄰，但數字3 不得相鄰，試問可得多少不同的六位數？ (A) 72 (B) 60 (C) 48 (D) 36。 代碼：p13088s1

( ) 14. 甲、乙、丙、丁、戊、己排一列，甲在乙、丙之左，求方法 (A) 30 (B) 60 (C) 120 (D) 240。 代碼：p13215m1

( ) 15. 3個台灣人、2個日本人、2個韓國人，則台灣人必須排在韓國人前面，方法有幾種？ (A) 252 (B) 504 (C) 72 (D) 84。 代碼：p13231m1

( ) 16. 4人中，至少有2人在同一月份出生的情形有 (A) 8856 (B) 20241 (C) 870 (D) 11880 種。 代碼：p14207m1

( ) 17. 從集合 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 中選取6個不同數字，其中至少有3個奇數的選法有幾種？ (A) 74 (B) 78 (C) 82 (D) 84。 代碼：p21090s1

( ) 18. 某次數學測驗，規定考生由12題中任選8題作答。若選題方式為：前4 題中任選2題，後8題中任選6題，則共有多少種選法？ (A) 32 (B) 168 (C) 256 (D) 495。 代碼：p21092s1

( ) 19. 下列各問題中，何者的解答是 C_6^{10} (其中 $C_k^n=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$)？ 代碼：p22098k1

(A) 10位學生任意挑選6位同學排成一列，共有幾種情形？
(B) 10個不同顏色的球中任意挑選4個出來，共有幾種情形？
(C) 10張椅子排成一列，6個同學各自任意挑選1張椅子坐下，共有幾種情形？
(D) 10個相同的白色球任意挑選4個出來，共有幾種情形？

答案：CCDCB BCABD ABDDB AABB

筆記欄